CVIČENÍ Z MATEMATICKÉ ANALÝZY 1

Supremum a infimum

Cvičení 1. Zjistěte, zda následující množiny mají supremum a infimum. Pokud ano, určete je. Rozhodněte o existenci maxima a minima.

$$A = \left\{ \frac{1}{n}; n \in \mathbb{N} \right\}, \qquad F = \left\{ \frac{p}{p+q}; p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{N} \right\},$$
$$B = \left\{ \frac{n + (-1)^n}{n}; n \in \mathbb{N} \right\}, \qquad G = \left\{ n^2 - m^2; n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N} \right\},$$
$$C = \{\sin(x); x \in [0, 2\pi]\}, \qquad H = \left\{ 2^{-n} + 3^{-n}; n \in \mathbb{N} \right\},$$
$$D = \left\{ n^{(-1)^n}; n \in \mathbb{N} \right\}, \qquad I = \left\{ 5^{(-1)^j 3^k}; j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z} \right\},$$
$$E = \left\{ q \in \mathbb{Q}; q^2 < 3 \right\}, \qquad J = \{\sin(n) cos(n); n \in \mathbb{N}\}.$$

Cvičení 2. Nechť A a B jsou neprázdné podmnožiny $\mathbb{R}$. Dokažte následující tvrzení:

(1) Nechť $A \subseteq B$ a nechť B je shora omezená. Potom A je také shora omezená a $\sup A \leq \sup B$.
Zformulujte a dokažte analogické tvrzení pro infimum.

(2) Sjednocení $A \cup B$ je shora omezené, právě když obě množiny A, B jsou shora omezené a v takovém případě platí $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$.
Zformulujte a dokažte analogické tvrzení pro infimum.
Platí analogická rovnost pro průnik?

(3) Nechť pro každé $a \in A$ a pro každé $b \in B$ platí $a \leq b$. Dokažte, že A je shora omezená, B je zdola omezená a $\sup A \leq \inf B$.
Kdybychom místo $a \leq b$ předpokládali dokonce $a < b$, platilo by $\sup A < \inf B$?

(4) Označme $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$. Nechť A a B jsou omezené shora nebo $A + B$ je omezená shora. Potom všechny množiny A, B i $A + B$ mají supremum a platí, že $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.
Zformulujte a dokažte analogické tvrzení pro infimum.

Cvičení 3. Nechť M je neprázdná množina a $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : M \longrightarrow \mathbb{R}$ jsou omezené funkce, tj. $f(M) \subseteq \mathbb{R}$ a $g(M) \subseteq \mathbb{R}$ jsou omezené množiny. Dokažte následující nerovnosti.

(1) $\sup_{x \in M}(f(x) + g(x)) \leq \sup_{x \in M} f(x) + \sup_{x \in M} g(x)$,

(2) $\sup_{x \in M}(f(x) + g(x)) \geq \sup_{x \in M} f(x) + \inf_{x \in M} g(x)$,

(3) $\sup_{x \in M}(f(x) - g(x)) \leq \sup_{x \in M} f(x) - \inf_{x \in M} g(x)$.

Platí v (1) i opačná nerovnost? Porovnejte s příkladem (4) ve Cvičení 2.