CVIČENÍ Z MATEMATICKÉ ANALÝZY 1

Opakování středoškolské látky

Cvičení 1. Řeště následující nerovnice v $\mathbb{R}$:

$$\text{a) } \frac{x-2}{2x-8} \geq 1, \qquad \text{b) } \log_{\frac{1}{3}}(x^2-3x+3) \geq 0, \qquad \text{c) } \frac{x+2}{x+3} > \frac{2x+3}{x+6}.$$

Cvičení 2. Nakreslete graf funkce $f(x) = \Big|\big||x|-1\big|-1\Big|-1\Big|$, $x \in \mathbb{R}$.

Cvičení 3. Určete definiční obor a obor hodnot funkce $f(x) = x - \sqrt{x^2-1}$.

Cvičení 4. Řešte rovnice v $\mathbb{R}$:

$$\text{a) } \sin 2x = \sin x, \qquad \text{b) } 2\sin x + \cos x = 1, \qquad \text{c) } \log(x^2+1) = 2\log(3-x).$$

Cvičení 5. Vyjádřete funkce $\sin 5x$ a $\cos 5x$ pomocí funkcí $\sin x$ a $\cos x$.

***Cvičení 6.** Pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ a $x \in \mathbb{R}$ sečtěte výraz $\sin x + \cdots + \sin nx$.

Cvičení 7. Dokažte, že pro každé $a, b \in \mathbb{R}$ platí $\big|a+b\big| \leq \big|a\big| + \big|b\big|$ a $\big||a|-|b|\big| \leq \big|a-b\big|$.

Cvičení 8. Dokažte následující vztahy:

$$\text{a) } \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1), \qquad \text{b) } \sum_{k=1}^{n} k^3 = (1+2+3+\cdots+n)^2.$$

Cvičení 9. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ dokažte, že platí $n \leq 2^n$.

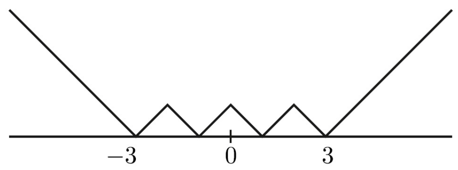
Cvičení 10. Pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 3$, dokažte, že platí $n^2 \leq 2^n$.

Cvičení 11. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ a každé $x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{R}$ dokažte, že platí $|\sum_{i=1}^{n} x_i| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|$.

Cvičení 12. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ a každé $x_1, \cdots, x_n \in [0, \pi]$ dokažte, že platí $|\sin(\sum_{i=1}^{n} x_i)| \leq \sum_{i=1}^{n} \sin x_i$.

Výsledky

1. a) $(4, 6]$, b) $[1, 2]$, c) $(-6, -3) \cup (\frac{-1-\sqrt{13}}{2}, \frac{-1+\sqrt{13}}{2})$, **2.** Obrázek grafu



3. $D_f = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ a $H_f = (-\infty, -1] \cup (0, 1]$. **4.** a) $x = k\pi$ nebo $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ nebo $x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, b) $x = 2k\pi$ nebo $x = \pi - \arcsin\frac{4}{5} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, c) $\frac{4}{3}$, **5.** Použijte Moivreovu větu nebo součtové vzorce. Výsledek: $\cos 5x = \cos^5 x - 10\cos^3 x \sin^2 x + 5\cos x \sin^4 x$ a $\sin 5x = 5\cos^4 x \sin x - 10\cos^2 x \sin^3 x + \sin^5 x$. **6.** Vhodným použitím Moivreovy věty a vzorce pro součet geometrické řady dostaneme:

$$\frac{\cos\frac{x}{2} - \cos(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}} \qquad \text{pro } x \neq 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z},$$

$$0 \qquad \text{pro } x = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

7. První nerovnost dokažte užitím vhodné definice absolutní hodnoty nebo provedením diskuse znamének členů v absolutních hodnotách. Druhou nerovnost odvoďte z první. **8., 9., 10., 11., 12.** Použijte matematickou indukci.