

### STEJNOMĚRNÁ KONVERGENCE POSLOUPNOSTÍ FUNKCÍ

1. Vyšetřete konvergenci následujících posloupností funkcí na intervalu  $[0, 1]$

$$\{x^n - x^{n+1}\}, \quad \{x^n - x^{2n}\}, \quad \left\{ \frac{nx}{1+n+x} \right\}.$$

2. Vyšetřete konvergenci následujících posloupností funkcí na intervalu  $[0, \infty)$

$$\left\{ \frac{nx}{1+n^2x^2} \right\}, \quad \{\arctan nx\}, \quad \left\{ \frac{1}{x+n} \right\}, \quad \left\{ \frac{x^n}{1+x^n} \right\}.$$

3. Vyšetřete bodovou a stejnoměrnou konvergenci posloupnosti  $f_n(x) = x \operatorname{arctg} nx$  na intervalu  $[0, \infty)$ .

4. Vyšetřete bodovou a (lokálně) stejnoměrnou konvergenci posloupnosti  $f_n(x) = n(\sqrt{x + \frac{1}{n}} - \sqrt{x})$ ,  $n \in \mathbf{N}$ ,  $x \in [0, \infty)$ .

5. Necht' posloupnost funkcí  $\{f_n\}$  je zadána předpisem  $f_n(x) = \sqrt{x} n^{-\sqrt{x}} \log n$ ,  $n \in \mathbf{N}$ ,  $x \in [0, \infty)$ . Vyšetřete, zda

- $\{f_n\}$  konverguje bodově na intervalu  $[0, \infty)$  (pokud ano, určete limitní funkci  $f$ ),
- $\{f_n\}$  konverguje stejnoměrně na intervalu  $[0, \infty)$ ,
- $\{f_n\}$  konverguje stejnoměrně na intervalu  $(0, \infty)$ ,
- $\{f_n\}$  konverguje lokálně stejnoměrně na intervalu  $(0, \infty)$ .

6. Vyšetřete bodovou a (lokálně) stejnoměrnou konvergenci posloupnosti  $f_n(x) = \sqrt[n]{x^n + 3^n}$ ,  $n \in \mathbf{N}$ ,  $x \in [0, \infty)$ .

7. Necht' posloupnost funkcí  $\{f_n\}$  je dána předpisem  $f_n(x) = (x+1)^3 \operatorname{arccotg}(-nx^3)$ ,  $n \in \mathbf{N}$ ,  $x \in \mathbf{R}$ .

- Nalezněte bodovou limitu posloupnosti  $\{f_n\}$ ,
- rozhodněte, zda posloupnost  $\{f_n\}$  konverguje stejnoměrně na  $\mathbf{R}$ ,
- rozhodněte, zda posloupnost  $\{f_n\}$  konverguje lokálně stejnoměrně na  $(-\infty, 0)$ ,
- rozhodněte, zda posloupnost  $\{f_n\}$  konverguje lokálně stejnoměrně na  $(0, \infty)$ .

8. Vyšetřete bodovou a (lokálně) stejnoměrnou konvergenci posloupnosti  $f_n(x) = \sqrt{n^2 + 1} \cdot (e^{\frac{1}{nx}} - 1)$ ,  $n \in \mathbf{N}$ ,  $x \in (0, \infty)$ .

### VÝSLEDKY

1. (a) konverguje stejnoměrně k nulové funkci (b) konverguje bodově, ne však stejnoměrně, k nulové funkci (c) konverguje stejnoměrně k funkci  $f(x) = x$  2. (a) nekonverguje stejnoměrně (b) nekonverguje stejnoměrně (c) konverguje stejnoměrně k nulové funkci (d) nekonverguje stejnoměrně 3. konverguje stejnoměrně 4. nekonverguje stejnoměrně 5.  $f_n \rightarrow 0$  na  $[0, \infty)$  a  $f_n \xrightarrow{\text{loc}} 0$  na  $(0, \infty)$ , konvergence není stejnoměrná 6. Položme

$$f(x) = \begin{cases} 3, & x \in [0, 3], \\ x, & x \in (3, \infty). \end{cases}$$

- Potom  $f_n \xrightarrow{\text{loc}} f$  na  $[0, \infty)$ . 7.  $f_n \xrightarrow{\text{loc}} 0$  na  $(-\infty, 0)$ , konvergence není stejnoměrná 8.  $f_n \xrightarrow{\text{loc}} \frac{1}{x}$  na  $(0, \infty)$ , konvergence není stejnoměrná