Implicitní funkce

V následujících úlohách ukažte, že uvedená rovnice určuje v jistém okolí daného bodu $[x_0, y_0]$ implicitně zadanou funkci (proměnné x). Spočtěte první a druhou derivaci této funkce v bodě x_0.

1. $x^2 + 2xy^2 + y^4 - y^5 = 0,\ [0,1]$

2. $e^{xy} + \sin y + y^2 = 1,\ [2,0]$

3. $\sin(xy) + \cos(xy) = 1,\ [\pi, 0]$

4. $2x^4y + x^3 + y^3 + xy = 1,\ [1,0]$

5. $\log(x^2 + y^2 + \cos(xy)) + y = 0,\ [0,0]$

6. $\log(x + \operatorname{arctg} y + 1) + xy = 0,\ [0,0]$

7. $x^y + y^x = 2y,\ [1,1]$

8. $y^3x^2 + y^2x^2 + \sin y = 0,\ [0,0]$

9. $e^{\sin x^2} + e^{\sin xy} = 2y + 2,\ [0,0]$

10. $\frac{\pi}{2} + \arcsin(x + y^2) = \arccos(y + x^2),\ [0,0]$

11. Je dán vztah $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy - z - 9 = 0$ a bod $[1, -2, 1]$. Dokažte, že tímto vztahem je definována hladká funkce $z = z(x, y)$ v jistém okolí U bodu $[1, -2]$, pro kterou platí $z(1, -2) = 1$, určete $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ v okolí U, napište rovnici tečné roviny ke grafu funkce $z = z(x, y)$ v bodě $[1, -2]$.

12. Dokažte, že množina bodů $[x, y, z] \in \mathbb{R}$, které splňují vztah $x^2 + y^2 + z^2 - 3xyz = 0$ je v okolí bodu $[1, 1, 1]$ popsatelná jako graf funkce $f(x, y)$ definované na jistém okolí bodu (1,1), pro kterou je $f(1, 1) = 1$. Určete totální diferenciál v bodě $[1, 1]$ a napište rovnici tečné roviny ke grafu funkce f v tomto bodě.

13. Spočtěte parciální derivace funkce z v bodě $[0, 1]$, která je implicitně zadaná rovnicí $\frac{x}{z} = \log \frac{z}{y}$ a splňuje $z(0, 1) = 1$.

V následujících třech úlohách ukažte, že uvedená soustava rovnic určuje v jistém okolí daného bodu $[x_0, y_0, u_0, v_0]$ implicitně zadané funkce u, v (proměnných x, y). Spočtěte obě parciální derivace prvního řádu těchto funkcí v bodě $[x_0, y_0]$.

14. $xe^{u+v} + 2uv = 1, ye^{u-v} - \frac{u}{1+v} = 2x, \qquad [1, 2, 0, 0]$

15. $x = u \cos \frac{v}{u}, y = u \sin \frac{v}{u}, \qquad [1, 0, 1, 0]$

16. $x = e^u + u \sin v, y = e^u - u \cos v, \qquad [e + 1, e, 1, \pi/2]$

17. Ukažte, že vztahy $u = \operatorname{arctg}(\pi x) + y^2z, v = e^{-x} + 2\frac{y}{z}, w = \cos(2xy) + 2\sqrt{z}$ definují na okolí bodu $[u, v, w] = [4, \frac{3}{2}, 5]$ hladké funkce $x(u, v, w)$, $y(u, v, w)$, $z(u, v, w)$, pro které platí $x(4, \frac{3}{2}, 5) = 0$, $y(4, \frac{3}{2}, 5) = 1$, $z(4, \frac{3}{2}, 5) = 4$. Rozhodněte, zda má funkce $y(u, v, w)$ totální diferenciál v bodě $[4, \frac{3}{2}, 5]$, a pokud ano, spočtěte jej. Má funkce $y(u, v, w)$ v bodě $[4, \frac{3}{2}, 5]$ stacionární bod?

18. Ukažte, že vztahy $u = \sin x + xy + e^z, v = \cos y + xe^{-y}, w = x^2 + 2y - \cos(xz)$ definují na okolí bodu $[u, v, w] = [1 + \sin 1, 2, 0]$ hladké funkce $x(u, v, w)$, $y(u, v, w)$, $z(u, v, w)$, pro které platí $x(1 + \sin 1, 2, 0) = 1$, $y(1 + \sin 1, 2, 0) = 0$, $z(1 + \sin 1, 2, 0) = 0$. Rozhodněte, zda má funkce $x(u, v, w)$ totální diferenciál v bodě $[1 + \sin 1, 2, 0]$, a pokud ano, spočtěte jej.

19. Dokažte, že vztahy $u = \sin(\pi xy) - \operatorname{arctg}(\frac{y}{x}), v = 3xy^2 + e^{x+y}$ definují na okolí bodu $[u, v] = [\frac{\pi}{4}, -2]$ hladké funkce x, y proměnných u, v takové, že $x(\frac{\pi}{4}, -2) = -1$ a $y(\frac{\pi}{4}, -2) = 1$. Je-li navíc $z(x, y) := \log(x^2 + y^2)$, spočtěte $\frac{\partial z}{\partial u}(\frac{\pi}{4}, -2)$.

20. Dokažte, že vztahy $u = \operatorname{tg}(xy) + \log(x^2 + y^2), v = \arcsin(2x) - (3^x)^y$ definují na okolí bodu $[u, v] = [0, -1]$ hladké funkce x, y proměnných u, v takové, že $x(0, -1) = 0$ a $y(0, -1) = 1$. Rozhodněte, zda má funkce y v bodě $[u, v] = [0, -1]$ totální diferenciál, a pokud ano, spočítejte jej.

21. Ukažte, že vztahy $u = \cos(\pi y) + 2\sqrt{xz}, v = \frac{y}{x} - \log z, w = \frac{x^2}{2} - \operatorname{arctg}(yz)$ definují na okolí bodu $[u, v, w] = [3, 0, \frac{1}{2}]$ hladké funkce $x(u, v, w)$, $y(u, v, w)$, $z(u, v, w)$, pro které platí $x(3, 0, \frac{1}{2}) = 1$, $y(3, 0, \frac{1}{2}) = 0$, $z(3, 0, \frac{1}{2}) = 1$. Rozhodněte, zda má funkce $y(u, v, w)$ totální diferenciál v bodě $[3, 0, \frac{1}{2}]$, a pokud ano, spočtěte jej.

Výsledky

1. $2, -14$ **2.** Rovnice tečny: 0.

3. Položme
$$F(x,y) = \sin(xy) + \cos(xy) - 1.$$
Funkce F je definována na $\mathbf{R}^2$ a pro její parciální derivace platí:
$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \cos(xy)\cdot y - \sin(xy)\cdot y,$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \cos(xy)\cdot x - \sin(xy)\cdot x.$$

Obě parciální derivace jsou na $\mathbf{R}^2$ spojité, stejně jako jejich parciální derivace, tj. $F \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R}^2)$. Dále platí $F(\pi,0) = 0$ a $\frac{\partial F}{\partial y}(\pi,0) = \pi \neq 0$. Tím jsme ověřili, že naše rovnice určuje v jistém okolí bodu $[\pi,0]$ implicitně zadanou funkci proměnné x, která sama je třídy $\mathcal{C}^2$. Funkci označme φ a její derivace vypočítejme postupným derivováním vztahu
$$\sin(x\varphi(x)) + \cos(x\varphi(x)) = 1,$$
$$\cos(x\varphi(x))\cdot(\varphi(x) + x\varphi'(x)) - \sin(x\varphi(x))\cdot(\varphi(x) + x\varphi'(x)) = 0,$$
$$-\sin(x\varphi(x))\cdot(\varphi(x) + x\varphi'(x))^2 + \cos(x\varphi(x))\cdot(2\varphi'(x) + x\varphi''(x))$$
$$-\cos(x\varphi(x))\cdot(\varphi(x) + x\varphi'(x))^2 - \sin(x\varphi(x))\cdot(2\varphi'(x) + x\varphi''(x)) = 0.$$
Dosadíme-li $x = \pi$ a použijeme-li $\varphi(\pi) = 0$, dostaneme $\varphi'(\pi) = 0$ a $\varphi''(\pi) = 0$.

4. Položme
$$F(x,y) = 2x^4y + x^3 + y^3 + xy - 1.$$
Funkce F je definována na $\mathbf{R}^2$ a pro její parciální derivace platí:
$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = 8x^3y + 3x^2 + y,$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 2x^4 + 3y^2 + x.$$

Obě parciální derivace jsou na $\mathbf{R}^2$ spojité, stejně jako jejich parciální derivace, tj. $F \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R}^2)$. Dále platí $F(1,0) = 0$ a $\frac{\partial F}{\partial y}(1,0) = 3 \neq 0$. Tím jsme ověřili, že naše rovnice určuje v jistém okolí bodu $[1,0]$ implicitně zadanou funkci proměnné x, která sama je třídy $\mathcal{C}^2$. Funkci označme φ a její derivace vypočítejme postupným derivováním vztahu
$$2x^4\varphi(x) + x^3 + \varphi(x)^3 + x\varphi(x) - 1 = 0,$$
$$8x^3\varphi(x) + 2x^4\varphi'(x) + 3x^2 + 3\varphi(x)^2\varphi'(x) + \varphi(x) + x\varphi'(x) = 0,$$
$$24x^2\varphi(x) + 8x^3\varphi'(x) + 8x^3\varphi'(x) + 2x^4\varphi''(x) + 6x + 6\varphi(x)(\varphi'(x))^2 + 3\varphi(x)^2\varphi''(x)$$
$$+\varphi'(x) + \varphi'(x) + x\varphi''(x) = 0.$$
Dosadíme-li $x = 1$ a použijeme-li $\varphi(1) = 0$, dostaneme $\varphi'(1) = -1$ a $\varphi''(1) = 4$.

5. Položme
$$F(x,y) = \log(x^2 + y^2 + \cos(xy)) + y.$$
Funkce F je definována na jisté otevřené množině G (lze ukázat, že dokonce $G = \mathbf{R}^2$) obsahující bod $[0,0]$ a pro její parciální derivace platí:
$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{x^2 + y^2 + \cos(xy)}\cdot(2x - \sin(xy)\cdot y),$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{x^2 + y^2 + \cos(xy)}\cdot(2y - \sin(xy)\cdot x) + 1.$$

Obě parciální derivace jsou na G spojité, stejně jako jejich parciální derivace, tj. $F \in \mathcal{C}^2(G)$. Dále platí $F(0,0) = 0$ a $\frac{\partial F}{\partial y}(0,0) = 1 \neq 0$. Tím jsme ověřili, že naše rovnice určuje v jistém okolí bodu

$[0,0]$ implicitně zadanou funkci proměnné x, která sama je třídy $\mathcal{C}^2$. Funkci označme φ a její derivace vypočítejme postupným derivováním vztahu

$$\log(x^2+\varphi(x)^2+\cos(x\varphi(x)))+\varphi(x)=0,$$

$$\frac{1}{x^2+\varphi(x)^2+\cos(x\varphi(x))}\cdot(2x+2\varphi(x)\varphi'(x)-\sin(x\varphi(x))(\varphi(x)+x\varphi'(x)))+\varphi'(x)=0,$$

$$\begin{aligned}&\frac{-1}{(x^2+\varphi(x)^2+\cos(x\varphi(x)))^2}\cdot(2x+2\varphi(x)\varphi'(x)-\sin(x\varphi(x))(\varphi(x)+x\varphi'(x)))^2\\&+\frac{1}{x^2+\varphi(x)^2+\cos(x\varphi(x))}\cdot(2+2(\varphi'(x))^2+2\varphi(x)\varphi''(x)\\&-\cos(x\varphi(x))(\varphi(x)+x\varphi'(x))^2-\sin(x\varphi(x))(2\varphi'(x)+x\varphi''(x)))+\varphi''(x)=0.\end{aligned}$$

Dosadíme-li $x=0$ a použijeme-li $\varphi(0)=0$, dostaneme $\varphi'(0)=0$ a $\varphi''(0)=-2$.

6. Položme

$$F(x,y)=\log(x+\operatorname{arctg}y+1)+xy.$$

Funkce F je definována na jisté otevřené množině G obsahující bod $[0,0]$ a pro její parciální derivace platí:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)&=\frac{1}{x+\operatorname{arctg}y+1}+y,\\\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)&=\frac{1}{x+\operatorname{arctg}y+1}\cdot\frac{1}{1+y^2}+x.\end{aligned}$$

Obě parciální derivace jsou na G spojité, stejně jako jejich parciální derivace, tj. $F\in\mathcal{C}^2(G)$. Dále platí $F(0,0)=0$ a $\frac{\partial F}{\partial y}(0,0)=1\neq 0$. Tím jsme ověřili, že naše rovnice určuje v jistém okolí bodu $[0,0]$ implicitně zadanou funkci proměnné x, která sama je třídy $\mathcal{C}^2$. Funkci označme φ a její derivace vypočítejme postupným derivováním vztahu

$$\log(x+\operatorname{arctg}\varphi(x)+1)+x\varphi(x)=0,$$

$$\frac{1}{x+\operatorname{arctg}\varphi(x)+1}\cdot\left(1+\frac{\varphi'(x)}{1+\varphi(x)^2}\right)+\varphi(x)+x\varphi'(x)=0,$$

$$\begin{aligned}&\frac{-1}{(x+\operatorname{arctg}\varphi(x)+1)^2}\cdot\left(1+\frac{\varphi'(x)}{1+\varphi(x)^2}\right)^2\\&+\frac{1}{x+\operatorname{arctg}\varphi(x)+1}\cdot\frac{\varphi''(x)(1+\varphi(x)^2)-2\varphi'(x)\varphi'(x)\varphi(x)}{(1+\varphi(x)^2)^2}\\&+\varphi'(x)+\varphi'(x)+x\varphi''(x)=0,\end{aligned}$$

Dosadíme-li $x=0$ a použijeme-li $\varphi(0)=0$, dostaneme $\varphi'(0)=-1$ a $\varphi''(0)=2$.

7. Položme

$$F(x,y)=x^y+y^x-2y.$$

Funkce F je definována na otevřené množině $G=(0,+\infty)\times(0,+\infty)$, která obsahuje bod $[1,1]$. Pro parciální derivace F platí:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)&=yx^{y-1}+y^x\log y,\\\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)&=x^y\log x+xy^{x-1}-2.\end{aligned}$$

Obě parciální derivace jsou na G spojité, stejně jako jejich parciální derivace, tj. $F\in\mathcal{C}^2(G)$. Dále platí $F(1,1)=0$ a $\frac{\partial F}{\partial y}(1,1)=-1\neq 0$. Tím jsme ověřili, že naše rovnice určuje v jistém okolí bodu $[1,1]$ implicitně zadanou funkci proměnné x, která sama je třídy $\mathcal{C}^2$. Funkci označme φ a její derivace vypočítejme postupným derivováním vztahu

$$x^{\varphi(x)}+\varphi(x)^x-2\varphi(x)=0.$$

Tento vztah si přepišme na tvar

$$e^{\varphi(x)\log x} + e^{x\log\varphi(x)} - 2\varphi(x) = 0.$$

Nyní postupně obdržíme

$$e^{\varphi(x)\log x}\cdot\left(\varphi'(x)\log x + \frac{\varphi(x)}{x}\right) + e^{x\log\varphi(x)}\cdot\left(\log\varphi(x) + \frac{x\varphi'(x)}{\varphi(x)}\right) - 2\varphi'(x) = 0,$$

$$e^{\varphi(x)\log x}\cdot\left(\varphi'(x)\log x + \frac{\varphi(x)}{x}\right)^2 + e^{\varphi(x)\log x}\cdot\left(\varphi''(x)\log x + 2\frac{\varphi'(x)}{x} - \frac{\varphi(x)}{x^2}\right)$$

$$+e^{x\log\varphi(x)}\cdot\left(\log\varphi(x) + \frac{x\varphi'(x)}{\varphi(x)}\right)^2$$

$$+e^{x\log\varphi(x)}\cdot\left(\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} + \frac{(\varphi'(x)+x\varphi''(x))\varphi(x) - x\varphi'(x)\varphi'(x)}{\varphi(x)^2}\right) - 2\varphi''(x) = 0.$$

Dosadíme-li $x = 1$ a použijeme-li $\varphi(1) = 1$, dostaneme $\varphi'(1) = 1$ a $\varphi''(1) = 4$.Položme

$$F(x,y) = x^y + y^x - 2y.$$

Funkce F je definována na otevřené množině $G = (0,+\infty)\times(0,+\infty)$, která obsahuje bod $[1,1]$. Pro parciální derivace F platí:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = yx^{y-1} + y^x\log y,$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = x^y\log x + xy^{x-1} - 2.$$

Obě parciální derivace jsou na G spojité, stejně jako jejich parciální derivace, tj. $F \in \mathcal{C}^2(G)$. Dále platí $F(1,1) = 0$ a $\frac{\partial F}{\partial y}(1,1) = -1 \neq 0$. Tím jsme ověřili, že naše rovnice určuje v jistém okolí bodu $[1,1]$ implicitně zadanou funkci proměnné x, která sama je třídy $\mathcal{C}^2$. Funkci označme φ a její derivace vypočítejme postupným derivováním vztahu

$$x^{\varphi(x)} + \varphi(x)^x - 2\varphi(x) = 0.$$

Tento vztah si přepišme na tvar

$$e^{\varphi(x)\log x} + e^{x\log\varphi(x)} - 2\varphi(x) = 0.$$

Nyní postupně obdržíme

$$e^{\varphi(x)\log x}\cdot\left(\varphi'(x)\log x + \frac{\varphi(x)}{x}\right) + e^{x\log\varphi(x)}\cdot\left(\log\varphi(x) + \frac{x\varphi'(x)}{\varphi(x)}\right) - 2\varphi'(x) = 0,$$

$$e^{\varphi(x)\log x}\cdot\left(\varphi'(x)\log x + \frac{\varphi(x)}{x}\right)^2 + e^{\varphi(x)\log x}\cdot\left(\varphi''(x)\log x + 2\frac{\varphi'(x)}{x} - \frac{\varphi(x)}{x^2}\right)$$

$$+e^{x\log\varphi(x)}\cdot\left(\log\varphi(x) + \frac{x\varphi'(x)}{\varphi(x)}\right)^2$$

$$+e^{x\log\varphi(x)}\cdot\left(\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} + \frac{(\varphi'(x)+x\varphi''(x))\varphi(x) - x\varphi'(x)\varphi'(x)}{\varphi(x)^2}\right) - 2\varphi''(x) = 0.$$

Dosadíme-li $x = 1$ a použijeme-li $\varphi(1) = 1$, dostaneme $\varphi'(1) = 1$ a $\varphi''(1) = 4$.

8. Položme

$$F(x,y) = y^3x^2 + y^2x^2 + \sin y.$$

Funkce F je definována na $\mathbf{R}^2$. Pro parciální derivace F platí:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = 2y^3x + 2y^2x,$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 3y^2x^2 + 2yx^2 + \cos y.$$

Obě parciální derivace jsou na $\mathbf{R}^2$ spojité, stejně jako jejich parciální derivace, tj. $F \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R}^2)$. Dále platí $F(0,0) = 0$ a $\frac{\partial F}{\partial y}(0,0) = 1 \neq 0$. Tím jsme ověřili, že naše rovnice určuje v jistém okolí bodu

$[0,0]$ implicitně zadanou funkci proměnné x, která sama je třídy $\mathcal{C}^2$. Funkci označme φ a její derivace vypočítejme postupným derivováním vztahu

$$\varphi(x)^3x^2 + \varphi(x)^2x^2 + \sin\varphi(x) = 0.$$

Postupně obdržíme

$$\begin{gathered}3\varphi(x)^2\varphi'(x)x^2 + 2\varphi(x)^3x + 2\varphi(x)\varphi'(x)x^2 + 2\varphi(x)^2x + \cos\varphi(x)\cdot\varphi'(x) = 0,\\ 6\varphi(x)\varphi'(x)\varphi'(x)x^2 + 3\varphi(x)^2\varphi''(x)x^2 + 6\varphi(x)^2\varphi'(x)x + 6\varphi(x)^2\varphi'(x)x\\ +2\varphi(x)^3 + 2\varphi'(x)\varphi'(x)x^2 + 2\varphi(x)\varphi''(x)x^2 + 4\varphi(x)\varphi'(x)x\\ +4\varphi(x)\varphi'(x)x + 2\varphi(x)^2 - \sin\varphi(x)\cdot\varphi'(x)\varphi'(x) + \cos\varphi(x)\cdot\varphi''(x) = 0.\end{gathered}$$

Dosadíme-li $x = 0$ a použijeme-li $\varphi(0) = 0$, dostaneme $\varphi'(0) = 0$ a $\varphi''(0) = 0$.

9. Položme

$$F(x,y) = e^{\sin x^2} + e^{\sin xy} - 2y - 2.$$

Funkce F je definována na $\mathbf{R}^2$. Pro parciální derivace F platí:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) &= e^{\sin x^2}\cdot\cos x^2\cdot 2x + e^{\sin xy}\cdot\cos xy\cdot y,\\ \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) &= e^{\sin xy}\cdot\cos xy\cdot x - 2.\end{aligned}$$

Obě parciální derivace jsou na $\mathbf{R}^2$ spojité, stejně jako jejich parciální derivace, tj. $F \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R}^2)$. Dále platí $F(0,0) = 0$ a $\frac{\partial F}{\partial y}(0,0) = -2 \neq 0$. Tím jsme ověřili, že naše rovnice určuje v jistém okolí bodu $[0,0]$ implicitně zadanou funkci proměnné x, která sama je třídy $\mathcal{C}^2$. Funkci označme φ a její derivace vypočítejme postupným derivováním vztahu

$$e^{\sin x^2} + e^{\sin x\varphi(x)} - 2\varphi(x) - 2 = 0.$$

Postupně obdržíme

$$\begin{gathered}e^{\sin x^2}\cdot\cos x^2\cdot 2x + e^{\sin x\varphi(x)}\cos x\varphi(x)\cdot(\varphi(x) + x\varphi'(x)) - 2\varphi'(x) = 0,\\ e^{\sin x^2}\cdot(\cos x^2\cdot 2x)^2 - e^{\sin x^2}\cdot\sin x^2\cdot 4x^2\\ +e^{\sin x^2}\cdot\cos x^2\cdot 2 + e^{\sin x\varphi(x)}(\cos x\varphi(x)\cdot(\varphi(x) + x\varphi'(x)))^2\\ -e^{\sin x\varphi(x)}\sin x\varphi(x)\cdot(\varphi(x) + x\varphi'(x))^2 + e^{\sin x\varphi(x)}\cos x\varphi(x)\cdot(2\varphi'(x) + x\varphi''(x)) - 2\varphi''(x) = 0.\end{gathered}$$

Dosadíme-li $x = 0$ a použijeme-li $\varphi(0) = 0$, dostaneme $\varphi'(0) = 0$ a $\varphi''(0) = 1$.

10. Položme

$$F(x,y) = \pi/2 + \arcsin(x + y^2) - \arccos(y + x^2).$$

Bod $[0,0]$ je ve vnitřku definičního oboru funkce F – můžeme tedy spočítat parciální derivace funkce F na jistém okolí G bodu $[0,0]$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) &= \frac{1}{\sqrt{1-(x+y^2)^2}} + \frac{2x}{\sqrt{1-(y+x^2)^2}}\\ \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) &= \frac{2y}{\sqrt{1-(x+y^2)^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-(y+x^2)^2}}.\end{aligned}$$

Obě parciální derivace jsou na jistém okolí bodu $[0,0]$ spojité a navíc tam jsou jejich parciální derivace spojité, tj. $f \in \mathcal{C}^2(G)$. Dále platí $F(0,0) = 0$ a $\frac{\partial F}{\partial y}(0,0) = 1 \neq 0$. Tím jsme ověřili, že naše rovnice určuje v jistém okolí bodu $[0,0]$ implicitně zadanou funkci proměnné x, která je třídy $\mathcal{C}^2$. Funkci označme φ a její derivace vypočítejme postupným derivováním vztahu

$$\arcsin(x + (\varphi(x))^2) + \pi/2 - \arccos(\varphi(x) + x^2) = 0,$$

$$\frac{1 + 2\varphi(x)\varphi'(x)}{\sqrt{1 - (x + (\varphi(x))^2)^2}} + \frac{\varphi'(x) + 2x}{\sqrt{1 - (\varphi(x) + x^2)^2}} = 0,$$

$$-\frac{1}{2}(1 - (x + (\varphi(x))^2)^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot (-2(x + (\varphi(x))^2)) \cdot (1 + 2\varphi(x)\varphi'(x))^2$$

$$+(1 - (x + (\varphi(x))^2)^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2(\varphi'(x))^2 + 2\varphi(x)\varphi''(x))$$

$$-\frac{1}{2}(1 - (\varphi(x) + x^2)^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot (-2(\varphi(x) + x^2)) \cdot (\varphi'(x) + 2x)^2$$

$$+(1 - (\varphi(x) + x^2)^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (\varphi''(x) + 2) = 0.$$

Dosadíme-li $x = 0$ a využijeme-li $\varphi(0) = 0$, dostaneme $\varphi'(0) = -1$ a $\varphi''(0) = -4$.

11. Rovnice tečné roviny: $L(x, y) = \frac{7}{5}(y + 2) + 1$. **12.** Rovnice tečné roviny: $L(x, y) = -(x - 1) - (y - 1) + 1$. **13.** $\frac{\partial z}{\partial x}(0, 1) = 1$, $\frac{\partial z}{\partial y}(0, 1) = 1$ **14.** $\frac{\partial u}{\partial x}(1, 2) = 0$, $\frac{\partial v}{\partial x}(1, 2) = -1$, $\frac{\partial u}{\partial y}(1, 2) = -1/3$, $\frac{\partial v}{\partial y}(1, 2) = 1/3$ **15.** $\frac{\partial u}{\partial x}(1, 0) = 1$, $\frac{\partial v}{\partial x}(1, 0) = 0$, $\frac{\partial u}{\partial y}(1, 0) = 0$, $\frac{\partial v}{\partial y}(1, 0) = 1$ **16.** $\frac{\partial u}{\partial x}(e + 1, e) = 1/(1 + e)$, $\frac{\partial v}{\partial x}(e + 1, e) = -e/(e + 1)$, $\frac{\partial u}{\partial y}(e + 1, e) = 0$, $\frac{\partial v}{\partial y}(e + 1, e) = 1$ **17.** $\nabla y(4, \frac{3}{2}, 5) = (\frac{2}{\pi+16}, \frac{2\pi}{\pi+16}, \frac{\pi-8}{\pi+16})$, funkce $y(u, v, w)$ v bodě $[4, \frac{3}{2}, 5]$ nemá stacionární bod **18.** $\nabla x(1 + \sin 1, 2, 0) = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ **19.** $\frac{\partial z}{\partial u}(\frac{\pi}{4}, -2) = -\frac{2}{9-2\pi}$ **20.** $\nabla y(0, -1) = (\frac{1}{2-\log 3}, \frac{-1}{2(2-\log 3)})$ **21.** $\nabla y(3, 0, \frac{1}{2}) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, funkce $y(u, v, w)$ nemá v bodě $[3, 0, \frac{1}{2}]$ stacionární bod