CVIČENÍ Z MATEMATICKÉ ANALÝZY 3

Funkce více proměnných - úvod

1. Ověřte platnost rovnosti
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x},$$
je-li

a) $u = x^2 - 2xy - 3y^2$;

b) $u = x^{y^2}$ na $(0,\infty)^2$;

c) $u = \arccos\sqrt{\dfrac{x}{y}}$ na $(0,\infty)^2$.

2. Nechť $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je funkce definovaná předpisem
$$f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{pro } [x,y] \neq [0,0], \\ 0 & \text{pro } [x,y] = [0,0]. \end{cases}$$
Ukažte, že
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0).$$

3. Vypočtěte parciální derivace prvního a druhého řádu následujících funkcí

a) $u = x^4 + y^4 - 4x^2y^2$; **b)** $u = xy + \dfrac{x}{y}$;

c) $u = \dfrac{x}{y^2}$; **d)** $u = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

e) $u = x\sin(x+y)$; **f)** $u = \dfrac{\cos x^2}{y}$;

g) $u = \operatorname{tg}\dfrac{x^2}{y}$; **h)** $u = x^y$;

i) $u = \log(x+y^2)$; **j)** $u = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$;

k) $u = \operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{1-xy}$; **l)** $u = \arcsin\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

m) $u = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+y^2}}$; **n)** $u = \left(\dfrac{x}{y}\right)^2$;

o) $u = x^{\frac{y}{z}}$; **p)** $u = x^{y^z}$.

4. Vypočtěte požadované parciální derivace

a) $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}$, je-li $u = x\log(xy)$;

b) $\dfrac{\partial^6 u}{\partial x^3 \partial y^3}$, je-li $u = x^3\sin y + y^3 \sin x$;

c) $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$, je-li $u = \operatorname{arctg}\dfrac{x+y+z-xyz}{1-xy-xz-yz}$;

d) $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$, je-li $u = e^{xyz}$.