Cvičení 9

Úloha 1. *Vyjádřete integrál* $\iint_M f$ *v polárních souřadnicích v pořadí* $dr\,d\varphi$*, kde* M *je vnitřek trojúhelníka s vrcholy* $(1,0),(2,0),(1,1)$.

Úloha 2. *Přepište integrál*

$$\int_1^2 \int_1^{\sqrt{5-x^2}} f\,dy\,dx$$

nejprve v opačném pořadí integrace a pak ho také zapište v polárních souřadnicích v pořadí $dr\,d\varphi$.

Úloha 3. *Pomocí polárních souřadnic spočtěte*

$$\int_0^1 \int_x^{\sqrt{2-x^2}} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dy\,dx.$$

Úloha 4. *Pomocí polárních souřadnic nalezněte obsah plochy ohraničené křivkami*

$$x^2+y^2=2x,\ \ x^2+y^2=4x,\ \ y=x,\ \ y=0.$$

Úloha 5. *Pomocí vhodně modifikovaných polárních souřadnic spočtěte integrál*

$$\iint_M \sqrt{1-\left(\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y+1)^2}{9}\right)},$$

kde M *je oblast daná nerovností*

$$\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y+1)^2}{9}\leq 1.$$

[Nezapomeňte, že je potřeba přepočítat jakobián.]

Úloha 6. *Zapište integrál*

$$\int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \int_{x^2+y^2}^{\sqrt{x^2+y^2}} xy^2z\,dz\,dx\,dy$$

ve válcových souřadnicích.

Úloha 7. *Zapište integrál*

$$\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-y^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{18-x^2-y^2}} x^2+y^2+z^2\,dz\,dx\,dy$$

ve sférických souřadnicích.

Úloha 8. *Nalezněte těžiště (hmotný střed) tělesa* P*, které je ohraničeno plochami* $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=1$*, jehož hustota je* $f(x,y,z)=y$.

Úloha 9. *Spočtěte moment setrvačnosti* J *vzhledem k ose* y *homogenního (tj. s konstantní hustotou* $f\equiv 1$*) tělesa* P*, které je dáno nerovnostmi* $x^2+y^2+z^2\leq 2$, $x^2+z^2\leq 1$, $x,y,z\geq 0$.

Úloha 10. *Spočtěte hmotnost tělesa* P*, které tvoří oblast mezi sférami* $x^2+y^2+z^2=r^2$ *a* $x^2+y^2+z^2=4r^2$*, která leží v průniku poloprostorů* $x\geq 0$ *a* $z\geq 0$*. Hustota tělesa* P *je nepřímo úměrná vzdálenosti od počátku.*

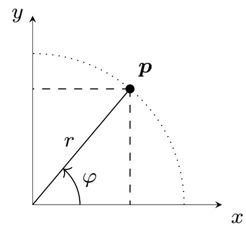
Dále řeště úlohy ze zadání Lebesgueův integrál (viz Moodle nebo též pátá strana tohoto dokumentu).

Domácí úkol: Úloha 6.

Věta o substituci, polární souřadnice, válcové souřadnice a sférické souřadnice

- **Věta o substituci pro dvojný integrál** má formálně tvar
$$\int_{\mathbf{\Phi}(M)} f(\boldsymbol{y}) d\lambda_n(\boldsymbol{y}) = \int_M f(\mathbf{\Phi}(\boldsymbol{x})) \left|\det \boldsymbol{J}_{\mathbf{\Phi}}(\boldsymbol{x})\right| d\lambda_n(\boldsymbol{x}), \tag{1}$$
kde $\det \boldsymbol{J}_{\mathbf{\Phi}}$ je tzv. **jakobián** transformace $\mathbf{\Phi}\colon M \to \mathbb{R}^n$, tedy například
$$\det \boldsymbol{J}_{\mathbf{\Phi}} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \end{pmatrix} \text{ v } \mathbb{R}^2.$$
  - Zapomenout na velikost jakobiánu v (1) je hrubá chyba...

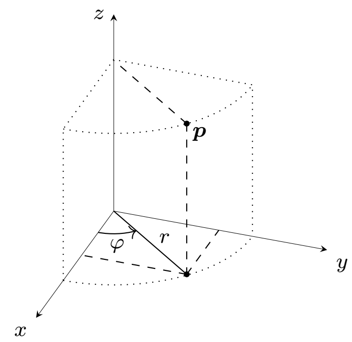
- Velmi důležitá substituce/transformace v $\mathbb{R}^2$ jsou tzv. **polární souřadnice**. V jejich nejzákladnější podobě mají tvar
$$x = r\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi.$$
  - Jejich geometrický význam je, že r měří vzdálenost od počátku a φ je orientovaný úhel, který svírá spojnice počátku a bodu (x, y) s kladnou částí osy x.



  - Jakobián polárních souřadnic je r.
    * Polární souřadnice v podobě výše odpovídají zobrazení
$$\Phi(r,\varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$$
a
$$\det J_\Phi = \det \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix} = r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r.$$
  - Při práci s polárními souřadnicemi se nám často mohou hodit různé goniometrické identity. Např.
$$1 = \sin^2\varphi + \cos^2\varphi$$
$$\sin(2\varphi) = 2\sin(\varphi)\cos(\varphi)$$
$$\cos(2\varphi) = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi$$
$$\cos^2\varphi = \frac{1+\cos(2\varphi)}{2}$$
$$\sin^2\varphi = \frac{1-\cos(2\varphi)}{2}$$

- Důležitá substituce/transformace v $\mathbb{R}^3$ jsou tzv. **válcové (cylindrické) souřadnice**.
  - V jejich nejzákladnější podobě mají tvar
$$x = r\cos\varphi,$$
$$y = r\sin\varphi,$$
$$z = z.$$

  * <u>Jejich geometrický význam</u> je, že r měří vzdálenost od osy z a φ je orientovaný úhel, který svírá spojnice průmětu bodu (x, y, z) do roviny xy a kladná část osy x.



  * <u>Jakobián válcových souřadnic</u> je r.
  * Platí $x^2 + y^2 = r^2$.
  * Válcové souřadnice ve formě výše odpovídají válci s osou souměrnosti z. Na ose z samozřejmě není nic magického, vhodnou permutací souřadnic dostaneme jiné osy souměrnosti. Např. má-li být osa souměrnosti osa y, tak můžeme použít

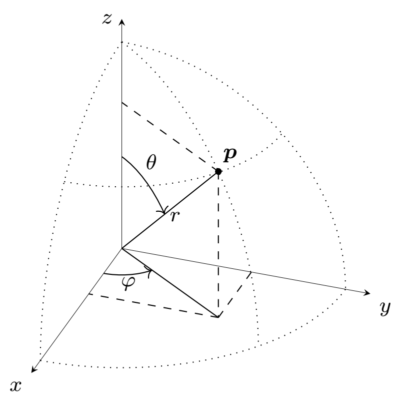
$$
\begin{aligned}
x &= r\cos\varphi,\\
y &= y,\\
z &= r\sin\varphi,
\end{aligned}
$$

a pak platí $x^2 + z^2 = r^2$.

- Další důležitá substituce/transformace v $\mathbb{R}^3$ jsou tzv. **sférické souřadnice**.
  - V jejich nejzákladnější podobě mají tvar

$$
\begin{aligned}
x &= r\sin\theta\cos\varphi,\\
y &= r\sin\theta\sin\varphi,\\
z &= r\cos\theta.
\end{aligned}
$$

  * <u>Jejich geometrický význam</u> je, že r měří vzdálenost od počátku, φ je orientovaný úhel, který svírá spojnice průmětu bodu (x, y, z) do roviny xy a kladná část osy x, a θ je orientovaný úhel, který svírá spojnice bodu (x, y, z) a kladná část osy z.



  * <u>Jakobián sférických souřadnic</u> je $r^2 \sin\theta$.
  * Aby byla transformace prostá (a tedy abychom neintegrovali přes nějakou část vícekrát), úhel θ se pohybuje pouze v intervalu $(0, \pi)$.

- Souřadnice **těžiště tělesa** P o hustotě $f(x,y,z)$ se spočtou jako
$$x_t = \frac{\iiint_P x f(x,y,z)}{m},$$
$$y_t = \frac{\iiint_P y f(x,y,z)}{m},$$
$$z_t = \frac{\iiint_P z f(x,y,z)}{m},$$
kde m je **hmotnost tělesa** P, tj.
$$m = \iiint_P f(x,y,z).$$
  - Těžiště rovinných obrazců se spočte zcela analogicky, „prostě umažeme jednu proměnou“.
- **Moment setrvačnosti** J tělesa P o hustotě $f(x,y,z)$ vzhledem k ose l se spočte jako
$$J = \iiint_P v^2(x,y,z) f(x,y,z),$$
kde $v(x,y,z)$ je vzdálenost bodu (x,y,z) od osy l.

Lebesgueův integrál

Zadání

1. Zaměňte pořadí integrace v následujících dvojnásobných integrálech:
   (a) $\int_0^4 \int_{3x^2}^{12x} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$;
   (b) $\int_{-1}^2 \int_0^{e^{-x}} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$.
2. Záměnou pořadí integrace vypočtěte
   (a) $\int_0^1 \int_{2x}^2 4e^{y^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$;
   (b) $\int_0^2 \int_{y^2}^4 \cos\sqrt{x^3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.
3. Vypočtěte $\int_M f$, jestliže
   (a) $f(x,y) = |y - \sin x|$, $M = [0,\pi] \times [0,1]$;
   (b) $f(x,y) = x\cos y$ a M je ohraničená křivkami $y = 0$, $y = x^2$, $x = 1$;
   (c) $f(x,y) = e^{-x-y}$, $M = (0,+\infty)^2$;
   (d) $f(x,y,z) = e^{\frac{z}{y}}$ a $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 0 \le y \le 1, y \le x \le 1, 0 \le z \le xy\}$;
   (e) $f(x,y,z) = y$ a M je množina v prvním oktantu ohraničená rovinami $x + y = 1$ a $y + z = 1$;
   (f) $f(x,y,z) = y$ a M je ohraničeno paraboloidem $y = 4x^2 + 4z^2$ a rovinou $y = 4$.
4. Zaměňte pořadí integrace v dvojnásobném integrálu

$$I = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{9-y^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

   Kromě toho vyjádřete I v polárních souřadnicích se středem v počátku (v obou pořadích).
5. Zaměňte pořadí integrace v součtu

$$I = \int_0^1 \int_{-x^2}^0 f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_1^2 \int_{-\sqrt{2x-x^2}}^0 f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

   Kromě toho vyjádřete I v polárních souřadnicích se středem v počátku, kde vnitřní integrace bude podle proměnné r.
6. Vhodnou substitucí vypočtěte $\int_M f$, jestliže
   (a) $f(x,y) = \frac{1}{x^2y^2}$ a M je ohraničena křivkami $y = x^2$, $y = 2x^2$, $x = y^2$ a $x = 3y^2$; (Nápověda: $u = \frac{y}{x^2}$ a $v = \frac{x}{y^2}$.)
   (b) $f(x,y) = (x+y)\cos(\pi(x-y))$ a M je ohraničena křivkami $x + y = 0$, $x = 1$ a $x = 1 + y$; (Nápověda: $u = x + y$ a $v = x - y$.)

(c) $f(x,y)=\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$ a $M=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1\right\}$, kde $a,b>0$;

(d) $f(x,y)=e^{-\sqrt{x^2+y^2}}$ a $M=\mathbb{R}^2$;

(e) $f(x,y)=\frac{x}{(x^2+y^2)^2}$ a $M=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2>1, x\ge |y|\}$;

(f) $f(x,y,z)=z$ a M je ohraničená plochami $z=x^2+y^2$ a $z=4$;

(g) $f(x,y,z)=xe^{x^2+y^2+z^2}$ a M je průnik prvního oktantu s koulí, jejíž střed je v počátku a poloměr je 1;

7. Nalezněte obsah plochy ohraničené křivkami

(a) $y=\sin x$ a $y=\cos x$, kde $x\in[\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}]$;

(b) $2x-3y=0$, $x+y=5$ a $y=0$;

(c) $y=\frac{1}{2}(x+2)^2$, $x=y-\frac{y^3}{4}$, $x=-2$ a $y=-2$.

8. Nalezněte hmotný střed homogenní rovinné desky M ohraničené křivkami $y=x^2$ a $x+y=2$.

9. Nalezněte objem množiny M, jestliže

(a) M je ohraničená plochami $y=x^2+z^2$ a $y=8-x^2-z^2$;

(b) M je ohraničená plochami $y=x^2$, $z=0$ a $y+z=1$.

10. Nalezněte hmotný střed tělesa M, jestliže

(a) M je ohraničené plochami $x=0, y=0, z=0, x+y+z=1$ a hustota je $\varrho(x,y,z)=y$;

(b) M je průnik koule o středu 0 a poloměru $R>0$ s poloprostorem $z\ge 0$ a hustota je $\varrho(x,y,z)=k>0$.

11. Uvažme těleso $M=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, \sqrt{x^2+y^2}\le z\le 1\right\}$ s hustotou $\varrho(x,y,z)=z$. Nalezněte $a>0$ tak, aby rovina $z=a$ rozdělila těleso M na dvě stejně těžké části.

12. Nalezněte moment setrvačnosti homogenního tělesa M o hmotnosti m vzhledem k ose p, jestliže

(a) p je osa x a $M=[0,4]\times[0,2]\times[0,1]$;

(b) p je osa z a $M=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, \sqrt{x^2+y^2}\le z\le h\right\}$, kde $h>0$;

(c) p je osa z a $M=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2\le a^2, 0\le z\le h\}$, kde $a,h>0$;

(d) p je osa z a $M=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2\le a^2\}$, kde $a>0$.

Výsledky

1. (a) $\int_0^{48} \int_{\frac{y}{12}}^{\sqrt{\frac{y}{3}}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$;

   (b) $\int_0^{e^{-2}} \int_{-1}^{2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int_{e^{-2}}^{e} \int_{-1}^{-\ln y} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

2. (a) $e^4 - 1$;

   (b) $\frac{2}{3}\sin 8$.

3. (a) $\pi - 2$;

   (b) $\frac{1}{2}(1-\cos 1)$;

   (c) 1;

   (d) $\frac{e}{2} - \frac{7}{6}$;

   (e) $\frac{1}{12}$;

   (f) $\frac{16}{3}\pi$.

4.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\sqrt{2}} \int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_{2\sqrt{2}}^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\operatorname{arctg}\frac{1}{2\sqrt{2}}} \int_0^3 f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi + \int_{\operatorname{arctg}\frac{1}{2\sqrt{2}}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{1}{\sin\varphi}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi \\ &= \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r + \int_1^3 \int_0^{\arcsin\frac{1}{r}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r. \end{aligned}$$

5.

$$I = \int_{-1}^{0} \int_{\sqrt{-y}}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \int_{-\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}}^{2\cos\varphi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi.$$

6. (a) $\frac{2}{3}$;

   (b) $-\frac{1}{2\pi^2}$;

   (c) $\frac{2}{3}\pi ab$

   (d) 2π.

   (e) $\sqrt{2}$.

   (f) $\frac{64}{3}\pi$;

   (g) $\frac{\pi}{8}$;

7. (a) $2\sqrt{2}$;

   (b) 5;

   (c) $\frac{16}{3}$.

8. $\left(-\frac{1}{2}, \frac{8}{5}\right)$.

9. (a) 16π;
   (b) $\frac{8}{15}$.
10. (a) $\left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right)$;
    (b) $\left(0, 0, \frac{3}{8}R\right)$.
11. $a = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$.
12. (a) $I_x = \frac{5}{3}m$;
    (b) $I_z = \frac{3mh^2}{10}$;
    (c) $I_z = \frac{ma^2}{2}$;
    (d) $I_z = \frac{2ma^2}{5}$.