

## Cvičení 8

**Úloha 1.** Vyjádřete integrál  $\iint_M f$  v polárních souřadnicích v pořadí  $dr d\varphi$ , kde  $M$  je vnitřek trojúhelníka s vrcholy  $(1, 0)$ ,  $(2, 0)$ ,  $(1, 1)$ .

**Úloha 2.** Přepište integrál

$$\int_1^2 \int_1^{\sqrt{5-x^2}} f dy dx$$

nejprve v opačném pořadí integrace a pak ho také zapište v polárních souřadnicích v pořadí  $dr d\varphi$ .

**Úloha 3.** Pomocí polárních souřadnic spočtete

$$\int_0^1 \int_x^{\sqrt{2-x^2}} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} dy dx.$$

**Úloha 4.** Pomocí polárních souřadnic nalezněte obsah plochy ohraničené křivkami

$$x^2 + y^2 = 2x, \quad x^2 + y^2 = 4x, \quad y = x, \quad y = 0.$$

**Úloha 5.** Pomocí vhodně modifikovaných polárních souřadnic spočtete integrál

$$\iint_M \sqrt{1 - \left( \frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+1)^2}{9} \right)},$$

kde  $M$  je oblast daná nerovností

$$\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+1)^2}{9} \leq 1.$$

[Nezapomeňte, že je potřeba přepočítat jakobián.]

Dále řešte úlohy ze zadání Lebesgueův integrál (viz Moodle nebo též třetí strana tohoto dokumentu).

**Domácí úkol:** Úloha 2 (bez převodu na polární souřadnice).

## Věta o substituci pro dvojný integrál a polární souřadnice

- **Věta o substituci pro dvojný integrál** má formálně tvar

$$\int_{\Phi(M)} f(\mathbf{y}) d\lambda_n(\mathbf{y}) = \int_M f(\Phi(\mathbf{x})) |\det \mathbf{J}_\Phi(\mathbf{x})| d\lambda_n(\mathbf{x}), \quad (1)$$

kde  $\det \mathbf{J}_\Phi$  je tzv. **jakobián** transformace  $\Phi: M \rightarrow \mathbb{R}^2$ , tj.

$$\det \mathbf{J}_\Phi = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

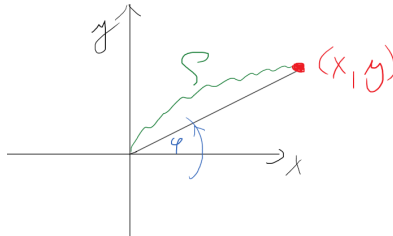
– Zapomenout na velikost jakobiánu v **(1)** je hrubá chyba...

- Velmi důležitá substituce/transformace v  $\mathbb{R}^2$  jsou tzv. **polární souřadnice**. V jejich nejjzákladnější podobě mají tvar

$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi.$$

– Jejich geometrický význam je, že  $r$  měří vzdálenost od počátku a  $\varphi$  je orientovaný úhel, který svírá spojnice počátku a bodu  $(x, y)$  s kladnou částí osy  $x$ .



– Jakobián polárních souřadnic je  $r$ .

\* Polární souřadnice v podobě výše odpovídají zobrazení

$$\Phi(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix}$$

a

$$\det J_\Phi = \det \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix} = r \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi = r.$$

– Při práci s polárními souřadnicemi se nám často mohou hodit různé goniometrické identity. Např.

$$1 = \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi$$

$$\sin(2\varphi) = 2 \sin(\varphi) \cos(\varphi)$$

$$\cos(2\varphi) = \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi$$

$$\cos^2 \varphi = \frac{1 + \cos(2\varphi)}{2}$$

$$\sin^2 \varphi = \frac{1 - \cos(2\varphi)}{2}$$

# Lebesgueův integrál

## Zadání

1. Zaměňte pořadí integrace v následujících dvojnásobných integrálech:

(a)  $\int_0^4 \int_{3x^2}^{12x} f(x, y) \, dy \, dx;$

(b)  $\int_{-1}^2 \int_0^{e^{-x}} f(x, y) \, dy \, dx.$

2. Záměnou pořadí integrace vypočtete

(a)  $\int_0^1 \int_{2x}^2 4e^{y^2} \, dy \, dx;$

(b)  $\int_0^2 \int_{y^2}^4 \cos \sqrt{x^3} \, dx \, dy.$

3. Vypočtete  $\int_M f$ , jestliže

(a)  $f(x, y) = |y - \sin x|$ ,  $M = [0, \pi] \times [0, 1];$

(b)  $f(x, y) = x \cos y$  a  $M$  je ohraničená křivkami  $y = 0$ ,  $y = x^2$ ,  $x = 1$ ;

(c)  $f(x, y) = e^{-x-y}$ ,  $M = (0, +\infty)^2;$

(d)  $f(x, y, z) = e^{\frac{z}{y}}$  a  $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq y \leq 1, y \leq x \leq 1, 0 \leq z \leq xy\};$

(e)  $f(x, y, z) = y$  a  $M$  je množina v prvním oktantu ohraničená rovinami  $x + y = 1$  a  $y + z = 1$ ;

(f)  $f(x, y, z) = y$  a  $M$  je ohraničeno paraboloidem  $y = 4x^2 + 4z^2$  a rovinou  $y = 4$ .

4. Zaměňte pořadí integrace v dvojnásobném integrálu

$$I = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{9-y^2}} f(x, y) \, dx \, dy.$$

Kromě toho vyjádřete  $I$  v polárních souřadnicích se středem v počátku (v obou pořadích).

5. Zaměňte pořadí integrace v součtu

$$I = \int_0^1 \int_{-x^2}^0 f(x, y) \, dy \, dx + \int_1^2 \int_{-\sqrt{2x-x^2}}^0 f(x, y) \, dy \, dx.$$

Kromě toho vyjádřete  $I$  v polárních souřadnicích se středem v počátku, kde vnitřní integrace bude podle proměnné  $r$ .

6. Vhodnou substitucí vypočtete  $\int_M f$ , jestliže

(a)  $f(x, y) = \frac{1}{x^2 y^2}$  a  $M$  je ohraničena křivkami  $y = x^2$ ,  $y = 2x^2$ ,  $x = y^2$  a  $x = 3y^2$ ; (Nápověda:  $u = \frac{y}{x^2}$  a  $v = \frac{x}{y^2}$ .)

(b)  $f(x, y) = (x + y) \cos(\pi(x - y))$  a  $M$  je ohraničena křivkami  $x + y = 0$ ,  $x = 1$  a  $x = 1 + y$ ; (Nápověda:  $u = x + y$  a  $v = x - y$ .)

- (c)  $f(x, y) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$  a  $M = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$ , kde  $a, b > 0$ ;
- (d)  $f(x, y) = e^{-\sqrt{x^2+y^2}}$  a  $M = \mathbb{R}^2$ ;
- (e)  $f(x, y) = \frac{x}{(x^2+y^2)^2}$  a  $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 > 1, x \geq |y|\}$ ;
- (f)  $f(x, y, z) = z$  a  $M$  je ohraničená plochami  $z = x^2 + y^2$  a  $z = 4$ ;
- (g)  $f(x, y, z) = xe^{x^2+y^2+z^2}$  a  $M$  je průnik prvního oktantu s koulí, jejíž střed je v počátku a poloměr je 1;
7. Nalezněte obsah plochy ohraničené křivkami
- (a)  $y = \sin x$  a  $y = \cos x$ , kde  $x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$ ;
- (b)  $2x - 3y = 0$ ,  $x + y = 5$  a  $y = 0$ ;
- (c)  $y = \frac{1}{2}(x + 2)^2$ ,  $x = y - \frac{y^3}{4}$ ,  $x = -2$  a  $y = -2$ .
8. Nalezněte hmotný střed homogenní rovinné desky  $M$  ohraničené křivkami  $y = x^2$  a  $x + y = 2$ .
9. Nalezněte objem množiny  $M$ , jestliže
- (a)  $M$  je ohraničená plochami  $y = x^2 + z^2$  a  $y = 8 - x^2 - z^2$ ;
- (b)  $M$  je ohraničená plochami  $y = x^2$ ,  $z = 0$  a  $y + z = 1$ .
10. Nalezněte hmotný střed tělesa  $M$ , jestliže
- (a)  $M$  je ohraničené plochami  $x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z = 1$  a hustota je  $\rho(x, y, z) = y$ ;
- (b)  $M$  je průnik koule o středu 0 a poloměru  $R > 0$  s poloprostorem  $z \geq 0$  a hustota je  $\rho(x, y, z) = k > 0$ .
11. Uvažme těleso  $M = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1 \right\}$  s hustotou  $\rho(x, y, z) = z$ . Nalezněte  $a > 0$  tak, aby rovina  $z = a$  rozdělila těleso  $M$  na dvě stejně těžké části.
12. Nalezněte moment setrvačnosti homogenního tělesa  $M$  o hmotnosti  $m$  vzhledem k ose  $p$ , jestliže
- (a)  $p$  je osa  $x$  a  $M = [0, 4] \times [0, 2] \times [0, 1]$ ;
- (b)  $p$  je osa  $z$  a  $M = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq h \right\}$ , kde  $h > 0$ ;
- (c)  $p$  je osa  $z$  a  $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq a^2, 0 \leq z \leq h\}$ , kde  $a, h > 0$ ;
- (d)  $p$  je osa  $z$  a  $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2\}$ , kde  $a > 0$ .

## Výsledky

1. (a)  $\int_0^{48} \int_{\frac{y}{12}}^{\sqrt{\frac{y}{3}}} f(x, y) \, dx \, dy;$   
(b)  $\int_0^{e^{-2}} \int_{-1}^2 f(x, y) \, dx \, dy + \int_{e^{-2}}^e \int_{-1}^{-\ln y} f(x, y) \, dx \, dy.$

2. (a)  $e^4 - 1;$

(b)  $\frac{2}{3} \sin 8.$

3. (a)  $\pi - 2;$

(b)  $\frac{1}{2} (1 - \cos 1);$

(c)  $1;$

(d)  $\frac{e}{2} - \frac{7}{6};$

(e)  $\frac{1}{12};$

(f)  $\frac{16}{3} \pi.$

4.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\sqrt{2}} \int_0^1 f(x, y) \, dy \, dx + \int_{2\sqrt{2}}^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} f(x, y) \, dy \, dx \\ &= \int_0^{\operatorname{arctg} \frac{1}{2\sqrt{2}}} \int_0^3 f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r \, dr \, d\varphi + \int_{\operatorname{arctg} \frac{1}{2\sqrt{2}}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{1}{\sin \varphi}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r \, dr \, d\varphi \\ &= \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r \, d\varphi \, dr + \int_1^3 \int_0^{\arcsin \frac{1}{r}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r \, d\varphi \, dr. \end{aligned}$$

5.

$$I = \int_{-1}^0 \int_{\sqrt{-y}}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x, y) \, dx \, dy = \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \int_{-\frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi}}^{2 \cos \varphi} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r \, dr \, d\varphi.$$

6. (a)  $\frac{2}{3};$

(b)  $-\frac{1}{2\pi^2};$

(c)  $\frac{2}{3} \pi ab$

(d)  $2\pi.$

(e)  $\sqrt{2}.$

(f)  $\frac{64}{3} \pi;$

(g)  $\frac{\pi}{8};$

7. (a)  $2\sqrt{2};$

(b)  $5;$

(c)  $\frac{16}{3}.$

8.  $(-\frac{1}{2}, \frac{8}{5}).$

9. (a)  $16\pi$ ;  
(b)  $\frac{8}{15}$ .
10. (a)  $(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5})$ ;  
(b)  $(0, 0, \frac{3}{8}R)$ .
11.  $a = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$ .
12. (a)  $I_x = \frac{5}{3}m$ ;  
(b)  $I_z = \frac{3mh^2}{10}$ ;  
(c)  $I_z = \frac{ma^2}{2}$ ;  
(d)  $I_z = \frac{2ma^2}{5}$ .