Cvičení 5

Úloha 1. *Spočtěte parciální derivace funkce h v bodě $\mathbf{a}$.*

(a) $h(x_1,x_2) = g(f_1(x_1,x_2), f_2(x_1,x_2))$, $a = (1,0)$, *kde*
$f_1(x_1,x_2) = x_1x_2$, $f_2(x_1,x_2) = 2x_1 + x_2$, $g(y_1,y_2) = y_1^2y_2 + y_1y_2^2 + e^{y_2}$.

(b) $h(x,y) = f(u(x,y), v(x,y))$, $\mathbf{a} = (1,0)$, *kde*
$u(x,y) = x\cos y - 1$, $v(x,y) = y\sin x$,
$\mathrm{d} f(0,0)$ *existuje a* $\nabla f(0,0) = (2,7)$

(c) $h(x,y) = g(x^2 - y^2, e^{xy}, \sin x + \cos y)$, $\mathbf{a} = (0,0)$, *kde*
$\mathrm{d} g(0,1,1)$ *existuje a* $\nabla g(0,1,1) = (3,-2,1)$.

(d) $h(r,\phi) = g(f_1(r,\phi), f_2(r,\phi))$, $\mathbf{a} = (r,\phi) \in \mathbb{R}^2$, *kde*
$f_1(r,\phi) = r\cos\phi$, $f_2(r,\phi) = r\sin\phi$, $g(x,y) = x^2 + y^2$

Úloha 2. *Mějme zobrazení* $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ *taková, že*

$$f(x,y,z) = (x^2 + e^y + z, \sin x + z^2), \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,$$

difereniál $\mathrm{d}\, g(1,0)$ *existuje a je reprezentován maticí*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Ukažte existenci diferenciálu $\mathrm{d}(g \circ f)(0,0,0)$ *a spočtěte jeho reprezentující matici.*

Úloha 3. *Buď* $f = (f_1, f_2)\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *zobrazení definované předpisem*

$$f(x,y,z) = ((x+1)(y+1)^2(z+1)^3, \sin x \cos(y + 2z)), \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

Zobrazení $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *má v bodě* $(1,0)$ *diferenciál reprezentovaný maticí*

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Ukažte existenci diferenciálu $\mathrm{d}(g \circ f)(0,0,0)$ *a spočtěte jeho reprezentující matici.*

(b) Spočtěte $\nabla_{(2,0,1)} f_1(0,0,0)$, *tzn. derivaci funkce* f_1 *v bodě* $(0,0,0)$ *podle vektoru* $(2,0,1)$.

Dále řeště úlohy ze zadání Diferenciál (viz Moodle nebo též třetí strana tohoto dokumentu).

Domácí úkol: Úloha 1(b).

Připomenutí

Diferenciál

- Ať $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ a a je vnitřní bod množiny D. Lineární zobrazení L se nazývá diferenciál funkce f v bodě $\mathbf{a}$, jestliže
$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) - L(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|} = 0.$$
Diferenciál funkce f v bodě $\mathbf{a}$ budeme označovat symbolem $\mathrm{d}\, f(\mathbf{a})$ a jeho hodnotu v bodě $\mathbf{h}$ budeme označovat jako $\mathrm{d}\, f(\mathbf{a})(\mathbf{h})$.
- Jestliže $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ má všechny parciální derivace (1. řádu) v bodě $\mathbf{a}$, potom vektor
$$\nabla f(\mathbf{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a})\right)$$
se nazývá gradient funkce f v bodě $\mathbf{a}$.
- Jestliže složky $f_1, ..., f_m$ vektorové funkce $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mají v bodě $\mathbf{a}$ všechny parciální derivace (1. řádu), potom matice $m \times n$
$$J_f(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} \nabla f_1(\mathbf{a}) \\ \cdots \\ \nabla f_m(\mathbf{a}) \end{pmatrix}.$$
se nazývá Jacobiho matice funkce f v bodě $\mathbf{a}$.
- Pokud diferenciál existuje, je reprezentován gradientem, respektive Jacobiho maticí: $\mathrm{d}\, f(\mathbf{a})(\mathbf{h}) = J_f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{h}$.
- Jestliže vektorová funkce f je diferencovatelná v $\mathbf{a}$, pak je v $\mathbf{a}$ spojitá.
- Jestliže vektorová funkce f má na okolí bodu $\mathbf{a}$ spojité všechny parciální derivace (1. řádu), pak je v bodě $\mathbf{a}$ diferencovatelná.
- $\nabla f(\mathbf{a})$ je směr největšího růstu a $-\nabla f(\mathbf{a})$ je směr nějvětšího poklesu

Tečná nadrovna

- Tečná nadrovina ke grafu funkce v bodě $(\mathbf{a}, f(\mathbf{a}))$ je graf afinní funkce
$$g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + \nabla f(\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a}) = f(\mathbf{a}) + \mathrm{d}\, f(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a}).$$
- Je-li $\mathbf{x}$ blízko bodu $\mathbf{a}$, pak můžeme psát
$$f(\mathbf{x}) \approx f(\mathbf{a}) + \nabla f(\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a}).$$

Řetízkové pravidlo

- Ať $f : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ je diferencovatelná v bodě $\mathbf{b}$ a $g : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je diferencovatelná v bodě $\mathbf{a}$. Jestliže $g(\mathbf{a}) = \mathbf{b}$ a $h = f \circ g$, potom pro každé $i \in 1, ..., n$ je
$$\frac{\partial h}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = \nabla f(\mathbf{b}) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial y_j}(\mathbf{b}) \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(\mathbf{a}).$$

Diferenciál

Zadání

1. Je dána funkce
$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3y}{x^6+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$
Ukažte, že $\nabla_{\boldsymbol{v}} f(0,0)=0$ pro všechna $\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^2$ (tj. směrová derivace je dána lineárním zobrazením), ale f není v $(0,0)$ spojitá (a odtud nemá v $(0,0)$ diferenciál).

2. Nalezněte diferenciál funkce $f(x,y)=x^2-2y^3$ v bodě $\boldsymbol{a}=(2,1)$. Dále určete $\nabla_{\boldsymbol{v}} f(\boldsymbol{a})$, jestliže $\boldsymbol{v}=(3,2)$.

3. Je dána funkce $f(x,y)=x^2-3xy+4y$. Nalezněte všechny jednotkové vektory $\boldsymbol{v}$ tak, aby
   (a) $\nabla_{\boldsymbol{v}} f(1,1)=-1$;
   (b) $\nabla_{\boldsymbol{v}} f(1,1)=\sqrt{2}$.

4. Je dána funkce $f(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}$. Nalezněte všechny jednotkové vektory $\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^2$ tak, aby
   (a) $\boldsymbol{v}$ udával směr největšího růstu funkce f v bodě $(1,2)$;
   (b) $\boldsymbol{v}$ udával směr největšího poklesu funkce f v bodě $(1,2)$;
   (c) $\nabla_{\boldsymbol{v}} f(1,2)=0$.

5. Je dána funkce $f(x,y)=(x^2+2y^2)^{xy}$. Nalezněte všechny jednotkové vektory $\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^2$ tak, aby
   (a) $\boldsymbol{v}$ udával směr největšího růstu funkce f v bodě $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2}\right)$;
   (b) $\boldsymbol{v}$ udával směr největšího poklesu funkce f v bodě $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2}\right)$.

6. Nalezněte Jacobiho matici a diferenciál vektorové funkce $\boldsymbol{f}$ v bodě $\boldsymbol{a}$, jestliže
   (a) $\boldsymbol{f}(x,y,z)=(xyz,x^2z)$, $\boldsymbol{a}=(1,-2,1)$;
   (b) $\boldsymbol{f}(x,y)=(ye^x,x^3-y,2x+1)$, $\boldsymbol{a}=(0,1)$.

7. Určete Jacobiho matici vektorové funkce $\boldsymbol{f}(x,y)=(x+y,x^2y)$ v obecném bodě $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ a určete, v kterých bodech má tato matice nulový determinant.

8. Nalezněte rovnici tečné roviny ke grafu funkce f v bodě $\boldsymbol{a}$, jestliže
   (a) $f(x,y)=2x^2+y^2-5y$, $\boldsymbol{a}=(1,2,-4)$;
   (b) $f(x,y)=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$, $\boldsymbol{a}=(1,1,\frac{\pi}{4})$;
   (c) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$, $\boldsymbol{a}=(3,4,5)$.

9. Nalezněte všechny body v grafu funkce f, ve kterých je tečná rovina rovnoběžná s rovinou $z = 0$, jestliže
   (a) $f(x, y) = x^2y + xy^2 - x$;
   (b) $f(x, y) = xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$.
10. Pomocí diferenciálu nalezněte přibližně hodnotu $1{,}02^{3{,}01}$.
11. Dva rezistory o odporech $R_1 = 10\,\Omega$ a $R_2 = 15\,\Omega$ jsou zapojeny paralelně. Využijte diferenciál k aproximaci celkového odporu paralelního zapojení těchto rezistorů, jestliže z důvodů teploty odpor R_1 vzrostl o $\frac{1}{5}\,\Omega$ a R_2 o $\frac{4}{5}\,\Omega$.
12. Pomocí diferenciálu nalezněte aproximaci délky uhlopříčky v obdélníku, jehož strany mají délky $30{,}3\,\text{cm}$ a $39{,}9\,\text{cm}$.
13. Předpokládejte, že $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a $\boldsymbol{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ jsou diferencovatelné, $\boldsymbol{g}(0) = (1, 3), \boldsymbol{g}'(0) = (-2, 2)$ a $\nabla f(1, 3) = (5, -2)$. Nalezněte $h'(0)$, kde $h(t) = f(\boldsymbol{g}(t))$.
14. Je dána diferencovatelná funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a $h(u, v) = f(\boldsymbol{g}(u, v))$. Vypočtěte
   (a) $\frac{\partial h}{\partial u}(0, 0)$ a $\frac{\partial h}{\partial v}(0, 0)$, víte-li, že $\boldsymbol{g}(u, v) = (e^u + \sin v, e^u + \cos v)$ a $\nabla f(1, 2) = (2, -3)$;
   (b) $\frac{\partial h}{\partial u}(1, -1)$ a $\frac{\partial h}{\partial v}(1, -1)$, víte-li, že $\boldsymbol{g}(u, v) = (u^2 + 2uv^2 - v^3, v^2 - 3u)$ a $\nabla f(4, -2) = (2, 1)$;
   (c) $\frac{\partial f}{\partial x}(2, 3)$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(2, 3)$, víte-li, že $\boldsymbol{g}(u, v) = \left(u + u \ln v, \frac{u+v}{u-1}\right)$ a $\nabla h(2, 1) = (3, 1)$.
15. Pomocí věty o derivaci složeného zobrazení vypočtěte $g'(t)$, jestliže $g(t)$ vznikne z $f(x, y) = \frac{x-y}{x+2y}$ tak, že položíme $x = e^t$ a $y = e^{-t}$.
16. Pomocí věty o derivaci složeného zobrazení vypočtěte $\frac{\partial g}{\partial u}(u, v)$ a $\frac{\partial g}{\partial v}(u, v)$, jestliže $g(u, v)$ vznikne z $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ tak, že položíme $x = u \sin v$, $y = u \cos v$ a $z = u^2 v$.
17. Ukažte, že je-li $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spojitě diferencovatelná funkce, pak $g(x, y) = f(x^2 + y^2)$ vyhovuje rovnici $y\frac{\partial g}{\partial x} - x\frac{\partial g}{\partial y} = 0$.
18. Ať funkce $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ má spojité všechny parciální derivace do druhého řádu včetně a $\boldsymbol{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ je vektorová funkce, jejíž druhá derivace $\boldsymbol{x}''$ je spojitá. Prvních n proměnných funkce L označme $u_1, \ldots, u_n$ a zbylých n proměnných pak $v_1, \ldots, v_n$. Předpokládejte, že
$$\left(\frac{\partial L}{\partial v_i}\left(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{x}'(t)\right)\right)' - \frac{\partial L}{\partial u_i}\left(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{x}'(t)\right) = 0$$
pro každé $i = 1, \ldots, n$. Ukažte, že funkce
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial v_i}\left(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{x}'(t)\right) x_i'(t) - L\left(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{x}'(t)\right)$$
je konstantní.

Výsledky

2. $\mathrm{d}f(\boldsymbol{a})\,(h,k) = 4h - 6k$, $\nabla_{\boldsymbol{v}} f(\boldsymbol{a}) = 0$.

3. (a) $(1,0)$, $(0,-1)$;
   (b) $\frac{\sqrt{2}}{2}(-1,1)$.

4. (a) $\frac{1}{5}(3,-4)$;
   (b) $\frac{1}{5}(-3,4)$;
   (c) $\frac{1}{5}(3,4)$, $-\frac{1}{5}(3,4)$.

5. (a) $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$;
   (b) $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$.

6. (a) $\boldsymbol{J_f}(\boldsymbol{a}) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathrm{d}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})\,(h,k,l) = (-2h + k - 2l, 2h + l)$;
   (b) $\boldsymbol{J_f}(\boldsymbol{a}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathrm{d}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})\,(h,k) = (h+k, -k, 2h)$.

7. $\boldsymbol{J_f}(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2xy & x^2 \end{pmatrix}$ a $\det \boldsymbol{J_f}(x,y) = 0$ právě tehdy, když $x = 0$ nebo $x = 2y$.

8. (a) $z = 4x - y - 6$;
   (b) $z = -\frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{\pi}{4}$;
   (c) $z = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y$.

9. (a) $(0,-1,0)$ a $(0,1,0)$;
   (b) $(1,1,3)$.

10. $1{,}02^{3{,}01} \approx 1{,}06$.

11. Přibližně $6{,}2\,\Omega$.

12. Přibližně $50{,}1\,\mathrm{cm}$.

13. -14.

14. (a) $\frac{\partial h}{\partial u}(0,0) = -1$ a $\frac{\partial h}{\partial v}(0,0) = 2$;
    (b) $\frac{\partial h}{\partial u}(1,-1) = 5$ a $\frac{\partial h}{\partial v}(1,-1) = -16$;
    (c) $\frac{\partial f}{\partial x}(2,3) = 1$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(2,3) = -1$.

15. $g'(t) = \frac{6}{(e^t + 2e^{-t})^2}$.

16. $\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = 2u\,(1 + 2u^2v^2)$, $\frac{\partial g}{\partial v}(u,v) = 2u^4v$;