Cvičení 3

Úloha 1. *Spočtěte následující limity, pokud existují:*

(a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$

(b) $\lim\limits_{(x,y)\to(4,0)} \frac{\mathrm{tg}(xy)}{y}$

(c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+xy+y^2}{x^2-y^2}$

(d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y}{x^6+y^2}$

(e) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)^{x^2y^2}$

Úloha 2. *Určete, zda jsou následující funkce spojité:*

(a) $f(x.y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(b) $f(x.y) = \begin{cases} \frac{x\sin(x)}{y}, & y \neq 0 \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Dále řeště úlohy ze zadání Limita a spojitost (viz Moodle nebo též třetí strana tohoto dokumentu).

Domácí úkol: Úloha 1(d).

Připomenutí

Limita funkce

- Nechť $D \subset \mathbb{R}^n$, $\mathbf{a}$ je hromadný bod množiny $M \subset D$ a $f : D \to \mathbb{R}^m$ je vektorová funkce. Řekneme, že $L \in \mathbb{R}^m$ je limita f v bodě $\mathbf{a}$ vzhledem k M, jestliže pro každou posloupnost $(\mathbf{x}_k)$ bodů v $M \setminus \{\mathbf{a}\}$ konvergující k $\mathbf{a}$ platí $f(\mathbf{x}_k) \to L$ pro $k \to \infty$. Pokud L je limita f v bodě $\mathbf{a}$ vzhledem k M, pak píšeme
$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a},\, \mathbf{x}\in M} f(\mathbf{x}) = L.$$
- Tomuto je ekvivalentní (Heineova věta): Pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro každé $\mathbf{x} \in P(\mathbf{a}; \delta) \cap M$ je $f(\mathbf{x}) \in U(L; \varepsilon)$.
- Dále je ekvivalntní, že pro každou množinu $N \subset M$ takovou, že $\mathbf{a}$ je její hromadný bod, platí
$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a},\, \mathbf{x}\in N} f(\mathbf{x}) = L.$$
- Pro limity funkcí více proměnných platí jednoznačnost, sčítání, násobení, podíl, skládání, věta o dvou strážnících / limitě sevřené funkce / sendvič lemma, a podobně, jak jsme zvyklí z jedné proměnné.
- Metoda: buď ukažte, že limita existuje (sedvič / složená funkce / spojitost / převod na jiné souřadnice), nebo najděte spor s jednoznačností limity (závislost na křivce, po které se přibližujeme)

Spojitost

- Spojitost se také zavádí pomocí posloupností.
- Následující tvrzení jsou ekvivalentní
  - f je spojitá v $\mathbf{a}$.
  - platí jedna z nasledujících podmínek:
    (i) $\mathbf{a}$ je izolovaný bod množiny D;
    (ii) $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a})$.
  - pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro každé $\mathbf{x} \in U(\mathbf{a}; \delta) \cap D$ platí $f(\mathbf{x}) \in U(f(\mathbf{a}); \varepsilon)$.
- Metoda: pro body, kde se funce skládá ze známých spojitých funkcí, pouze okomentovat, pro ostatní body počítat limity

Limita a spojitost

Zadání

1. Rozhodněte, zda uvedené limity existují a pokud ano, tak je vypočtěte.

   (a) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \frac{xy-y}{(x-1)^2+y^2}$;

   (b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$;

   (c) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{yz+xy}{x^2+y^2+z^2}$;

   (d) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xyz^2}{x^2+y^2+z^2}$;

   (e) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2\sin^2 y}{x^2+y^2}$;

   (f) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$.

2. Rozhodněte, zda je funkce f spojitá, jestliže

   (a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y+xy^2}{x^2-y^2}, & x^2 \neq y^2, \\ 0, & x^2 = y^2; \end{cases}$

   (b) $f(x,y) = \begin{cases} xe^{\frac{x}{y}}, & y \neq 0, \\ 0, & y = 0; \end{cases}$

   (c) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{xy}, & xy \neq 0, \\ 1, & xy = 0. \end{cases}$

3. Určete konstantu $k \in \mathbb{R}$ tak, aby funkce f byla spojitá, jestliže

   (a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x-y-1}{\sqrt{x-y}-1}, & x \geq y \text{ a } y \neq x-1, \\ k, & (x,y) = (2,1); \end{cases}$

   (b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sqrt{4+x^2+y^2}-2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ k, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$

4. Určete funkci g tak, aby funkce f byla spojitá, jestliže

   (a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y-xy^2}{x-y}, & x \neq y, \\ g(x), & x = y; \end{cases}$

   (b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{y}, & y \neq 0, \\ g(x), & y = 0. \end{cases}$

5. Ať $f(x,y) = d(x)d(y)$, kde $d : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je Dirichletova funkce (tj. $d(x) = 1$ pro $x \in \mathbb{Q}$ a $d(x) = 0$ pro $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$).

   (a) Ukažte, že f není spojitá v bodě $(1,1)$;

   (b) Ukažte, že $f\restriction_{\mathbb{Q}^2}$ je spojitá v bodě $(1,1)$.

Výsledky

1. (a) neexistuje;
   (b) 0;
   (c) neexistuje;
   (d) 0;
   (e) 0;
   (f) 2.
2. (a) není (v bodě $(0,0)$ limita neexistuje);
   (b) není (v bodě $(0,0)$ limita neexistuje);
   (c) je.
3. (a) 2;
   (b) $\frac{1}{4}$.
4. (a) x^2;
   (b) x.