Cvičení 10

Úloha 1. *Spočtěte délku křivky C, která má parametrizaci* $\boldsymbol{\varphi}(t) = (t^2, 9t, 4t^{\frac{3}{2}})$, $t \in [1,4]$.

Úloha 2. *Spočtěte křivkový integrál*

$$\int_C x + y \,\mathrm{d}s,$$

kde C je křivka, která se skládá ze tří částí C_1, C_2 a C_3. C_1 je spodní polokružnice se středem v počátku a poloměru 1. C_2 je úsečka spojující body $(1,0)$ a $(0,2)$. C_3 je čtvrtkružnice se středem v $(0,4)$ a poloměru 2, která prochází body $(0,2)$ a $(-2,4)$.

Úloha 3. *Spočtěte křivkový integrál*

$$\int_{(C,\boldsymbol{\tau})} (y, z^2, x) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s},$$

kde C je křivka, která je určena rovnostmi $x^2 + y^2 = 1$ a $x + z = 1$. Křivka C je kladně orientovaná při pohledu shora.

Úloha 4. *Na hmotný bod působí silové pole $\boldsymbol{F}(x,y,z) = (y^2, z, x)$. Jakou práci vykoná hmotný bod při pohybu po křivce dané rovnostmi $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ a $x = y$ při pohybu z bodu $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$ do bodu $(0,0,1)$?*

Úloha 5. *Spočtěte křivkový integrál*

$$\int_{(C,\boldsymbol{\tau})} (y, z, x) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s},$$

kde C je křivka ležící v poloprostoru $z \geq 0$, která je určena rovnostmi $x^2 + y^2 = z^2$ a $x^2 + y^2 = 2x$. Křivka C je kladně orientovaná při pohledu shora.

Úloha 6. *Pomocí Greenovy věty spočtěte křivkový integrál*

$$\int_{(C,\boldsymbol{\tau})} (2xy^3 + \sin^9 x, 4x^2y^2 + e^y) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s},$$

kde C je kladně orientovaná hranice rovinné oblasti M, která je omezená křivkami $y = 0$, $x = 1$ a $y = x^3$.

Úloha 7. *Pomocí Greenovy věty spočtěte obsah rovinné oblasti M, která je ohraničená křivkami $y = 5x-3$ a $y = x^2 + 1$.*

Dále řeště úlohy ze zadání Křivkový integrál (viz Moodle nebo též čtvrtá strana tohoto dokumentu).

Domácí úkol: Úloha 2 (na 11. cvičení bude předvedena pouze část)

Křivkový integrál skalární funkce

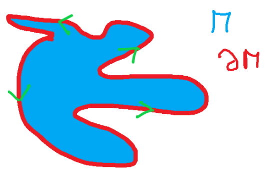
- **Křivkový integrál skalární funkce f podél křivky** C, která má parametrizaci $\boldsymbol{\varphi}(t)$, $t \in [a, b]$, se spočte jako
$$\int_C f \, \mathrm{d}s = \int_a^b f(\boldsymbol{\varphi}(t)) \|\boldsymbol{\varphi}'(t)\| \, \mathrm{d}t.$$
- Křivkový integrál skalární funkce podél křivky nezávisí ani na parametrizaci, ani na orientaci křivky (tj. v jakém směru křivku probíháme).
- Délka křivky C se spočte jako křivkový integrál jedničky ($f \equiv 1$), tj.
$$\text{délka } C = \int_C 1 \, \mathrm{d}s = \int_a^b \|\boldsymbol{\varphi}'(t)\| \, \mathrm{d}t.$$

Křivkový integrál vektorového pole

- **Křivkový integrál vektorového pole $\boldsymbol{F}$ podél orientované křivky** C, která má parametrizaci $\boldsymbol{\varphi}(t)$, $t \in [a, b]$, a orientaci $\boldsymbol{\tau}$, se spočte jako
$$\int_{(C,\boldsymbol{\tau})} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_a^b \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\varphi}(t)) \cdot \boldsymbol{\varphi}'(t) \, \mathrm{d}t,$$
kde $\cdot$ značí skalární součin v $\mathbb{R}^n$.
- Křivkový integrál vektorového pole podél křivky závisí na orientaci křivky (tj. v jakém směru křivku probíháme).
- Pokud najdeme opačnou parametrizaci (tj. křivku probíháme v opačném směru, než máme), tak není třeba zoufat, protože opačná orientace odpovídá opačnému znaménku u integrálu.
- Interpretace křivkového integrálu vektorového pole $\boldsymbol{F}$ podél křivky C je, že se jedná o práci, kterou vykoná hmotný bod při pohybu po křivce C, když na něj působí silové pole $\boldsymbol{F}$.

Greenova věta

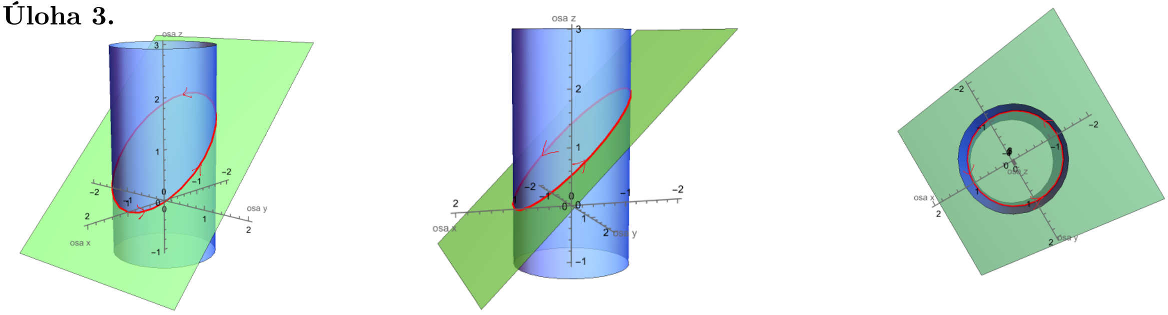
- Jednoduchá uzavřená křivka $C \subseteq \mathbb{R}^2$ se nazývá **Jordanova křivka**.
- Řekneme, že Jordanova křivka je **kladně orientovaná** (resp. **záporně orientovaná**), jestliže ji procházíme proti (resp. po) směru hodinových ručiček.
- Jordanova křivka rozdělí $\mathbb{R}^2$ na sjednocení omezené oblasti $\operatorname{Int} C$, křivky C a neomezené oblasti $\operatorname{Ext} C$, které nemají žádný společný prvek.
- **Greenova věta**
Ať $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ je oblast, $C \subseteq \Omega$ je kladně orientovaná Jordanova křivka taková, že $\operatorname{Int} C \subseteq \Omega$. Jestliže $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2)$ je vektorové pole třídy C^1 na Ω, potom
$$\int_{\operatorname{Int} C} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \mathrm{d}\lambda_2 = \int_C \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}.$$



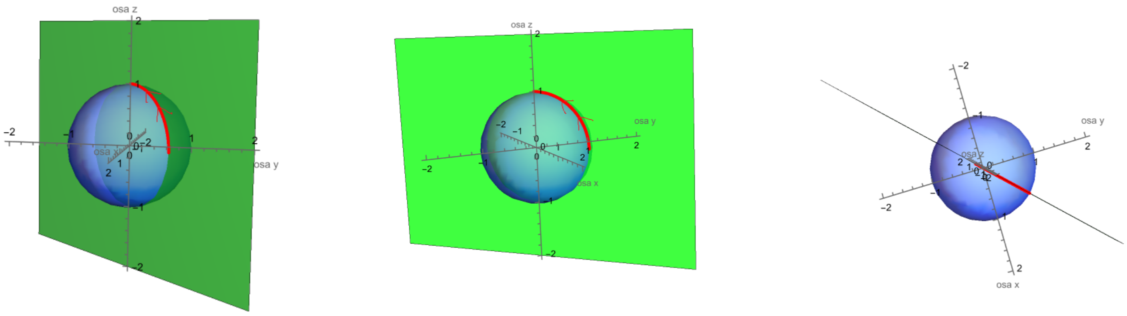
- Greenova věta se občas používá k výpočtu obsahu rovinných obrazců. Protože obsah $M = \int_M 1$, abychom mohli použít Greenovu větu, potřebujeme nějak (šikovně) zvolit rovinné vektorové pole $\boldsymbol{F}$, pro které platí $\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \equiv 1$. Základní volby (často úspěšné) jsou např. $\boldsymbol{F}(x, y) = (0, x)$, $\boldsymbol{F}(x, y) = (-y, 0)$ nebo $\boldsymbol{F}(x, y) = (-\frac{y}{2}, \frac{x}{2})$.

Ilustrace k úlohám

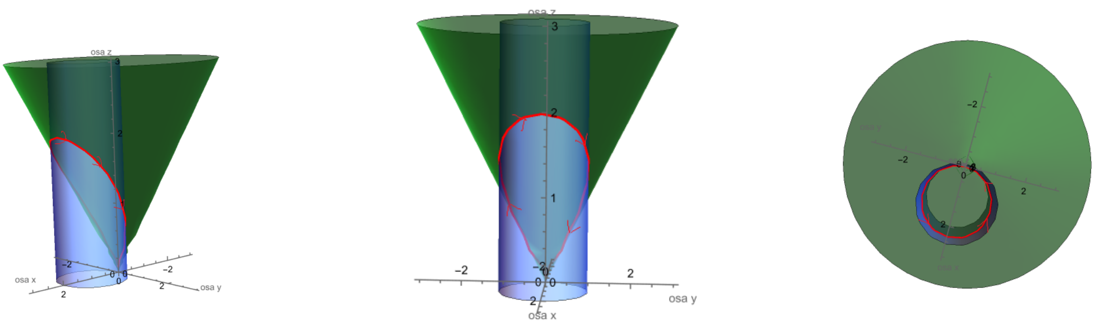
Úloha 3.



Úloha 4.



Úloha 5.



Křivkový integrál

Zadání

1. Nalezněte parametrizaci křivky, která vznikne
   (a) průnikem ploch $z = x^2$, $x + y + z = 1$ a poloprostoru $z \leq 1$;
   (b) průnikem válce $x^2 + y^2 = 16$ a roviny $z = x + y$.

2. Vypočtěte délku křivky C, jestliže
   (a) C má parametrizaci $\boldsymbol{\varphi}(t) = (t^2, 9t, 4t^{\frac{3}{2}})$, $t \in [1, 4]$;
   (b) C je asteroida $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$ (parametrizace asteroidy je $\boldsymbol{\varphi}(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$, $t \in [0, 2\pi]$);
   (c) C je graf funkce $f(x) = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2x}$, $x \in [\frac{1}{2}, 2]$.

3. Vypočtěte křivkový integrál z funkce f podél křivky C, jestliže
   (a) $f(x, y) = xy^4$, $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, x^2 + y^2 = 2\}$;
   (b) $f(x, y, z) = xe^{yz}$, C je úsečka s krajními body $(0, 0, 0)$ a $(1, 2, 3)$;
   (c) $f(x, y, z) = x - y + 2z$, C je spojení úsečky s krajními body $(0, 0, 0)$ a $(1, 1, 0)$ a úsečky s krajními body $(1, 1, 0)$ a $(1, 1, 1)$;
   (d) $f(x, y) = xy$, kde C je část elipsy $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, kde $a, b > 0$, která leží v prvním kvadrantu.

4. Vypočtěte křivkový integrál z vektorového pole $\boldsymbol{F}$ podél orientované křivky C, jestliže
   (a) $\boldsymbol{F}(x, y) = (x^2, 4y)$, C má parametrizaci $\boldsymbol{\varphi}(t) = (e^t, t^2)$, $t \in [0, 2]$;
   (b) $\boldsymbol{F}(x, y) = (e^x, 0)$, C je část křivky $x = y^3$, počáteční bod je $(-1, -1)$ a koncový bod je $(1, 1)$;
   (c) $\boldsymbol{F}(x, y) = (-y, -x)$, C je horní půlkružnice o středu $(0, 0)$ a poloměru 2, počáteční bod je $(2, 0)$ a koncový bod je $(-2, 0)$;
   (d) $\boldsymbol{F}(x, y, z) = (z^2, x^2, y^2)$, C je úsečka s počátečním bodem $(1, 0, 0)$ a koncovým bodem $(4, 1, 2)$.

5. Určete hmotnost pružiny, jejíž parametrizace je $\boldsymbol{\varphi}(t) = (2 \cos t, 2 \sin t, t)$, $t \in [0, 4\pi]$, jestliže její lineární hustota hmotnosti je $\varrho(x, y, z) = z$.

6. Uzavřená křivka $C \subseteq \mathbb{R}^3$ je dána rovnicemi $x^2 + y^2 = 4$ a $z = 0$. Jakou práci vykoná silové pole $\boldsymbol{F}(x, y, z) = (x^2, xy, 1)$ na částici, která (jednou) oběhne C tak, že prochází body $(2, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$ a $(-2, 0, 0)$ v uvedeném pořadí.

7. Nalezněte všechny hodnoty parametru $\alpha \in \mathbb{R}$ takové, aby vektorové pole $\boldsymbol{F}(x, y) = (\alpha xy + y^2, x^2 + 2xy)$ bylo potenciální.

8. Nalezněte funkci $g(x)$ tak, aby vektorové pole

$$\boldsymbol{F}(x,y) = (y\sin x + xy\cos x + e^y, g(x) + xe^y)$$

bylo potenciální a $g(0) = 0$.

9. Je dáno vektorové pole $\boldsymbol{F}(x,y) = (3 + 2xy^2, 2x^2y)$.
   (a) Rozhodněte, zda $\boldsymbol{F}$ je potenciální. Pokud ano, pak nalezněte potenciál f vektorového pole $\boldsymbol{F}$ splňující $f(0,0) = 0$.
   (b) Vypočtěte křivkový integrál vektorového pole $\boldsymbol{F}$ podél křivky C, která je částí hyperboly $y = \frac{1}{x}$ s počátečním bodem $(1,1)$ a koncovým bodem $(4, \frac{1}{4})$.

10. Je dáno vektorové pole $\boldsymbol{F}(x,y,z) = (2 - xy + z, x - z - 3, x^2 - y)$.
   (a) Rozhodněte, zda $\boldsymbol{F}$ je potenciální. Pokud ano, pak nalezněte potenciál f vektorového pole $\boldsymbol{F}$ splňující $f(0,0,0) = 0$.
   (b) Vypočtěte křivkový integrál vektorového pole $\boldsymbol{F}$ podél úsečky C s počátečním bodem $(1,0,-2)$ a koncovým bodem $(4,6,3)$.

11. Je dáno vektorové pole $\boldsymbol{F}(x,y,z) = (\sin y, x\cos y + \cos z, -y\sin z)$.
   (a) Rozhodněte, zda $\boldsymbol{F}$ je potenciální. Pokud ano, pak nalezněte potenciál f vektorového pole $\boldsymbol{F}$ splňující $f\left(1, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = 3$.
   (b) Vypočtěte křivkový integrál vektorového pole $\boldsymbol{F}$ podél křivky C s parametrizací $\boldsymbol{\varphi}(t) = (\sin t, t, 2t)$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

12. Pomocí Greenovy věty vypočtěte křivkový integrál z vektorového pole $\boldsymbol{F}$ podél orientované křivky C, jestliže
   (a) $\boldsymbol{F}(x,y) = (ye^x, 2e^x)$ a C je kladně orientovaná hranice obdélníka s vrcholy $(0,0)$, $(3,0)$, $(3,4)$, $(0,4)$;
   (b) $\boldsymbol{F}(x,y) = (y^3, -x^3)$ a C je kladně orientovaná kružnice $x^2 + y^2 = 4$;
   (c) $\boldsymbol{F}(x,y) = (e^{-x} + y^2, e^{-y} + x^2)$ a C je záporně orientovaná hranice množiny

$$M = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 \le y \le \cos x, x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \right\}.$$

13. Pomocí Greenovy věty vypočtěte obsah množiny M, jestliže
   (a) M je ohraničená křivkami $y = 5x - 3$, $y = x^2 + 1$;
   (b) M je ohraničená osou x a křivkou s parametrizací

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Výsledky

1. (a) $\boldsymbol{\varphi}(t) = (t, 1 - t - t^2, t^2)$, $t \in [-1, 1]$;
   (b) $\boldsymbol{\varphi}(t) = (4\cos t, 4\sin t, 4(\cos t + \sin t))$, $t \in [0, 2\pi]$.
2. (a) 42;
   (b) 6;
   (c) $\frac{33}{16}$.
3. (a) $\frac{16}{5}$;
   (b) $\frac{\sqrt{14}}{12}(e^6 - 1)$;
   (c) 1;
   (d) $\frac{ab}{3(a+b)}\,(a^2 + ab + b^2)$.
4. (a) $\frac{e^6-1}{3} + 32$;
   (b) $\frac{e^2-1}{e}$;
   (c) 0;
   (d) $\frac{35}{3}$.
5. $8\sqrt{5}\pi^2$.
6. 0.
7. $\alpha = 2$.
8. $g(x) = x\sin x$.
9. (a) $3x + x^2y^2$.
   (b) 9.
10. (a) $\boldsymbol{F}$ není potenciální.
    (b) $-\frac{11}{2}$.
11. (a) $f(x, y, z) = x\sin y + y\cos z + 2$.
    (b) $1 - \frac{\pi}{2}$.
12. (a) $4\,(e^3 - 1)$;
    (b) -24π;
    (c) $\frac{\pi}{2}$.
13. (a) $\frac{9}{2}$;
    (b) 3π.