Kapitola 16

Duální prostor, duální zobrazení

Definice 16.1 *Nechť* $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ *je dvojice vektorových prostorů nad tělesem* $\mathbf{T}$, *nechť* A, $B\colon \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ *je dvojice lineárních zobrazení z prostoru* $\mathbf{U}$ *do prostoru* $\mathbf{V}$. *Zobrazení* $A{+}B\colon \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ *definované předpisem* $(A{+}B)(\mathbf{u}) = A(\mathbf{u}){+}B(\mathbf{u})$ *pro všechny vektory* $\mathbf{u} \in \mathbf{U}$ *nazveme* součtem lineárních zobrazení A *a* B.

Nechť $A\colon \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ *je lineární zobrazení a nechť* $a \in \mathbf{T}$ *je libovolný skalár. Zobrazení* $aA\colon \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ *definované předpisem* $(aA)(\mathbf{u}) = a(A(\mathbf{u})) = A(a\mathbf{u})$, *pro všechny vektory* $\mathbf{u} \in \mathbf{U}$ *nazveme* násobkem lineárního zobrazení A skalárem a.

Tvrzení 16.1 *Nechť* $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ *je dvojice vektorových prostorů nad tělesem* $\mathbf{T}$.

1. *Nechť* A, $B\colon \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ *je dvojice lineárních zobrazení a nechť* $a \in \mathbf{T}$. *Potom jsou součet* $A + B$ *těchto zobrazení a násobek* aA *zobrazení* A *skalárem* a *opět lineární zobrazení.*

2. *Množina všech lineárních zobrazení* $A\colon \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ *tvoří spolu s operacemi součtu zobrazení a násobku zobrazení skalárem vektorový prostor.*

3. *Je-li* $\dim \mathbf{U} = n$ *a* $\dim \mathbf{V} = m$, *pak je prostor všech lineárních zobrazení* $A\colon \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ *izomorfní prostoru všech matic typu* $m \times n$ *nad* $\mathbf{T}$ *a má tedy dimenzi* mn.

Důkaz. Nechť $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ je dvojice vektorů prostoru $\mathbf{U}$. Potom platí, že $(A + B)(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + B(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A(\mathbf{u}) + A(\mathbf{v}) + B(\mathbf{u}) + B(\mathbf{v}) = A(\mathbf{u}) + B(\mathbf{u}) + A(\mathbf{v}) + B(\mathbf{v}) = (A + B)(\mathbf{u}) + (A + B)(\mathbf{v})$ a zároveň $(aA)(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a(A(\mathbf{u} = \mathbf{v})) = a(A(\mathbf{u}) + A(\mathbf{v})) = a(A(\mathbf{u})) + a(A(\mathbf{v})) = (aA)(\mathbf{u}) +$

$(aA)(\mathbf{v})$. Pro libovolné $\mathbf{u} \in \mathbf{U}$ a $b \in \mathbf{T}$ platí, že $(A+B)(b\mathbf{u}) = A(b\mathbf{u}) + B(b\mathbf{u}) = b(A(\mathbf{u})) + b(B(\mathbf{u})) = b(A(\mathbf{u}) + B(\mathbf{u})) = b((A+B)(\mathbf{u}))$ a podobně $(aA)(b\mathbf{u}) = a(A(b\mathbf{u})) = a(b(A(\mathbf{u}))) = (ab)(A(\mathbf{u})) = (ba)(A(\mathbf{u})) = b(a(A(\mathbf{u}))) = b((aA)(\mathbf{u}))$. Ověřili jsme, že jso obě zobrazení $A+B$ a aA lineární a tedy platí (1).

Zvolme báze $\mathcal{X}$ prostoru $\mathbf{U}$ a $\mathcal{Y}$ prostoru $\mathbf{V}$. Lineárnímu zobrazení $A\colon \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ přiřaďme matici $[A]_{\mathcal{X}\mathcal{Y}}$ tohoto zobrazení vzhledem k bazím $\mathcal{X}$ a $\mathcal{Y}$. Tak dostaneme vzájemně jednoznačné zobrazení z množiny všech lineárních zobrazení $A\colon \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ na množinu všech matic typu $m \times n$ nad tělesem $\mathbf{T}$. Přitom součtu zobrazení $A+B$ je přiřazena matice $[A+B]_{\mathcal{X}\mathcal{Y}} = [A]_{\mathcal{X}\mathcal{Y}} + [B]_{\mathcal{X}\mathcal{Y}}$ a násobku aA je přiřazena matice $[aA]_{\mathcal{X}\mathcal{Y}} = a[A]_{\mathcal{X}\mathcal{Y}}$. Vidíme tak, že množina všech lineárních zobrazení $A\colon \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ spolu s operacemi sčítání a násobení skaláry tvoří vektorový prostor izomorfní (kde izomorfismus je dán popsaným přiřazením) vektorovému prostoru všech matic typu $m \times n$ nad $\mathbf{T}$. Speciálně je dimenze tohoto prostoru rovna součinu mn. $\square$

Definice 16.2 *Nechť* $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ *je dvojice vektorových prostorů nad tělesem* $\mathbf{T}$. *Prostor všech lineárních zobrazení* $A\colon \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ *označíme* $\mathrm{Hom}\,(\mathbf{U}, \mathbf{V})$. *Speciálně prostor* $\mathrm{Hom}\,(\mathbf{U}, \mathbf{T})$ *budeme nazývat duálním prostorem k prostoru* $\mathbf{U}$ *a budeme jej značit* $\mathbf{U}^*$. *Prvky prostoru* $\mathbf{U}^*$ *budeme nazývat lineární funkcionály na* $\mathbf{U}$.

Tvrzení 16.2 *Buď* $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ *báze prostory* $\mathbf{U}$. *Potom tvoří lineární funkcionály* $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n$ *definované předpisy* $\mathbf{f}_i(\mathbf{u}_j) = \delta_{ij}$, *pro* $i, j = 1, \ldots, n$ *bázi prostoru* $\mathbf{U}^*$.

Důkaz. Podle Tvrzení 16.1 je dimenze $\dim \mathbf{U}^* = n$. Proto stačí ukázat, že jsou lineární funkcionály $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n$ lineárně nezávislé. Buď $\mathbf{g} = a_1\mathbf{f}_1 + \cdots + a_n\mathbf{f}_n$ nějaká jejich lineární kombinace a předpokládejme, že $\mathbf{g} = \mathbf{0}$. Potom pro každé $i = 1, \ldots, n$ platí, že $0 = \mathbf{g}(\mathbf{u}_i) = a_1\mathbf{f}_1(\mathbf{u}_i) + \cdots + a_n\mathbf{f}_n(\mathbf{u}_i) = a_i$ a tedy tato lineární kombinace je triviální. Odtud plyne, že jsou funkcionály $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n$ lineárně nezávislé. $\square$

Definice 16.3 *Buď* $\mathcal{X} = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ *báze prostoru* $\mathbf{U}$. *Pak bázi* $\{\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n\}$ *prostoru* $\mathbf{U}^*$ *sestávající z lineárních funkcionálů daných předpisem* $\mathbf{f}_i(\mathbf{u}_j) = \delta_{ij}$, *pro* $i, j = 1, \ldots, n$ *nazveme* duální bázi *k bázi* $\mathbf{U}$ *a označíme* $\mathbf{U}^*$.

Tvrzení 16.3 *Nechť* $A\colon \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ *je lineární zobrazení. Definujeme zobrazení* $A^T\colon \mathbf{V}^* \to \mathbf{U}^*$ *předpisem* $A^T(\mathbf{f}) = \mathbf{f} \circ A$ *pro každé* $\mathbf{f} \in \mathbf{V}^*$. *Potom* A^T *je lineární zobrazení.*

Důkaz. Nechť $\mathbf{f}, \mathbf{g}$ jsou lineární funkcionály a $a \in \mathbf{T}$ skalár. Potom pro každý vektor $\mathbf{u} \in \mathbf{U}$ platí, že $(A^T(\mathbf{f}+\mathbf{g}))(\mathbf{u}) = ((\mathbf{f}+\mathbf{g}) \circ A)(\mathbf{u}) = (\mathbf{f}+\mathbf{g})(A(\mathbf{u})) = \mathbf{f}(A(\mathbf{u})) + \mathbf{g}(A(\mathbf{u})) = (\mathbf{f} \circ A)(\mathbf{u}) + (\mathbf{g} \circ A)(\mathbf{u}) = (A^T(\mathbf{f}))(\mathbf{u}) + (A^T(\mathbf{g}))(\mathbf{u})$. Proto platí, že $A^T(\mathbf{f}+\mathbf{g}) = A^T(\mathbf{f}) + A^T(\mathbf{g})$. Podobně $(A^T(a\mathbf{f}))(\mathbf{u}) = ((a\mathbf{f}) \circ A)(\mathbf{u}) = (A\mathbf{f})(A(\mathbf{u})) = a(\mathbf{f}(A(\mathbf{u}))) = a((\mathbf{f} \circ A)(\mathbf{u})) = a((A^T(\mathbf{f}))(\mathbf{u})) = (a(A^T(\mathbf{f})))(\mathbf{u})$. Proto platí, že $A^T(a\mathbf{f}) = a(A^T(\mathbf{f}))$. Tím je ukázáno, že $A^T\colon \mathbf{V}^* \to \mathbf{U}^*$ je lineární zobrazení. $\square$

Definice 16.4 *Nechť $A\colon \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ je lineární zobrazení. Potom se lineární zobrazení $A^T\colon \mathbf{V}^* \to \mathbf{U}^*$ definované předpisem $A^T(f) = f \circ A$ nazývá* duální (transponované) zobrazení k *zobrazení $A\colon \mathbf{U} \to \mathbf{V}$.*

Lemma 16.4 *Buď $\mathbf{U}$ vektorový prostor nad tělesem $\mathbf{T}$ dimenze n, $\mathcal{X} = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ jeho báze a $\mathcal{X}^* = \{\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n\}$ báze $\mathbf{U}^*$ duální k bází $\mathcal{X}$.*

1. *Pro každý vektor $\mathbf{u} \in \mathbf{U}$ platí, že $\{\mathbf{u}\}_{\mathcal{X}} = (\mathbf{f}_1(\mathbf{u}), \ldots, \mathbf{f}_n(\mathbf{u}))^T$.*
2. *Pro každý lineární funkcionál $\mathbf{f} \in \mathbf{U}^*$ je $\{\mathbf{f}\}_{\mathcal{X}^*} = (\mathbf{f}(\mathbf{u}_1), \ldots, \mathbf{f}(\mathbf{u}_n))^T$.*

Důkaz.

1. Položme $\{\mathbf{u}\}_{\mathcal{X}} = (a_1, \ldots, a_n)^T$. To znamená, že $\mathbf{u} = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{u}_i$. Potom pro každé $j = 1, \ldots, n$ platí, že $\mathbf{f}_j(\mathbf{u}) = \mathbf{f}_j(\sum_{i=1}^n a_i \mathbf{u}_i) = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{f}_j(\mathbf{u}_i) = a_j \mathbf{f}_j(\mathbf{u}_j) = a_j$.
2. Položme $\{\mathbf{f}\}_{\mathcal{X}^*} = (b_1, \ldots, b_n)^T$. To znamená, že $\mathbf{f} = \sum_{j=1}^n b_j \mathbf{f}_j$. Potom pro každé $i = 1, \ldots, n$ platí, že $\mathbf{f}(\mathbf{u}_i) = (\sum_{j=1}^n b_j \mathbf{f}_j)(\mathbf{u}_i) = \sum_{j=1}^n b_j \mathbf{f}_j(\mathbf{u}_i) = b_i \mathbf{f}_i(\mathbf{u}_i) = b_i$.

$\square$

Věta 16.5 *Nechť $A\colon \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ je lineární zobrazení. Nechť $\mathcal{X} = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ je báze prostoru $\mathbf{U}$ a $\mathcal{Y} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ je báze prostoru $\mathbf{V}$. Potom*

$$[A]^T_{\mathcal{X},\mathcal{Y}} = [A^T]_{\mathcal{Y}^*,\mathcal{X}^*}.$$

Důkaz. Položme $\mathbf{A} = (a_{ij}) = [A]_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}$. Podle definice platí pro každé $j = 1, \ldots, n$, že $\mathbf{A}_{*j} = \{A(\mathbf{u}_j)\}_{\mathcal{Y}}$. Odtud, vzhledem k Lemmatu 16.4(1), plyne, že $a_{ij} = \mathbf{g}_i(A(\mathbf{u}_j)) = (A^T(\mathbf{g}_i))(\mathbf{u}_j)$ pro každé $i = 1, \ldots, m$ a $j = 1, \ldots, n$. Dále položme $\mathbf{B} = (b_{ji}) = [A^T]_{\mathcal{Y}^*,\mathcal{X}^*}$ a rozmysleme si, že platí $\mathbf{B}_{*i} = \{A^T(\mathbf{g}_i)\}_{\mathcal{X}^*}$. Podle Lemmatu 16.4(2) pak platí, že $b_{ji} = (A^T(\mathbf{g}_i))(\mathbf{u}_j)$ pro každé $j = 1, \ldots, n$ a $i = 1, \ldots, m$. Ukázali jsme, že $a_{ij} = b_{ji}$ pro všechna $i = 1, \ldots, m$ a $j = 1, \ldots, n$. To znamená, že $[A]^T_{\mathcal{X},\mathcal{Y}} = [A^T]_{\mathcal{Y}^*,\mathcal{X}^*}$. $\square$

Lemma 16.6 *Nechť* $\mathbf{U}$ *je vektorový prostor. Potom pro libovolný nenulový vektor* $\mathbf{u} \in \mathbf{U}$ *existuje lineární funkcionál* $\mathbf{f} \in \mathbf{U}^*$ *tak, že* $\mathbf{f}(\mathbf{u}) \neq 0$.

Důkaz. Podle Důsledku 12.9 existuje báze $\mathcal{X}$ prostoru $\mathbf{U}$ obsahující vektor $\mathbf{x}$. Podle Věty 13.5 existuje lineární zobrazení $\mathbf{f}: \mathbf{U} \to \mathbf{T}$ takové, že $\mathbf{f}(\mathbf{u}) = 1$. $\square$

Věta 16.7 *Nechť* $\mathbf{U}$ *je vektorový prostor dimenze* n *nad tělesem* $\mathbf{T}$*. Pro každý prvek* $\mathbf{x} \in \mathbf{U}$ *definujeme zobraz* $\hat{\mathbf{x}}: \mathbf{U}^* \to \mathbf{T}$ *předpisem* $\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{f}) = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ *pro každé* $\mathbf{f} \in \mathbf{U}^*$*. Potom je* $\hat{\mathbf{x}}$ *lineární zobrazení, a tedy prvek druhého duálního prostoru* $(\mathbf{U}^*)^*$*. Dále platí, že zobrazení* $D: U \to (U^*)^*$ *definované předpisem* $D(\mathbf{x}) = \hat{\mathbf{x}}$ *pro všechna* $\mathbf{x} \in \mathbf{U}$ *je isomorfismem prostorů* $\mathbf{U}$ *a* $(\mathbf{U}^*)^*$.

Důkaz. Nejprve ověříme, že zobrazení $\hat{\mathbf{x}}: \mathbf{U}^* \to \mathbf{T}$ je lineární pro každé $\mathbf{x} \in \mathbf{U}$. Nechť $\mathbf{f}$, $\mathbf{g} \in \mathbf{U}^*$ je libovolná dvojice lineárních funkcionálů. Potom $\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{f} + \mathbf{g}) = (\mathbf{f} + \mathbf{g})(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{f}) + \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{g})$. Podobně nechť $\mathbf{f} \in \mathbf{U}^*$ je lineární funkcionál a $a \in \mathbf{T}$ libovolný prvek tělesa $\mathbf{T}$. Potom $\hat{\mathbf{x}}(a\mathbf{f}) = (a\mathbf{f})(\mathbf{x}) = a(\mathbf{f}(\mathbf{x})) = a(\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{f}))$. Tím jsme ověřili, že $\hat{\mathbf{x}}$ je skutečně lineární zobrazení.

Nyní ověříme, že $D: \mathbf{U} \to (\mathbf{U}^*)^*$ je lineární zobrazení. Pro každou dvojici vektorů $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in \mathbf{U}$ a každý lineární funkcionál $\mathbf{f} \in \mathbf{U}^*$ máme, že $D(\mathbf{x}+\mathbf{y})(\mathbf{f}) = \widehat{\mathbf{x}+\mathbf{y}}(\mathbf{f}) = \mathbf{f}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{f}(\mathbf{y}) = \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{f}) + \hat{\mathbf{y}}(\mathbf{f}) = D(\mathbf{x})(\mathbf{f}) + D(\mathbf{y})(\mathbf{f}) = (D(\mathbf{x}) + D(\mathbf{y}))(\mathbf{f})$. Proto platí rovnost $D(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = D(\mathbf{x}) = D(\mathbf{y})$. Dále pro každé $a \in \mathbf{T}$, každý vektor $\mathbf{x} \in \mathbf{U}$ a každý lineární funkcionál $\mathbf{f} \in \mathbf{U}^*$ platí, že $D(a\mathbf{x})(\mathbf{f}) = \widehat{a\mathbf{x}}(\mathbf{f}) = \mathbf{f}(a\mathbf{x}) = a(\mathbf{f}(\mathbf{x})) = a(\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{f})) = a(D(\mathbf{x})(\mathbf{f})) = (aD(\mathbf{x}))(\mathbf{f})$. Proto platí $D(a\mathbf{x}) = aD(\mathbf{x})$ pro každé $a \in \mathbf{T}$ a každé $\mathbf{x} \in \mathbf{U}$. Tak jsme ověřili, že $D: \mathbf{U} \to (\mathbf{U}^*)^*$ je lineární zobrazení.

Podle Tvrzení 16.1 je $\dim U = \dim U^* = \dim(\mathbf{U}^*)^*$. Proto k tomu, abychom ukázali, že je lineární zobrazení D izomorfismem stačí ověřit, že je prosté. Předpokládejme, že pro nějaké $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{U}$ je $\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{y}}$. Podle Lemmatu 16.6 existuje lineární funkcionál $\mathbf{f} \in \mathbf{U}^*$ takový, že $\mathbf{f}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \neq 0$. To ale znamená, že $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \neq \mathbf{f}(\mathbf{y})$ a tedy $\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{f}) \neq \hat{\mathbf{y}}(\mathbf{f})$. Proto $D(\mathbf{x}) \neq D(\mathbf{y})$. $\square$

Důsledek 16.8 *Každá báze* $\mathbf{U}^*$ *je duální k nějaké bázi prostoru* $\mathbf{U}$.

Definice 16.5 *Zobrazení* $D: \mathbf{U} \to (\mathbf{U}^*)^*$ *definované předpisem* $D(\mathbf{x}) = \hat{\mathbf{x}}$ *se nazývá kanonický izomorfismus mezi prostorem* $\mathbf{U}$ *a jeho druhým duálem* $(\mathbf{U}^*)^*$.

Lemma 16.9 *Buď* $\mathbf{V}$ *prostor se skalárním součinem. Potom pro každý lineární funkcionál* $\mathbf{f} \in \mathbf{V}^*$ *existuje právě jeden vektor* $\mathbf{y} \in \mathbf{V}$ *takový, že platí* $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$ *pro každé* $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$.

Důkaz. Nechť $\mathbf{x} \in \mathbf{U}$ je libovolný vektor. Zvolme nějakou ortonormální bázi $\mathcal{X} = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ prostoru $\mathbf{V}$ a položme $\{\mathbf{x}\}_{\mathcal{X}} = (a_1, \ldots, a_n)^T$, t.j., $\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{n} a_j \mathbf{u}_j$. Potom je $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\sum_{j=1}^{n} a_j \mathbf{u}_j) = \sum_{j=1}^{n} a_j \mathbf{f}(\mathbf{u}_j)$. Uvažme vektor $\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} \overline{f(\mathbf{u}_i)} \mathbf{u}_i$. Snadno ověříme, že potom platí $\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle = \sum_{j=1}^{n} a_j \mathbf{f}(\mathbf{u}_j)$ a tedy $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$.

Předpokládejme, že pro dva vektory $\mathbf{y}$, $\mathbf{z} \in \mathbf{U}$ platí, že $\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{z}, \mathbf{x} \rangle$ pro všechny $\mathbf{x} \in \mathbf{U}$. Speciálně pro $\mathbf{x} = \mathbf{y} - \mathbf{z}$ dostaneme, že $\langle \mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{z}, \mathbf{y} - \mathbf{z} \rangle$, odkud plyne, že $\langle \mathbf{y} - \mathbf{z}, \mathbf{y} - \mathbf{z} \rangle = 0$. Z vlastností skalárního součinu plyne, že $\mathbf{y} - \mathbf{z} = \mathbf{0}$, odkud dostaneme, že $\mathbf{y} = \mathbf{z}$. □

Věta 16.10 *Buď $\mathbf{V}$ prostor se skalárním součinem. Potom pro každé lineární zobrazení $A: \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ existuje právě jedno lineární zobrazení $A^*: \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ takové, že $\langle \mathbf{y}, A(\mathbf{x}) \rangle = \langle A^*(\mathbf{y}), \mathbf{x} \rangle$ pro každé dva vektory $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in \mathbf{V}$.*

Důkaz. Pro každý vektor $\mathbf{y} \in \mathbf{V}$ buď $A^*(\mathbf{y}) \in \mathbf{V}$ vektor reprezentující lineární funkcionál $\mathbf{f}$ daný předpisem $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{y}, A(\mathbf{x}) \rangle$ pro všechna $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$, jehož existenci a jednoznačnost jsme ukázali v Lemmatu 16.9. Rozmyslete si, že $\mathbf{f}$ je skutečně lineární funkcionál. Je přímočaré ověřit, že $A^*: \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ je lineární zobrazení. Pro všechna $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z} \in \mathbf{V}$ totiž platí, že $\langle A^*(\mathbf{y} + \mathbf{z}), \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{y} + \mathbf{z}, A(\mathbf{x}) \rangle = \langle \mathbf{y}, A(\mathbf{x}) \rangle + \langle \mathbf{z}, A(\mathbf{x}) \rangle = \langle A^*(\mathbf{y}), \mathbf{x} \rangle + \langle A^*(\mathbf{z}), \mathbf{x} \rangle = \langle A^*(\mathbf{y}) + A^*(\mathbf{z}), \mathbf{x} \rangle$. Speciálně, pro $\mathbf{x} = A^*(\mathbf{y} + \mathbf{z}) - A^*(\mathbf{y}) - A^*(\mathbf{z})$ dostaneme, že $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0$, odkud $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ a tedy $A^*(\mathbf{y} + \mathbf{z}) = A^*(\mathbf{y}) + A^*(\mathbf{z})$. Podobně pro každé $a \in \mathbf{T}$ a všechna $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in \mathbf{V}$ platí, že $\langle A^*(a\mathbf{y}), \mathbf{x} \rangle = \langle a\mathbf{y}, A(\mathbf{x}) \rangle = \overline{a} \langle \mathbf{y}, A(\mathbf{x}) \rangle = \overline{a} \langle A^*(\mathbf{y}), \mathbf{x} \rangle = \langle a A^*(\mathbf{y}), \mathbf{x} \rangle$. Pro $\mathbf{x} = A^*(a\mathbf{y}) - aA^*(\mathbf{y})$ tak dostaneme, že $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0$. Odtud plyne, že $A^*(a\mathbf{y}) - aA^*(\mathbf{y}) = \mathbf{0}$ a tedy $A^*(a\mathbf{y}) = aA^*(\mathbf{y})$. Ověřili jsme, že zobrazení $A^*: \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ je lineární.

Zbývá ukázat jeho jednoznačnost. Uvědomme si, že vektor $A^*(\mathbf{y})$ reprezentuje lineární funkcionál daný přiřazením $\mathbf{x} \mapsto \langle \mathbf{y}, A(\mathbf{x}) \rangle$ pro každé $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ (ve smyslu Lemmatu 16.9). Tím je jeho hodnota určena jednoznačně. □

Definice 16.6 *Buď $\mathbf{V}$ prostor se skalárním součinem a $A: \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ lineární zobrazení. Lineární zobrazení $A^*: \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ takové, že $\langle \mathbf{y}, A(\mathbf{x}) \rangle = \langle A^*(\mathbf{y}), \mathbf{x} \rangle$ pro každé dva vektory $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in \mathbf{V}$, se nazývá* adjungované zobrazení *k lineárnímu zobrazení A.*

Platí-li $A^* = A$, pak říkáme, že A je samoadjungované lineární zobrazení.

Připomeňme, že symbolem $\mathbf{A}^*$ značíme matici hermitovsky sdruženou k matici $\mathbf{A}$, definovanou jako matici takovou, že $\mathbf{A}^* = \overline{\mathbf{A}}^T$.

Věta 16.11 *Buď* $\mathbf{V}$ *prostor se skalárním součinem,* $A\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ *lineární zobrazení a* $\mathcal{X} = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ *ortonormální báze ve* $\mathbf{V}$*. Pak platí, že*

$$[A]^*_{\mathcal{X}} = [A^*]_{\mathcal{X}}.$$

Důkaz. Nechť $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in \mathbf{V}$ je libovolná dvojice vektorů. Vzhledem k tomu, že je $\mathcal{X}$ ortonormální báze, platí

$$\langle \mathbf{y}, A(\mathbf{x})\rangle = \overline{\{\mathbf{y}\}_{\mathcal{X}}}^T \{A(\mathbf{x})\}_{\mathcal{X}} = \overline{\{\mathbf{y}\}_{\mathcal{X}}}^T [A]_{\mathcal{X}}\{\mathbf{x}\}_{\mathcal{X}}.$$

Podobně dostaneme, že

$$\langle A^*(\mathbf{y}), \mathbf{x}\rangle = \overline{\{A^*(\mathbf{y})\}_{\mathcal{X}}}^T \{\mathbf{x}\}_{\mathcal{X}} = \overline{\{\mathbf{y}\}_{\mathcal{X}}}^T \overline{[A^*]_{\mathcal{X}}}^T \{\mathbf{x}\}_{\mathcal{X}}.$$

Odtud vzhledem k vlastnostem adjungovaného zobrazení plyne, že pro všechny dvojice vektorů $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in \mathbf{V}$ platí rovnost $\overline{\{\mathbf{y}\}_{\mathcal{X}}}^T [A]_{\mathcal{X}}\{\mathbf{x}\}_{\mathcal{X}} = \overline{\{\mathbf{y}\}_{\mathcal{X}}}^T \overline{[A^*]_{\mathcal{X}}}^T \{\mathbf{x}\}_{\mathcal{X}}$. Dosadíme-li za vektory $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ postupně všechny vektory báze $\mathcal{X}$, dostaneme odtud, že $[A]_{\mathcal{X}} = \overline{[A^*]_{\mathcal{X}}}^T$ a tedy $[A^*]_{\mathcal{X}} = \overline{[A]_{\mathcal{X}}}^T = [A]^*_{\mathcal{X}}$. □

Tvrzení 16.12 *Buď* $\mathbf{V}$ *prostor se skalárním součinem,* $A\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ *a* $B\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ *dvojice lineárních zobrazení. Pak platí:*

1. $(A + B)^* = A^* + B^*$,
2. $(aA)^* = \overline{a}A^*$ *pro každý skalár* a,
3. $(AB)^* = B^*A^*$,
4. $A^{**} = A$,
5. $I^* = I$ *pro identické zobrazení* $I\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}$.

Důkaz. Pro každou dvojici vektorů $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in \mathbf{V}$ platí, že

1. $\langle (A^* + B^*)(\mathbf{x}), \mathbf{y}\rangle = \langle A^*(\mathbf{x}), \mathbf{y}\rangle + \langle B^*(\mathbf{x}), \mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{x}, A(\mathbf{y})\rangle + \langle \mathbf{x}, B(\mathbf{y})\rangle = \langle \mathbf{x}, A(\mathbf{y}) + B(\mathbf{y})\rangle = \langle \mathbf{x}, (A + B)(\mathbf{y})\rangle = \langle (A + B)^*(\mathbf{x}), \mathbf{y}\rangle$,
2. $\langle (aA)^*(\mathbf{x}), \mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{x}, (aA)(\mathbf{y})\rangle = \langle \mathbf{x}, a(A(\mathbf{y}))\rangle = a\langle \mathbf{x}, A(\mathbf{y})\rangle = a\langle A^*(\mathbf{x}), \mathbf{y}\rangle = \langle \overline{a}A^*(\mathbf{x}), \mathbf{y}\rangle = \langle \overline{a}(A^*(\mathbf{x})), \mathbf{y}\rangle = \langle (\overline{a}A^*)(\mathbf{x}), \mathbf{y}\rangle$,
3. $\langle (AB)^*(\mathbf{x}), \mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{x}, (AB)(\mathbf{y})\rangle = \langle \mathbf{x}, A(B(\mathbf{y}))\rangle = \langle A^*(\mathbf{x}), B(\mathbf{y})\rangle = \langle B^*(A^*(\mathbf{x})), \mathbf{y}\rangle = \langle (B^*A^*)(\mathbf{x}), \mathbf{y}\rangle$,
4. $\langle A^{**}(\mathbf{x}), \mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{x}, A^*(\mathbf{y})\rangle = \overline{\langle A^*(\mathbf{y}), \mathbf{x}\rangle} = \overline{\langle \mathbf{y}, A(\mathbf{x})\rangle} = \langle A(\mathbf{x}), \mathbf{y}\rangle$,
5. $\langle I^*(\mathbf{x}), \mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{x}, I(\mathbf{y})\rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \langle I(\mathbf{x}), \mathbf{y}\rangle$.

□