Kapitola 15

Vlastní čísla a vlastní vektory

V této a následujících kapitolách budeme zkoumat jeden z nejdůležitějších pojmů tohoto kurzu.

Definice 15.1 *Buď* $A : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ *lineární zobrazení,* $\mathbf{V}$ *vektorový prostor nad tělesem* $\mathbf{T}$*. Číslo* $\lambda \in \mathbf{T}$ *nazýváme* vlastní číslo lineárního zobrazení A*, pokud existuje* nenulový *vektor* $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ *takový, že* $A(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x}$*. Je-li* λ *vlastní číslo lineárního zobrazení* A*, pak libovolný vektor* $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ *takový, že* $A(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x}$ *nazýváme* vlastní vektor lineárního zobrazení A příslušný vlastnímu číslu λ.

Buď $\mathcal{X} = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ a $\mathcal{Y} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ nějaké dvě báze v prostoru $\mathbf{V}$ a $\mathbf{P}$ matice přechodu od báze $\mathcal{X}$ k bázi $\mathcal{Y}$. Potom víme, že pro matice $[A]_\mathcal{X}$ a $[A]_\mathcal{Y}$ lineárního zobrazení A platí vztah

$$[A]_\mathcal{X} = \mathbf{P}^{-1}[A]_\mathcal{Y}\mathbf{P}.$$

Máme-li dánu nějakou bázi $\mathcal{Y} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$, vynasnažíme se najít takovou bázi $\mathcal{X} = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$, aby matice $[A]_\mathcal{X}$ lineárního zobrazení A vzhledem k bázi $\mathcal{X}$ byla co nejjednodušší. Například diagonální. Víme navíc, že každá matice přechodu je regulární a obráceně, že každá regulární matice $\mathbf{P}$ řádu n nad $\mathbf{T}$ je maticí přechodu od nějaké báze $\mathcal{X}$ k dané bázi $\mathcal{Y}$, stačí pro každé $j = 1, \ldots, n$ definovat $\mathbf{u}_j = \sum_{i=1}^n p_{ij}\mathbf{v}_i$. K matici $[A]_\mathcal{Y}$ tak hledáme regulární matici $\mathbf{P}$ tak, aby matice $\mathbf{P}^{-1}[A]_\mathcal{Y}\mathbf{P}$ byla co nejjednodušší.

Definice 15.2 *Dvě čtvercové matice* $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ *řádu* n *nad tělesem* $\mathbf{T}$ *nazýváme* podobné*, pokud existuje regulární matice* $\mathbf{P}$ *řádu* n *nad* $\mathbf{T}$ *taková, že* $\mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$*. Matice* $\mathbf{A}$ *se nazývá* diagonalizovatelná*, je-li podobná nějaké diagonální matici.*

Lemma 15.1 *Podobnost je relace ekvivalence na množině všech čtvercových matic téhož řádu nad nějakým tělesem* $\mathbf{T}$.

Je-li matice $\mathbf{A}$ podobná diagonální matici $\mathbf{D}$, můžeme například snadno spočítat libovolnou mocninu $\mathbf{A}^k$. Platí totiž $\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^{-1}$ a tedy $\mathbf{A}^k = \mathbf{PD}^k\mathbf{P}^{-1}$ a matice $\mathbf{D}^k$ je opět diagonální matice, na jejíž hlavní diagonále jsou k-té mocniny diagionálních prvků matice $\mathbf{D}$.

Je-li $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ vlastní vektor lineárního zobrazení $A : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ příslušný vlastnímu číslu λ, pak platí $A(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x}$. Nyní zvolíme nějakou bázi $\mathcal{X} = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ v prostoru $\mathbf{V}$. Co to znamená pro matici lineárního zobrazení A a souřadnice vektoru $\mathbf{x}$, obojí vzhledem k bázi $\mathcal{X}$? Podle Tvrzení 13.10 platí

$$\lambda[\mathbf{x}]_{\mathcal{X}} = [\lambda\mathbf{x}]_{\mathcal{X}} = [A(\mathbf{x})]_{\mathcal{X}} = [A]_{\mathcal{X}}[\mathbf{x}]_{\mathcal{X}}.$$

Definice 15.3 *Je-li* $\mathbf{A}$ *čtvercová matice řádu* n *nad tělesem* $\mathbf{T}$. *Číslo* $\lambda \in \mathbf{T}$ *se nazývá* vlastní číslo matice $\mathbf{A}$, *pokud existuje* nenulový *vektor* $\mathbf{x} \in \mathbf{T}^n$ *takový, že* $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$. *Je-li* λ *vlastní číslo matice* $\mathbf{A}$, *pak libovolný vektor* $\mathbf{x} \in \mathbf{T}^n$, *pro který platí* $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$ *se nazývá* vlastní vektor matice $\mathbf{A}$ příslušný vlastnímu číslu λ.

Tvrzení 15.2 *Je-li* λ *vlastní číslo lineárního zobrazení* $A : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ *(nebo čtvercové matice matice* $\mathbf{A}$ *nad* $\mathbf{T}$*), pak množina* $\mathbf{M}$ *všech vlastních vektorů lineárního zobrazení* A *(nebo matice* $\mathbf{A}$*) příslušných vlastnímu číslu* λ *tvoří podprostor* $\mathbf{V}$ *(nebo* $\mathbf{T}^n$*) takový, že* $A(\mathbf{x}) \in \mathbf{M}$ *(nebo* $\mathbf{Ax} \in \mathbf{M}$*) pro každý vektor* $\mathbf{x} \in \mathbf{M}$.

Definice 15.4 *Je-li* $A : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ *lineární zobrazení, pak podprostor* $\mathbf{M}$ *prostoru* $\mathbf{V}$ *se nazývá* invariantní podprostor lineárního zobrazení A, *pokud platí* $A(\mathbf{x}) \in \mathbf{M}$ *pro každý vektor* $\mathbf{x} \in \mathbf{M}$. *Podobně se definuje* invariantní podprostor $\mathbf{M} \subseteq \mathbf{T}^n$ čtvercové matice $\mathbf{A}$ *řádu* n *nad tělesem* $\mathbf{T}$ *jako invariantní podprostor lineárního zobrazení* $A : \mathbf{T}^n \to \mathbf{T}^n$ *určeného maticí* $\mathbf{A}$, *tj. musí platit* $\mathbf{Ax} \in \mathbf{M}$ *pro každý vektor* $\mathbf{x} \in \mathbf{M}$.

Tvrzení 15.3 *Je-li* $\mathbf{x}$ *vlastní vektor lineárního zobrazení* A *příslušný bějakému vlastnímu číslu* λ, *pak podprostor* $\mathbf{M}_\lambda$ *prostoru* $\mathbf{V}$ *tvořený všemi vlastními vektory* A *příslušnými vlastnímu číslu* λ *je invariantní podprostor zobrazení* A.

Příklad 15.1 Vlastní čísla lineárních zobrazení v $\mathbf{R}^2$ - osová souměrnost vzhledem k $y = -x$, zkosení, zkosení a roztažení, otočení kolem počátku. Otočení kolem počátku jako lineární zobrazení nad komplexními čísly.

Příklad 15.2 Derivace diferencovatelných lineárních funkcí na intervalu $(0, 1)$.

Příklad 15.3 Fibonacciova posloupnost - P posunutí doleva na prostoru $\mathbf{V}$, jeho vlastní čísla.

Lemma 15.4 *Pro lineární zobrazení $A : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ existuje báze ve $\mathbf{V}$ vzhledem ke které má A diagonální matici právě tehdy, když existuje báze ve $\mathbf{V}$ složená z vlastních vektorů zobrazení A.*

Tvrzení 15.5 *Jsou-li $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$* navzájem různá *vlastní čísla lineárního zobrazení A (nebo matice $\mathbf{A}$) a pro každé $i = 1, \ldots, k$ je $\mathbf{u}_i$* nenulový *vlastní vektor příslušný λ_i, pak je množina $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ lineárně nezávislá.*

Důsledek 15.6 *Je-li matice $\mathbf{A}$ řádu n a má-li n navzájem různých vlastních čísel, pak je diagonalizovatelná.*

Tvrzení 15.7 *Je-li $\mathbf{A}$ matice řádu n nad tělesem $\mathbf{T}$, pak $\lambda \in \mathbf{T}$ je vlastní číslo matice $\mathbf{A}$ právě když platí* $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_n) = 0$.

Definice 15.5 Charakteristický polynom *čtvercové matice $\mathbf{A}$ definujeme jako polynom $p_{\mathbf{A}} = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_n)$ jedné proměnné λ.*

Vlastní čísla matice jsou tedy kořeny charakteristického polynomu této matice.

Tvrzení 15.8 *Jsou-li $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ podobné matice, pak $p_{\mathbf{A}} = p_{\mathbf{B}}$.*

Poslední tvrzení nám umožňuje mluvit také o *charakteristickém polynomu lineárního zobrazení $A : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$* - je to charakteristický polynom matice tohoto zobrazení vzhledem k libovolné bázi $\mathbf{V}$. Matice tohoto lineárního zobrazení vzhledem k různým bázím jsou podobné a podobné matice mají stejný charakteristický polynom.

Příklad 15.4 Řešení soustavy dvou lineárních diferenciálních rovnic o dvou neznámých.

Tvrzení 15.9 *Je-li* $\mathbf{A} = (a_{ij})$ *čtvercová matice řádu* n *a*

$$p_{\mathbf{A}}(t) = c_n t^n + c_{n-1} t^{n-1} + \cdots + c_1 t + c_0,$$

pak platí $c_n = (-1)^n$, $c_{n-1} = (-1)(a_{11} + a_{22} + \cdots + c_{nn})$, $c_0 = \det \mathbf{A}$.

Definice 15.6 *Je-li* $\mathbf{A} = (a_{ij})$ *čtvercová matice řádu* n*, pak číslo* $a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$ *nazýváme* stopa matice $\mathbf{A}$ *a označujeme je* $\operatorname{trace}(\mathbf{A})$.

Věta 15.10 Základní věta algebry *Každý nekonstatní polynom s reálnými nebo komplexními kořeny má aspoň jeden komplexní kořen.*

Důsledek 15.11 *Je-li* $f(x)$ *polynom jedné proměnné s reálnými nebo komplexními koeficienty, pak jej lze jednoznačně (až na pořadí činitelů) vyjádřit jako součin*

$$f(x) = a(x - \beta_1)^{r_1}(x - \beta_2)^{r_2} \cdots (x - \beta_k)^{r_k},$$

kde $\beta_1, \ldots, \beta_k$ *jsou navzájem různá komplexní čísla a* $r_1 + r_2 + \cdots + r_k = n$.

Definice 15.7 *Číslo* r_i *se nazývá* násobnost kořene β_i.

Existenci vlastních čísel tak máme zajištěnou pouze pro reálné nebo komplexní matice, v případě reálných matic ale mohou být vlastní čísla komplexní.

Definice 15.8 *Je-li* λ *vlastní číslo matice* $\mathbf{A}$ *(lineárního zobrazení* $A : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$*), pak definujeme* algebraickou násobnost vlastního čísla λ *jako násobnost kořene* λ *charakteristického polynomu* $p_{\mathbf{A}}$ *matice* $\mathbf{A}$ *(matice lineárního zobrazení* A *vzhledem k libovolné bázi* $\mathbf{V}$*).*

Jak hledat vlastní čísla reálné (nebo komplexní) matice $\mathbf{A}$?

- Spočítáme polynom $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_n)$ a najdeme jeho kořeny. To jde dobře pro matice řádu 2, o něco hůře pro matice řádu 3 a hodně špatně pro matice vyšších řádů. Vzorce pro kořeny polynomů stupňů větších než 4 totiž neexistují, pro stupeň 4 sice existují, ale jsou složité a prakticky nepoužitelné.

- Kořeny polynomů lze hledat přibližně pomocí iteračních metod.

- Matice $\mathbf{A}$ lze upravovat tak, abychom dostali podobnou matici, u které lze kořeny charakteristického polynomu *uhádnout*. Někdy to lze, většinou ale nikoliv.

- Pro velké matice existují iterativní metody založené například na QR-rozkladu matic.
- Nalezení vlastních čísel s dostatečnou přesností je výpočetně dobře zvládnutelná úloha.

Příklad 15.5 Stopa a determinant diagonalizovatelné matice.

Tvrzení 15.12 *Pro každé lineární zobrazení $A : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ a každé vlastní číslo λ zobrazení A platí, že dimenze podprostoru $\mathbf{M}_\lambda$ prostoru $\mathbf{V}$ tvořeného vlastními vektory zobrazení A příslušnými vlastnímu číslu λ je menší nebo rovná algebraické násobnosti vlastního čísla λ.*

Důkaz. Zvolím bázi v $\mathbf{M}_\lambda$, doplním ji do báze $\mathcal{X}$ celého $\mathbf{V}$, vezmu matici $\mathbf{A} = [A]_{\mathcal{X}}$ vzhledem k bázi X v blokovém tvaru a spočtu determinant $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_n$. $\square$

Definice 15.9 *Je-li λ vlastní číslo lineárního zobrazení $A : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ a $\mathbf{M}_\lambda$ podprostor $\mathbf{V}$ tvořený všemi vlastními vektory $\mathbf{V}$ příslušnými vlastnímu číslu λ, pak definujeme* geometrickou násobnost vlastního čísla λ *jako dimenzi podprostoru $\mathbf{M}^\lambda$.*

Věta 15.13 *Buď $\mathbf{V}$ vekorový prostor nad tělesem komplexních čísel $\mathbf{C}$ a $A : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ lineární zobrazení. Potom je lineární zobrazení A digonalizovatelné právě tehdy když pro každé vlastní číslo λ zobrazení A platí, že jeho geometrická násobnost se rovná jeho algebraické násobnosti.*

Definice 15.10 Jordanova buňka $J(\lambda, k)$. *Matice $\mathbf{A}$ řádu n má* Jordanův normální tvar *s buňkami $J(\lambda_i, k_i)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, kde $k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n$.*

Tvrzení 15.14 *Jordanova buňka $J(\lambda, k)$ není diagonalizovatelná matice, je-li $k \geq 2$.*

Příklad 15.6 Derivece polynomů stupně nejvýše 3 má nediagonalizovatelnou matici.

Věta 15.15 *Je-li* $\mathbf{A}$ *čtverová matice řádu* n *nad* $\mathbf{C}$*, pak* $\mathbf{A}$ *je podobná nějaké matici v Jordanově normálním tvaru s buňkami* $J(\lambda_i, k_i)$*,* $i = 1, 2, \ldots, m$*, kde* $k_1+k_2+\cdots+k_m = n$*. Dvojice* (λ_i, k_i) *jsou maticí* $\mathbf{A}$ *určené jednloznačně až na pořadí.*

Je-li $A : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ *lineární zobrazení,* $\dim \mathbf{V} = n$*, pak existuje báze ve* $\mathbf{V}$ *taková, že matice* A *vzhledem k této bázi je v Jordanově normálním tvaru.*

Důkaz. Bez důkazu. □

Příklad 15.7 Formalizace myšlenky, že webová stránka je tím důležitější,

čím důležitější jsou webové stránky, které na ni odkazují. Podle článku Herbert S. Wilf, Searching the web with eigenvectors.

Definice 15.11 *Spektrum a spektrální poloměr matice a lineárního zobrazení.* $\sigma(\mathbf{A})$*,* $\sigma(A)$*,* $\rho(\mathbf{A}), \rho(A)$*.*

Věta 15.16 *Je-li* $\mathbf{A}$ *čtvercová matice nad* $\mathbf{R}$ *s kladnými prvky, pak* $\rho(\mathbf{A}) \in \sigma(\mathbf{A})$ *a existuje vlastní vektor* $\mathbf{v}$ *matice* $\mathbf{A}$ *příslušný vlastnímu číslu* $\rho(\mathbf{A})$*, který má všechny souřadnice kladné. Algebraická násobnost vlastního čísla* $\rho(\mathbf{A})$ *se rovná* 1.

Důkaz. Bez důkazu. □

Definice 15.12 *Čtverová matice* $\mathbf{A}$ *s nezápornými prvky se nazývá* irreducibilní*, pokud existuje nějaká její mocnina* $\mathbf{A}6^n$*, která má všechny prvky kladné. Matice, která není irreducibilní, se nazývá* reducibilní.

Věta 15.17 *Je-li* $\mathbf{A}$ *irreducibilní čtvercová matice nad* $\mathbf{R}$ *s nezápornými prvky, pak* $\rho(\mathbf{A}) \in \sigma\mathbf{A}$*,* $\rho(\mathbf{A}) > 0$ *a existuje vlastní vektor* $\mathbf{v}$ *příslušný* $\rho(\mathbf{A})$*, který má všechny souřadnice kladné. Algebraická násobnost* $\rho(\mathbf{A})$ *se rovná* 1.

Důkaz. Bez důkazu. □