Kapitola 14

Prostory se skalárním součinem

Definice 14.1 *Buď* $\mathbf{V}$ *vektorový prostor nad* $\mathbf{R}$ *(nebo nad* $\mathbf{C}$*).* Skalární součin *na* $\mathbf{V}$ *je zobrazení z* $\langle\star,\star\rangle\colon \mathbf{V}\times\mathbf{V}\to\mathbf{R}$ *(nebo* $\to\mathbf{C}$*) splňující následující podmínky. Hodnotu tohoto zobrazení pro dvojici* $(\mathbf{u},\mathbf{v})\in\mathbf{V}\times\mathbf{V}$ *označujeme* $\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle$.

1. $\langle\mathbf{v},\mathbf{v}\rangle\geq 0$ *pro každý vektor* $\mathbf{v}\in\mathbf{V}$*, přičemž rovnost nastává právě když* $\mathbf{v}=\mathbf{0}$,
2. $\langle\mathbf{u},a\mathbf{v}\rangle = a\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle$ *pro každé vektory* $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbf{V}$ *a každý skalár* $a\in\mathbf{R}$ *(nebo* $\in\mathbf{C}$*),*
3. $\langle\mathbf{u},\mathbf{v}+\mathbf{w}\rangle = \langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle+\langle\mathbf{u},\mathbf{w}\rangle$ *pro každé vektory* $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\in\mathbf{V}$,
4. $\langle\mathbf{v},\mathbf{u}\rangle = \overline{\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle}$ *pro každé vektory* $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbf{V}$.

Vektorový prostor, na kterém je definován skalární součin, nazýváme prostor se skalárním součinem.

Všimněte si, že podmínka 4. z předchozí definice znamená, že v případě reálného prostoru $\mathbf{V}$ se skalárním součinem platí $\langle\mathbf{v},\mathbf{u}\rangle = \langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle$ pro každé vektory $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbf{V}$.

Podívejme se na některé elementární vlastnosti skalárního součinu, které budeme dále používat bez odkazu.

Lemma 14.1 *Buď* $\mathbf{V}$ *vektorový prostor nad* $\mathbf{R}$ *(nebo nad* $\mathbf{C}$*) se skalárním součinem* $\langle\star,\star\rangle\colon V\times V\to\mathbf{R}$ *(nebo* $\mathbf{C}$*). Potom platí, že*

1. *$\langle a\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = \overline{a}\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle$ pro každé vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$ a každý skalár $a \in \mathbf{R}$ (nebo $\in \mathbf{C}$).*

2. *$\langle \mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w}\rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle$ pro každé vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}$,*

Důkaz.

1. Použijeme-li několikrát vlastnosti 2. a 4. z Definice 14.1. Tak dostaneme, že $\langle a\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = \overline{\langle \mathbf{v}, a\mathbf{u}\rangle} = \overline{a\langle \mathbf{v}, \mathbf{u}\rangle} = \overline{a}\overline{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u}\rangle} = \overline{a}\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle$.

2. Použijeme-li několikrát vlastnosti 3. a 4. z Definice 14.1. Tak dostaneme, že $\langle \mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle = \overline{\langle \mathbf{w}, \mathbf{u}+\mathbf{v}\rangle} = \overline{\langle \mathbf{w}, \mathbf{u}\rangle + \langle \mathbf{w}, \mathbf{v}\rangle} = \overline{\langle \mathbf{w}, \mathbf{u}\rangle} + \overline{\langle \mathbf{w}, \mathbf{v}\rangle} = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w}\rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle$.

□

Příklad 14.1 Standardní skalární součin definovaný v Definici 7.2 je příkladem skalárního součinu na aritmetickém prostoru $\mathbf{R}^n$ nebo $\mathbf{C}^n$, jak vyplývá z Tvrzení 7.1. Není to ale zdaleka jediná možnost, jak definovat skalární součin na aritmetických vektorových prostorech. Například, jsou-li $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$ a $\mathbf{y} = (y_1, y_2)^T$ dva libovolné vektory z $\mathbf{R}^2$, pak předpis

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = x_1y_1 + \frac{1}{3}x_1y_2 + \frac{1}{3}x_2y_1 + x_2y_2$$

také definuje skalární součin na $\mathbf{R}^2$.

Definice 14.2 *Je-li $\mathbf{V}$ vektorový prostor nad $\mathbf{R}$ (nebo nad $\mathbf{C}$), pak* norma *na $\mathbf{V}$ je zobrazení $\| \star \| : V \to \mathbf{R}$, které přiřazuje každému vektoru $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ reálné číslo $\|\mathbf{v}\|$ splňující následující podmínky:*

1. *$\|\mathbf{v}\| \geq 0$ pro každý vektor $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$, přičemž rovnost nastává právě když $\mathbf{v} = \mathbf{0}$,*

2. *$\|a\mathbf{v}\| = |a| \cdot \|\mathbf{v}\|$ pro každý vektor $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ a každý skalár $a \in \mathbf{R}$ (nebo $\in \mathbf{C}$),*

3. *$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ pro každé dva vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$.*

Příklad 14.2 Euklidovská norma na aritmetickém vektorovém prostoru $\mathbf{R}^n$ nebo $\mathbf{C}^n$ je podle Cvičení 7.2 a Tvrzení 7.3 normou ve smyslu Definice 14.2.

Připomeňme si, že euklidovská norma je svázána se standardním skalárním součinem vztahem

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}$$

pro každý vektor $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$ (nebo $\in \mathbf{C}^n$).

Obecně definujeme normu na prostoru se skalárním součinem zcela analogicky:

Definice 14.3 *Buď* $\mathbf{V}$ *(reálný nebo komplexní) vektorový prostor se skalárním součinem. Potom zobrazení* $\| \star \| : \mathbf{V} \to \mathbf{R}$ *definovanou předpisem* $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}$ *nazýváme* norma definovaná skalárním součinem $\langle \star, \star \rangle$.

Ukážeme, že takto definujeme normu ve smyslu Definice 14.2. Nejprve ale ukažme Cauchy-Schwartzovu-Bunjakovského nerovnost, která poslouží k ověření trojúhelníkové nerovnosti (podmínky (3) z Definice 14.2).

Věta 14.2 (Cauchy-Schwartzova-Bunjakovského nerovnost) *Buď* $\mathbf{V}$ *vektorový prostor se skalárním součinem. Pro libovolné dva vektory* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}$ *platí*

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \le \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|, \tag{14.1}$$

přičemž rovnost nastává právě když $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *nebo* $\mathbf{y} = a\mathbf{x}$ *pro nějaký skalár* $a \in \mathbf{R}$ *(nebo* $\in \mathbf{C}$*).*

Důkaz. V případě $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ nastává v (14.1) rovnost. Předpokládejme dále, že $\mathbf{x} \ne \mathbf{0}$ a položme

$$\mathbf{z} = \mathbf{y} - \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}\mathbf{x}.$$

Potom platí, že

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} - \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}\mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{x}, -\frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}\mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle - \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0.$$

Odtud snadno odvodíme, že $\langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle$ (odvození ponecháme na čtenáři). Použijeme-li tuto rovnost, dostaneme

$$0 \le \langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} - \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}\mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle - \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle.$$

Proto platí, že

$$\frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle \le \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle,$$

odkud plyne, že

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle|^2 = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \overline{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle \leq \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle = \|\mathbf{x}\|^2 \|\mathbf{y}\|^2.$$

Odtud po odmocnění dostaneme nerovnost (14.1). Přitom, za předpokladu $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, nastane rovnost v (14.1) právě když $0 = \langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle$, což je ekvivalentní $\mathbf{z} = \mathbf{0}$. Odtud po dosazení dostaneme podmínku

$$\mathbf{y} - \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle} \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Ta jistě implikuje, že $\mathbf{y} = a\mathbf{x}$ pro nějaký skalár $a \in \mathbf{R}$ (nebo $\in \mathbf{C}$), konkrétně pro $a = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle / \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle$. Naopak je-li $\mathbf{y} = a\mathbf{x}$ pro nějaké $a \in \mathbf{R}$ (nebo $\in \mathbf{C}$), potom

$$\mathbf{z} = \mathbf{y} - \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} \mathbf{x} = a\mathbf{x} - \frac{\langle \mathbf{x}, a\mathbf{x} \rangle}{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} \mathbf{x} = a\mathbf{x} - a \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} \mathbf{x} = a\mathbf{x} - a\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

□

Je-li $\mathbf{V}$ reálný vektorový prostor se skalárním součinem, můžeme Cauchy-Schwartzovu-Bunjakovského nerovnost dokázat elegantně takto:

Jiný důkaz v reálném případě. Je-li $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ platí v (14.1) rovnost. Předpokládejme dále, že je vektor $\mathbf{y}$ nenulový. Pro libovolné $t \in \mathbf{R}$ platí, že

$$0 \leq \langle \mathbf{x} + t\mathbf{y}, \mathbf{x} + t\mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + 2t \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + t^2 \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle = \|\mathbf{x}\| + 2t \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + t^2 \|\mathbf{y}\|.$$

Odtud je vidět, že determinant kvadratická rovnice

$$\|\mathbf{x}\|^2 + 2t \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + t^2 \|\mathbf{y}\|^2 \tag{14.2}$$

nemůže být kladný. Proto $4\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle^2 - 4\|\mathbf{x}\|^2 \|\mathbf{y}\|^2$ odkud plyne dokazovaná nerovnost (14.1). Přitom rovnost v ní nastane právě když má kvadratická rovnice (14.1) kořen, což nastane právě když $\mathbf{x} + t\mathbf{y} = \mathbf{0}$ pro nějaké $t \in \mathbf{R}$. □

Připomeňme, že symbolem $\Re z$ značíme reálnou část komplexního čísla z a že platí $\Re z \leq |z|$.

Tvrzení 14.3 *Buď* $\mathbf{V}$ *vektorový prostor se skalárním součinem. Potom předpis*

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}$$

definuje normu na $\mathbf{V}$.

Důkaz. Postupně ověříme, že jsou splněny všechny tři podmínky Definice 14.2. Podmínka 1. je okamžitým důsledkem 1. vlastnosti z Definice 14.1. Pro každé $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ a každé $a \in \mathbf{R}$ (nebo $\in \mathbf{C}$) platí, že $\|a\mathbf{v}\|^2 = \langle a\mathbf{v}, a\mathbf{v}\rangle = a\overline{a}\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle = |a|^2\|\mathbf{v}\|^2$, odkud plyne podmínka 2. Nakonec pro každou dvojici vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$ platí, že $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 = \langle \mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{u}+\mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}\rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle = \|\mathbf{u}\|^2 + 2\Re\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle + \|\mathbf{v}\|^2$ a $(\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|)^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{v}\|^2$. Vzhledem ke Cauchy-Schwarzově-Bunjakovského nerovnosti platí, že

$$\Re\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle \leq |\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle| \leq \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|,$$

odkud již snadno plyne zbývající podmínka 3. □

Zdaleka ne každou normu na reálném nebo komplexním vektorovém prostoru $\mathbf{V}$ lze definovat nějakým skalárním součinem na $\mathbf{V}$. Následující poněkud náročnější úloha udává dodatečnou nutnou a postačující podmínku, kterou musí norma na $\mathbf{V}$ splňovat k tomu, aby ji bylo možné definovat nějakým skalárním součinem.

Úloha 14.1 Normu $\|\star\|$ na reálném nebo komplexním vektorovém prostoru

$\mathbf{V}$ lze definovat nějakým skalárním součinem na $\mathbf{V}$ právě tehdy když platí

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = 2(\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2)$$

pro každé dva vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$.

Všimněme si, že podmínka v předcházející úloze zobecňuje Pythagorovu větu. Neříká totiž nic jiného, než že součet čtverců délek obou úhlopříček libovolného kosodélníka je roven součtu čtverců délek všech jeho stran.

Definice 14.4 *Buď* $\mathbf{V}$ *vektorový prostor se skalárním součinem. Dva vektory* $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$ *nazýváme* kolmé, *platí-li* $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = 0$. *Množina vektorů* $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k\} \subseteq \mathbf{V}$ *se nazývá* ortogonální, *jsou-li každé její dva různé prvky kolmé, a ortogonální množina se nazývá* ortonormální, *platí-li navíc, že* $\|\mathbf{u}_i\| = 1$ *pro každé* $i = 1, \ldots, k$.

Tvrzení 14.4 *Buď* $\mathbf{V}$ *vektorový prostor se skalárním součinem a* $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ *nějaká jeho ortonormální báze. Pak pro každý vektor* $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ *platí*

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{x}\rangle \mathbf{u}_i.$$

Důkaz. Buď $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = (a_1, \ldots, a_n)^T$, tj., $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{u}_i$. Potom pro každé $1 \leq j \leq n$ platí, že

$$\langle \mathbf{u}_j, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{u}_j, \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{u}_i \rangle = \sum_{i=1}^n a_i \langle \mathbf{u}_j, \mathbf{u}_i \rangle = a_j,$$

neboť $\mathcal{B}$ je ortonormální báze. Odtud plyne dokazované. □

Věta 14.5 *Buď* $\mathbf{V}$ *vektorový prostor se skalárním součinem a* $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k\}$ *lineárně nezávislá množina ve* $\mathbf{V}$. *Pak existuje ortonormální množina* $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ *ve* $\mathbf{V}$ *taková, že platí*

$$\mathbf{L}\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_i\} = \mathbf{L}\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_i\}$$

pro každé $i = 1, \ldots, k$.

Důkaz. Větu ukážeme indukcí podle počtu vektorů dané lineárně nezávislé množiny. Je-li $k = 1$, položíme $\mathbf{u}_1 = \mathbf{x}_1 / \|\mathbf{x}_1\|$ a nahlédneme, že $\{\mathbf{u}_1\}$ je (jednoprvková) ortogonální báze a $\mathbf{L}\{\mathbf{x}_1\} = \mathbf{L}\{\mathbf{u}_1\}$.

Předpokládejme, že tvrzení platí pro každou k-prvkovou lineárně nezávislou množinu a ukažme, že platí také pro $(k+1)$-prvkovou. Buď tedy $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k + 1\}$ lineárně nezávislá množina. Podle indukčního předpokladu existuje ortonormální množina $\mathcal{U}_k = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ ve $\mathbf{V}$ taková, že platí $\mathbf{L}\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_i\} = \mathbf{L}\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_i\}$ pro každé $i = 1, \ldots, k$. Položme

$$\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{x}_{k+1} - \sum_{i=1}^k \langle \mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{u}_i \rangle \mathbf{u}_i.$$

Využijeme-li ortonormality množiny $\mathcal{U}_k$, snadno spočítáme, že $\langle \mathbf{y}_{k+1}, \mathbf{u}_j \rangle = 0$ pro každé $1 \leq j \leq k$. Položme

$$\mathbf{u}_{k+1} = \frac{\mathbf{y}_{k+1}}{\|\mathbf{y}_{k+1}\|}.$$

Potom je $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{k+1}\}$ hledaná ortonormální množina taková, že $\mathbf{L}\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_i\} = \mathbf{L}\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_i\}$ pro každé $i = 1, \ldots, k+1$. □

Definice 14.5 *Je-li* M *podmnožina vektorového prostoru* $\mathbf{V}$ *se skalárním součinem, pak* ortogonální doplněk *množiny* M *ve* $\mathbf{V}$ *definujeme jako množinu*

$$M^{\perp} = \{\mathbf{x} \in \mathbf{V} : \langle \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle = 0 \ \ \textit{pro každé} \ \ \mathbf{u} \in M\}.$$

Tvrzení 14.6 *Pro libovolné dvě podmnožiny $M, N \subseteq \mathbf{V}$, kde $\mathbf{V}$ je (konečně dimenzionální) prostor se skalárním součinem platí*

1. $M^{\perp}$ *je podprostor* $\mathbf{V}$,
2. *je-li* $M \subseteq N$, *pak* $N^{\perp} \subseteq M^{\perp}$,
3. $M^{\perp} = \mathbf{L}(M)^{\perp}$,
4. $\mathbf{L}(M) \cap M^{\perp} = \{\mathbf{0}\}$,
5. $\mathbf{L}(M) + M^{\perp} = \mathbf{V}$,
6. *každý prvek* $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ *lze jednoznačně vyjádřit ve tvaru* $\mathbf{x} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$, *kde* $\mathbf{v} \in \mathbf{L}(M)$ *a* $\mathbf{w} \in M^{\perp}$,
7. $\mathbf{L}(M) = (M^{\perp})^{\perp}$,
8. *platí, že* $\dim M^{\perp} = \dim \mathbf{V} - \dim \mathbf{L}(M)$.

Důkaz.

1. Jsou-li $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in M^{\perp}$ je $\langle \mathbf{u}, \mathbf{x}+\mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{y} \rangle = 0$, pro každé $\mathbf{u} \in M$ a tedy $\mathbf{x}+\mathbf{y} \in M^{\perp}$. Podobně je-li $\mathbf{x} \in M^{\perp}$ a $a \in \mathbf{T}$, platí pro každé $\mathbf{u} \in M$, že $\langle \mathbf{u}, a\mathbf{x} \rangle = a \langle \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle = 0$ a proto $a\mathbf{x} \in M^{\perp}$. Ukázali jsme, že $M^{\perp}$ je podprostor $\mathbf{V}$.
2. Buď $\mathbf{x} \in N^{\perp}$ a $\mathbf{u} \in M$. Potom také $\mathbf{u} \in N$ a proto $\langle \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle = 0$. Odtud je vidět, že $\mathbf{x} \in M^{\perp}$. Ukázali jsme, že $N^{\perp} \subseteq M^{\perp}$.
3. Buď $\mathbf{v}$ libovolný vektor z $\mathbf{L}(M)$. Potom existují $n \in \mathbf{N}$, $a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{T}$ a $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n \in M\}$ tak, že $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{u}_i$. Buď dále $\mathbf{x} \in M^{\perp}$. Potom platí, že $\langle \mathbf{v}, \mathbf{x} \rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{u}_i, \mathbf{x} \rangle = \sum_{i=1}^{n} \overline{a_i} \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{x} \rangle = 0$. Proto $M^{\perp} \subseteq \mathbf{L}(M)^{\perp}$. Vzhledem k evidentnímu $M \subseteq \mathbf{L}(M)$ a předchozímu bodu 2. je také $\mathbf{L}(M)^{\perp} \subseteq M^{\perp}$.
4. Je-li $\mathbf{x} \in \mathbf{L}(M) \cap M^{\perp}$, potom nutně $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0$ a tedy $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Protože jsou $\mathbf{L}(M)$ i $M^{\perp}$ podprostory ve $\mathbf{V}$, obsahují oba nulový vektor.
5. Položme $n = \dim \mathbf{L}(M)$. Zvolme $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$. Předpokládejme, že $\mathbf{x} \notin \mathbf{L}(M)$. Podle Věty 14.5 existuje ortonormální báze $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{n+1}\}$ podprostoru $\mathbf{L}(M \cup \{\mathbf{x}\})$ taková, že $\mathbf{L}\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\} = \mathbf{L}(M)$. Všimněme si, že $\mathbf{u}_{n+1} \in \mathbf{L}(M)^{\perp}$. Vyjádřeme vektor $\mathbf{x}$ jako lineární kombinaci vektorů této báze, $\mathbf{x} = a_1 \mathbf{u}_1 + \cdots a_{n+1} \mathbf{u}_{n+1}$, a položme $\mathbf{v} = a_1 \mathbf{u}_1 + \cdots a_n \mathbf{u}_n$ a $\mathbf{w} = a_{n+1} \mathbf{u}_{n+1}$. Potom $\mathbf{v} \in \mathbf{L}(M)$, $\mathbf{w} \in M^{\perp}$ a $\mathbf{x} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$. Proto $\mathbf{V} = \mathbf{L}(M) + M^{\perp}$.

6. Protože $\mathbf{V} = \mathbf{L}(M) + (M^{\perp})^{\perp}$, lze každý vektor $\mathbf{u} \in VV$ vyjádřit ve tvaru $\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$, kde $\mathbf{v} \in \mathbf{L}(M)$ a $\mathbf{q} \in M^{\perp}$. Předpokládejme, že pro nějaké $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2 \in \mathbf{L}(M)$ a $\mathbf{q}_1$, $\mathbf{w}_2 \in M^{\perp}$ platí, že $\mathbf{v}_1 + \mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_2 + \mathbf{w}_2$. Potom nutně $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 = \mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2 \in \mathbf{L}(M) \cap M^{\perp}$. Protože podle 4. platí, že $\mathbf{L}(M) \cap M^{\perp} = \{\mathbf{0}\}$, dostaneme, že $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 = \mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2 = \mathbf{0}$, odkud $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$ a zároveň $\mathbf{w}_1 = \mathbf{w}_2$. Odtud jednoznačnost vyjádření.

7. Je-li $\mathbf{x} \in M^{\perp}$ a $\mathbf{u} \in M$, potom $\langle \mathbf{x}, \mathbf{u} \rangle = 0$ a proto $M \subseteq (M^{\perp})^{\perp}$. Protože podle 3. je $M^{\perp} = \mathbf{L}(M)^{\perp}$, je také $\mathbf{L}(M) \subseteq (M^{\perp})^{\perp}$. Buď $\mathbf{u} \in (M^{\perp})^{\perp}$. Podle 6. je $\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$, kde $\mathbf{v} \in \mathbf{L}(M)$ a $\mathbf{w} \in M^{\perp}$. Protože $\mathbf{u} \in (M^{\perp})^{\perp}$, platí, že $0 = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v} + \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle$. Odtud plyne, že $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ a tedy $\mathbf{u} = \mathbf{v} \in \mathbf{L}(M)$. Ukázali jsme, že $(M^{\perp})^{\perp} \subseteq \mathbf{L}(M)$.

8. Podle Věty 12.12 a vzhledem k již dokázanému je $\dim \mathbf{L}(M) + \dim M^{\perp} = \dim(\mathbf{L}(M) + M^{\perp}) + \dim(\mathbf{L}(M) \cap M^{\perp}) = \dim \mathbf{V} + \dim\{\mathbf{0}\} = n$.

□

Věta 14.7 *Každou ortonormální množinu $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ ve vektorovém prostoru $\mathbf{V}$ se skalárním součinem lze rozšířit do ortonormální báze ve $\mathbf{V}$.*

Důkaz. Označme $M = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k\}$. Podle Věty 14.5 najdeme ortonormální bázi N v $M^{\perp}$. Podle Tvrzení 14.6 je $\mathbf{V} = \mathbf{L}(M) + M^{\perp} = \mathbf{L}(M) + \mathbf{L}(N) = \mathbf{L}(M \cup N)$. Protože $N \subseteq M^{\perp}$ je $M \cup N$ ortonormální množina a tedy je to ortonormální báze prostoru $\mathbf{V}$. □