Kapitola 13

Lineární zobrazení

Definice 13.1 *Jsou-li* $\mathbf{U}$ *a* $\mathbf{V}$ *vektorové prostory na tělesem* $\mathbf{T}$, *pak zobrazení* $A : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ *nazýváme* lineární zobrazení, *platí-li*

1. $A(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = A(\mathbf{x}) + A(\mathbf{y})$ *pro každé dva vektory* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{U}$,
2. $A(b\mathbf{x}) = bA(\mathbf{x})$ *pro každý skalár* $b \in \mathbf{T}$ *a každý vektor* $\mathbf{x} \in \mathbf{U}$.

Příklad 13.1 Obecný tvar lineárního zobrazení $A : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ je

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Příklad 13.2 Reflexe, zvětšení (homotetie), nafouknutí v různém měřítku ve dvou různách směrech, zkosení, rotace.

Věta 13.1 *Nechť* $\mathbf{U}, \mathbf{V}$ *jsou dva vektorové prostory nad tělesem* $\mathbf{T}$ *a nechť* $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ *je nějaká báze v* $\mathbf{U}$. *Pak pro každou volbu vektorů* $\mathbf{v}_i \in \mathbf{V}$, $i = 1, \ldots, n$, *existuje právě jedno lineární zobrazení* $A : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ *takové, že* $A(\mathbf{u}_i) = \mathbf{v}_i$ *pro každé* $i = 1, \ldots, n$.

Příklad 13.3 Každé lineární zobrazení $A : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ je tvaru $A(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$, kde $\mathbf{A}$ je reálná matice typu $m \times n$, jejíž j-tý sloupec $\mathbf{A}_{*j}$ se rovná $A(\mathbf{e}_j)$, pro každé $j = 1, \ldots, n$, $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ je standardní báze v $\mathbf{R}_n$.

Analogické tvrzení platí pro lineární zobrazení $A : \mathbf{T}^n \to \mathbf{T}^m$.

Definice 13.2 *Lineární zobrazení $A : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ se nazývá* monomorfismus, *je-li prosté, nazývá se* epimorfismus, *je-li A zobrazení na celý prostor $\mathbf{V}$, a nazývá se* isomorfismus, *je-li vzájemně jednoznačné (tj. prosté a na prostor $\mathbf{V}$).*

Definice 13.3 *Je-li $A : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ lineární zobrazení, pak množinu $\{\mathbf{u} \in \mathbf{U} : A(\mathbf{u}) = \mathbf{0}\}$ nazýváme* jádro *lineárního zobrazení A a označujeme ji* $\mathrm{Ker}\,(A)$. *Množinu $\{\mathbf{v} \in \mathbf{V} : \mathbf{v} = A(\mathbf{u})$ pro nějaké $\mathbf{u} \in \mathbf{U}\}$ nazýváme* obraz *lineárního zobrazení A a označujeme ji* $\mathrm{Im}\,(A)$.

Tvrzení 13.2 *Nechť $A : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ je lineární zobrazení. Pak platí:*

1. *jádro* $\mathrm{Ker}\,(A)$ *je podprostor* $\mathbf{U}$,
2. *obraz* $\mathrm{Im}\,(A)$ *je podprostor* $\mathbf{V}$,
3. *je-li A prosté zobrazení (tj. je-li monomorfismus), pak $A^{-1} : \mathrm{Im}\,(A) \to \mathbf{U}$ je také lineární zobrazení,*
4. *je-li A vzájemně jednoznačné zobrazení (tj. isomorfismus), pak $A^{-1} : \mathbf{V} \to \mathbf{U}$ je také lineární zobrazení.*

Tvrzení 13.3 *Je-li $\mathbf{A}$ matice typu $m \times n$ nad tělesem $\mathbf{T}$ a $A : \mathbf{T}^n \to \mathbf{T}^m$ je lineární zobrazení definované předpisem $A(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$ pro každé $\mathbf{x} \in \mathbf{T}^n$, pak platí*

1. $\mathrm{Ker}\,(A) = \mathbf{N}(\mathbf{A})$,
2. $\mathrm{Im}\,(A) = \mathbf{S}(\mathbf{A})$ *a* $\dim \mathrm{Im}\,(A) = r(\mathbf{A})$,
3. $\dim \mathrm{Ker}\,(A)) = n - \dim \mathrm{Im}\,(A)$.

Věta 13.4 *Pro libovolné lineární zobrazení $A : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ platí* $\dim \mathrm{Ker}\,(A) + \dim \mathrm{Im}\,(A) = \dim \mathbf{U}$.

Věta 13.5 *Buď $\mathbf{V}$ vektorový prostor dimenze n nad tělesem $\mathbf{T}$. Potom existuje isomorfismus $A : \mathbf{V} \to \mathbf{T}^n$.*

Poslední věta říká, že až na izomorfismus existuje pouze jediný vektorový prostor dimenze n nad tělesem $\mathbf{T}$, a to aritmetický vektorový prostor $\mathbf{T}^n$. Tento isomorfismus ale není jednoznačně určený, závisí na volbě báze ve $\mathbf{V}$. Různé volby báze dávají různé isomorfismy. Souřadnice vektorů se mohou měnit při různých volbách báze, nemění se ale vlastnosti $\mathbf{V}$, které na volbě báze nezávisí, jako je třeba lineární závislost nebo nezávislost nějaké množiny vektorů ve $\mathbf{V}$, lineární obal množiny vektorů ve $\mathbf{V}$, dimenze podprostorů $\mathbf{V}$, atd. Různé volby báze ve $\mathbf{V}$ dávají různé pohledy na prostor $\mathbf{V}$.

Nyní přeneseme na libovolné abstraktní prostory a lineární zobrazení poznatky o maticích lineárních zobrazení.

Definice 13.4 *Buď $A : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ lineární zobrazení, $\mathcal{X} = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ báze v $\mathbf{U}$ a $\mathcal{Y} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\}$ báze ve $\mathbf{V}$. Nechť je r_{ij}, kde $A(\mathbf{u}_j) = \sum_{i=1}^{m} r_{ij}\mathbf{v}_i$ pro každé $j = 1, \dots, n$. Potom matici (r_{ij}) typu $m \times n$ nazýváme* matice lineárního zobrazení $A : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ vzhledem k bázím $\mathcal{X}$ *a* $\mathcal{Y}$ *a označíme ji* $[A]_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}$.

Je-li $A : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ a $\mathcal{Y} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\}$ báze ve $\mathbf{V}$, pak maticí lineárního zobrazení A vzhledem k bázi $\mathcal{Y}$ *rozumíme matici zobrazení A vzhledem k bázím $\mathcal{Y}$ a $\mathcal{Y}$. Označujeme ji $[A]_{\mathcal{Y}}$*

V matici $[A]_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}$ jsou v j-tém sloupci souřadnice vektoru $A(\mathbf{u}_j)$ vzhledem k bázi $\mathcal{Y}$.

Lemma 13.6 *Jsou-li $A : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ a $B : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ linární zobrazení, pak také složené zobrazení $BA : \mathbf{U} \to \mathbf{W}$ je lineární zobrazení.*

Věta 13.7 *Nechť $A : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ a $B : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ jsou lineární zobrazení, $\mathcal{X} = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ je báze v $\mathbf{U}$, $\mathcal{Y} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\}$ je báze ve $\mathbf{V}$ a $\mathcal{Z} = \{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{u}_p\}$ je báze ve $\mathbf{W}$. Potom pro matici lineárního zobrazení $BA : \mathbf{U} \to \mathbf{W}$ vzhledem k bázím $\mathcal{X}$ a $\mathcal{Z}$ platí*

$$[BA]_{\mathcal{X},\mathcal{Z}} = [B]_{\mathcal{Y},\mathcal{Z}}[A]_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}.$$

Příklad 13.4 Vzorce pro sin a cos součtu dvou vektorů.

Příklad 13.5 Označme $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ vrcholy pravidelného n-úhelníka se středem v $\mathbf{0}$. Dokažte, že platí

$$\mathbf{s} = \sum_{i=1}^{n} = \mathbf{0}.$$

Řešení. Oznamčíme $A : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ otočení o úhel $\frac{2\pi}{n}$. Pak platí $A(\mathbf{s}) = \mathbf{s}$ a tedy $\mathbf{s} = \mathbf{0}$. $\square$

Definice 13.5 *Jsou-li $\mathcal{X}$ a $\mathcal{Y}$ dvě báze ve vektorovém prostoru* $\mathbf{V}$ *nad* $\mathbf{T}$*, pak matici identického zobrazení $I : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ vzhledem k bázím $\mathcal{X}$ a $\mathcal{Y}$ nazýváme* matice přechodu *od báze $\mathcal{X}$ k bázi $\mathcal{Y}$.*

Je-li $\mathcal{X} = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ a $\mathcal{Y} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\}$, pak se j-tý sloupec matice přechodu od $\mathcal{X}$ k $\mathcal{Y}$ rovná souřadnicím vektoru $I(\mathbf{u}_j) = \mathbf{u}_j$ vzhledem k bázi $\mathcal{Y}$. Definice 13.5 je tedy v souladu s Definicí 11.4. Srovnejte si rovněž Tvrzení 11.8 s Definicí 13.5.

Z definic 13.5 a 13.4 a Věty 13.7 plyne řada dalších tvrzení.

Tvrzení 13.8 *Jsou-li $\mathcal{X}$ a $\mathcal{Y}$ dvě báze ve vektorovém prostoru* $\mathbf{V}$ *nad* $\mathbf{T}$ *a* $\mathbf{P}$ *matice přechodu od báze $\mathcal{X}$ k bázi $\mathcal{Y}$, pak matice přechodu od báze $\mathcal{Y}$ k bázi $\mathcal{X}$ se rovná* $\mathbf{P}^{-1}$.

Tvrzení 13.9 *Jsou-li $\mathcal{X}$ a $\mathcal{Y}$ dvě báze ve vektorovém prostoru* $\mathbf{V}$ *nad* $\mathbf{T}$*, $A : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ lineární zobrazení a* $\mathbf{P}$ *matice přechodu od báze $\mathcal{X}$ k bázi $\mathcal{Y}$, pak platí*

$$[A]_{\mathcal{X}} = \mathbf{P}^{-1}[A]_{\mathcal{Y}}\mathbf{P}.$$