Kapitola 12

Abstraktní vektorové prostory

Definice 12.1 *Předpokládáme, že* $\mathbf{T}$ *je těleso. Dále předpokládáme, že* $\mathbf{V}$ *je nějaká množina, na které je definovaná operace sčítání a násobení prvků tělesa* $\mathbf{T}$ *s prvky množiny* $\mathbf{V}$. *Pokud tyto operace splňují následující podmínky, pak říkáme, že množina* $\mathbf{V}$ *spolu s těmito operacemi tvoří* vektorový prostor nad tělesem $\mathbf{T}$. *Podmínky pro sčítání jsou*

1. *platí* $(\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z}=\mathbf{x}+(\mathbf{y}+\mathbf{z})$ *pro libovolné* $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}\in\mathbf{V}$,
2. *platí* $\mathbf{x}+\mathbf{y}=\mathbf{y}+\mathbf{x}$ *pro libovolné dva prvky* $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbf{V}$,
3. *existuje prvek* $\mathbf{0}\in\mathbf{V}$ *takový, že* $\mathbf{0}+\mathbf{x}=\mathbf{x}$ *pro každý prvek* $\mathbf{x}\in\mathbf{V}$,
4. *ke každému prvku* $\mathbf{x}\in\mathbf{V}$ *existuje prvek* $-\mathbf{x}\in\mathbf{V}$, *pro který platí, že* $(-\mathbf{x})+\mathbf{x}=\mathbf{0}$.

   Dále následují axiomy pro násobení prvků tělesa $\mathbf{T}$ *s prvky množiny* $\mathbf{V}$*:*

5. *platí* $1\mathbf{x}=\mathbf{x}$ *pro jednotkový prvek* $1\in\mathbf{T}$ *a libovolný prvek* $\mathbf{x}\in\mathbf{V}$,
6. *platí* $a(b\mathbf{x})=(ab)\mathbf{x}$ *pro libovolné dva prvky* $a,b\in\mathbf{T}$ *a každý prvek* $\mathbf{x}\in\mathbf{V}$,
7. *platí* $(a+b)\mathbf{x}=a\mathbf{x}+b\mathbf{x}$ *pro libovolné dva prvky* $a,b\in\mathbf{T}$ *a každý prvek* $\mathbf{x}\in\mathbf{V}$,
8. *platí* $a(\mathbf{x}+\mathbf{y})=a\mathbf{x}+a\mathbf{y}$ *pro libovolný prvek* $a\in\mathbf{T}$ *a každé dva prvky* $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbf{V}$.

Prvky vektorového prostoru $\mathbf{V}$ *nazýváme také* vektory *a prvkům tělesa* $\mathbf{T}$ *v takovém případě říkáme* skaláry.

Formulace, že na množině $\mathbf{V}$ je definována operace sčítání znamená, že $\mathbf{x}+\mathbf{y} \in \mathbf{V}$ pro libodolné dva vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}$. A formulace,že na množině $\mathbf{V}$ je definována operace násobení prvků tělesa $\mathbf{T}$ s prvky množiny $\mathbf{V}$ znamená, že součin $a\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ pro libovolné prvky $a \in \mathbf{T}$ a $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$.

Stejně jako v případě těles nejdříve uvedeme několik bezprostředních důsledků axiomů vektorového prostoru.

Tvrzení 12.1 *V každém vektorovém prostoru* $\mathbf{V}$ *nad tělesem* $\mathbf{T}$ *platí*

1. *nulový vektor* $\mathbf{0}$ *je určený jednoznačně*
2. *opačný vektor* $-\mathbf{x}$ *je určený vektorem* $\mathbf{x}$ *jednoznačně,*
3. $-(-\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ *pro každý vektor* $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$,
4. $0\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *pro každý vektor* $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$,
5. $a\mathbf{0} = \mathbf{0}$ *pro každý skalár* $a \in \mathbf{T}$,
6. $-\mathbf{x} = (-1)\mathbf{x}$ *pro každý vektor* $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$,
7. *jestliže* $a\mathbf{x} = \mathbf{0}$, *pak buď* $a = 0$ *nebo* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Aritmetický vektorový prostor $\mathbf{T}^n$ dimenze n nad tělesem $\mathbf{T}$ je základním příkladem vektorového prostoru. Z Tvrzení 1.1 a Tvrzení 1.2 plyne, že také množina $\mathbf{R}^{m\times n}$ reálných matic tvaru $m \times n$ spolu s operacemi sčítání matic a násobení matic reálnými čísly je vektorový prostor nad tělesem reálných čísel $\mathbf{R}$. Podobně množina $\mathbf{T}^{m\times n}$ všech matic tvaru $m \times n$ s prvky z tělesa $\mathbf{T}$ spolu s operacemi sčítání matic a násobení matic prvky tělesa $\mathbf{T}$ je vektorový prostor nad tělesem $\mathbf{T}$.

Příklad 12.1

1. Množina všech komplexních čísel spolu s operací obvyklého sčítání a operací násobení komplexního čísla reálným číslem tvoří vektorový prostor nad tělesem reálnýcj čísel $\mathbf{R}$.
2. Množina všech reálných čísel spolu s operací obvyklého sčítání a násobení reálného čísla racionálním číslem tvoří vektorový prostor nad tělesem racionálních čísel $\mathbf{Q}$.

Následují příklady vektorových prostorů, jejichž prvky nejsou ani vektory v obvyklém smyslu slova ani matice.

Příklad 12.2

Množina $\mathbf{R}[x]$ všech reálných polynomů spolu s operacemi sčítání a násobení polynomů reálným číslem tvoří vektorový prostor nad tělesem reálných čísel $\mathbf{R}$. (Ověřte všechny axiomy!)

Podobně tvoří vektorový prostor nad tělesem $\mathbf{R}$ množina $\mathbf{R}_{\leq n}[x]$ všech reálných polynomů stupně nejvýše n (včetně nulového polynomu) spolu s operacemi sčítání polynomů a násobení polynomů reálným číslem.

Reálná čísla v předchozích dvou odstavcích nejsou důležitá. Stejně tak můžeme uvažovat množinu $\mathbf{T}[x]$ polynomů jedné proměnné s koeficienty v libovolném tělese $\mathbf{T}$. Spolu s operacemi sčítání polynomů a násobení polynomů prvky tělesa $\mathbf{T}$ tvoří množina $\mathbf{T}[x]$ vektorový prostor nad tělesem $\mathbf{T}$.

Také množina $\mathbf{T}_{\leq n}[x]$ všech polynomů stupně nejvýše n (včetně nulového polynomu) s koeficienty v tělese $\mathbf{T}$ tvoří s operacemi sčítání polynomů a násobení polynomů prvky tělesa $\mathbf{T}$ vektorový prostor nad $\mathbf{T}$.

Další příklady vektorových prostorů jsou tvořené funkcemi.

Příklad 12.3 Množina všech reálných funkcí $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ definovaných na uzavřeném intervalu $[0,1]$ tvoří vektorový prostor nad $\mathbf{R}$ spolu s operacemi

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \qquad (kf)(x) = kf(x).$$

Se stejně definovanými operacemi tvoří vektorový prostor nad $\mathbf{R}$ také množina všech *spojitých* reálných funkcí definovaných na intervalu $[0,1]$.

Další vektorový prostor nad $\mathbf{R}$ tvoří množina všech *diferencovatelných* funkcí $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ spolu se stejnými operacemi jako v předchozích dvou odstavcích. (Ověřte si ve všech třech případech platnost všech axiomů vektorového prostoru.)

Každá diferencovatelná funkce $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ je spojitá na celém intervalu $[0,1]$. Množina všech diferencovatelných funkcí definovaných na intervalu $[0,1]$ je tak podmnožinou množiny spojitých funkcí na intervalu $[0,1]$. Součet$f+g$ dvou diferencovatelných funkcí $f,g : [0,1] \to \mathbf{R}$ nezávisí na tom, sčítáme-li je jako diferencovatelné funkce nebo jako spojité funkce. Důležité ale je, že jsou-li f,g diferencovatelné, pak také jejich součet $f+g$ je diferencovatelná funkce. Podobně ani součin kf reálného čísla k s diferencovatelnou funkcí f nezávisí na tom, považujeme-li f za diferencovatelnou funkci nebo za spojitou. Podstatné je, že součin kf je diferencovatelná funkce, pokud je f diferencovatelná funkce.

Prostor diferencovatelných reálných funkcí definovaných na intervalu $[0,1]$ je obsažený v prostoru spojitých funkcí na $[0,1]$ nejen ve smyslu inkluze, ale také tím, že se v něm počítá s diferencovatelnými funkcemi stejně, jako bychom s nimi počítali ve větším prostoru spojitých funkcí. Tento vztah mezi dvěma vektorovými prostory nad stejným tělesem je důležitý a je obsahem následující definice.

Definice 12.2 *Předpokládáme, že* $\mathbf{V}$ *je vektorový prostor nad tělesem* $\mathbf{T}$. *Je-li neprázdná množina* $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{V}$ *vektorový prostor nad tělesem* $\mathbf{T}$ *spolu s operacemi definovanými v prostoru* $\mathbf{V}$, *tj. splňuje-li axiomy 1-8 z Definice 12.1, pak říkáme, že prostor* $\mathbf{U}$ *je* podprostorem *prostoru* $\mathbf{V}$.

Ve skutečnosti není nutné ověřovat platnost všech osmi axiomů vektorového prostoru pro operace definované na podmnožině $\mathbf{U}$.

Tvrzení 12.2 *Neprázdná podmnožina* $\mathbf{U}$ *vektorového prostoru* $\mathbf{V}$ *nad tělesem* $\mathbf{T}$ *spolu s operacemi definovanými v prostoru* $\mathbf{V}$ *je podprostor prostoru* $\mathbf{V}$ *právě když je uzavřená na obě operace.*

Důkaz. Pokud je $\mathbf{U}$ podprostor prostoru $\mathbf{V}$, musí být uzavřený na obě operace.

Naopak, pokud je $\mathbf{U}$ uzavřený na obě operace, vezmeme libovolný prvek $\mathbf{x} \in \mathbf{U}$ (množina $\mathbf{U}$ je neprázdná!). Pak také $(-1)\mathbf{x} = -\mathbf{x} \in \mathbf{U}$. Proto platí také $\mathbf{0} = (-\mathbf{x}) + \mathbf{x} \in \mathbf{U}$. Operace sčítání na množině $\mathbf{U}$ tak splňuje axiomy 3 a 4. Asociativita 1 a komutativita 2 platí proto, že operace sčítání prvků množiny $\mathbf{U}$ se shoduje s operací sčítání těchto prvků v prostoru $\mathbf{V}$, která komutativní a asociativní je.

Ze stejného důvodu platí pro operaci násobení prvků tělesa $\mathbf{T}$ s prvky množiny $\mathbf{U}$ všechny axiomy 5-8. □

Každý vektorový prostor $\mathbf{V}$ nad tělesem $\mathbf{T}$ má určitě dva podprostory. Jenodprvkový podprostor $\mathbf{N} = \{\mathbf{0}\}$ a celý prostor $\mathbf{V}$. Těmto podprostorům říkáme *triviální* podprostory.

Úloha 12.1 Najděte všechny podprostory aritmetického reálného prostoru $\mathbf{R}^2$.

Řešení. Pro každý nenulový vektor $\mathbf{a} = (a_1, a_2)^T$ označíme symbolem $\mathbf{L}(\mathbf{a})$ množinu $\{(ka_1, ka_2)^T : k \in \mathbf{R}\}$. Snadno ověříme, že množina $\mathbf{L}(\mathbf{a})$ splňuje oba axiomy uzavřenosti a určuje tak podprostor prostoru $\mathbf{R}^2$.

Nyní budeme uvažovat podprostor $\mathbf{L}(\mathbf{a})$ a vektor $\mathbf{b} = (b_1, b_2)^T \notin \mathbf{L}(\mathbf{a})$. To znamená, že $(b_1, b_2)^T \neq (ka_1, ka_2)^T$ pro libovolné reálné číslo k. Pro jakýkoliv vektor $\mathbf{c} = (c_1, c_2)^T \in \mathbf{R}^2$ uvažujeme soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2. \end{aligned}$$

Z předpokladu $(b_1, b_2)^T \neq (ka_1, ka_2)^T$ vyplývá, že (sloupcová) hodnost matice

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$$

této soustavy se rovná 2, protože hodnost této matice a matice k ní transponované se rovnají podle Tvrzení 3.15. Soustava má proto jednoznačné řešení. Existují tedy reálná čísla x, y, pro která platí

$$x\mathbf{a} + y\mathbf{b} = \mathbf{c}.$$

Každý podprostor prostoru $\mathbf{R}^2$ obsahující vektory $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$ musí obsahovat vektory $x\mathbf{a}$ a $y\mathbf{b}$ vzhledem k axiomu uzavřenosti (N0) a kvůli axiomu uzavřenosti na sčítání (A0) také vektor $x\mathbf{a} + y\mathbf{b} = \mathbf{c}$. Každý podprostor prostoru $\mathbf{R}^2$ obsahující vektory $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b} \notin \mathbf{L}(\mathbf{a})$ se proto rovná celému prostoru $\mathbf{R}^2$. Kromě triviálních podprostorů $\{\mathbf{0}\}$ a $\mathbf{R}^2$ jsou tak podprostory $\mathbf{L}(\mathbf{a}) = \{(ka_1, ka_2)^T : k \in \mathbf{R}\}$ jedinými netriviálními podprostory $\mathbf{R}^2$. □

Každý podprostor $\mathbf{L}(\mathbf{a}) = \{k\mathbf{a} : k \in \mathbf{R}\}$ je přímka procházející počátkem. Podobně jako v předchozí úloze můžete vyřešit následující cvičení.

Cvičení 12.1 *Dokažte, že netriviální podprostory třídimenzionálního reálného aritmetického prostoru jsou přímky a roviny procházející počátkem.*

Cvičení 12.2 *Těleso reálných čísel lze v předchozí úloze a cvičení bez problémů nahradit obecným tělesem $\mathbf{T}$. Najděte všechny netriviální podprostory aritmetických vektorových prostorů $\mathbf{T}^2$ a $\mathbf{T}^3$ nad tělesem $\mathbf{T}$.*

Všechny poznatky o podprostorech artimetických vektorových prostorů můžeme přenést na obecné vektorové prostory. Důkazy jsou zcela stejné jako v případě aritmetických vektorových prostorů.

Tvrzení 12.3 *Buď $\mathbf{T}$ libovolné těleso a $\mathbf{V}$ vektorový prostor nad tělesem $\mathbf{T}$.*

1. *Pro každý podprostor $\mathbf{U}$ prostoru $\mathbf{V}$ platí $\mathbf{0} \in \mathbf{U}$,*

2. *průnik libovolného souboru podprostorů* $\mathbf{V}$ *je opět podprostor* $\mathbf{V}$,

3. *pro každou podmnožinu* $X \subseteq \mathbf{V}$ *existuje nejmenší (v uspořádání inkluzí) podprostor* $\mathbf{V}$, *který ji obsahuje.*

Definice 12.3 *Nejmenší podprostor vektorového prostoru* $\mathbf{V}$ *obsahující množinu* $X \subseteq \mathbf{V}$ *nazýváme* lineární obal množiny X *a označujeme* $\mathbf{L}(X)$.

Tvrzení 12.4 *Je-li* X *podmnožiny* $\mathbf{V}$, *pak platí*

$$\mathbf{L}(X) = \{a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2 + \cdots + a_k\mathbf{x}_k : \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k \in X, a_1, \ldots, a_k \in \mathbf{T}\}.$$

Také pojem lineární kombinace vektorů můžeme definovat v libovolném vektorovém prostoru.

Definice 12.4 *Je-li* $\mathbf{V}$ *vektorový prostor nad tělesem* $\mathbf{T}$ *a* $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \in \mathbf{V}$, *pak libovolný vektor* $a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_k\mathbf{v}_k$, *kde* $a_1, \ldots, a_k \in \mathbf{T}$ *nazýváme* lineární kombinace *vektorů* $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \in \mathbf{V}$.

Všimněte ai, že v lineární kombinaci je vždy *konečný* počet vektorů. Nulový vektor $\mathbf{0}$ považujeme za lineární kombinaci *prázdného* systému vektorů. Podle Tvrzení 4.3 je tedy lineární obal $\mathbf{L}(X)$ množiny $X \subseteq \mathbf{V}$ rovný množině všech možných lineárních kombinací vektorů z X.

Definice 12.5 *Libovolná množina* $X \subseteq \mathbf{V}$, *pro kterou platí* $\mathbf{L}(X) = \mathbf{V}$ *se nazývá* množina generátorů *nebo* generující množina *ve* $\mathbf{V}$.

Dále přeneseme do obecných vektorových prostorů poznatky o lineární nezávislosti.

Definice 12.6 *Konečná množina vektorů* $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ *prostoru* $\mathbf{V}$ *nad tělesem* $\mathbf{T}$ *se nazývá* lineárně nezávislá *ve* $\mathbf{V}$, *pokud z rovnosti* $a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$ *plyne* $a_1 = \cdots = a_k = 0$. *Nekonečná množina* $X \subseteq \mathbf{V}$ *se nazývá* lineárně nezávislá *ve* $\mathbf{V}$, *pokud je každá její konečná podmnožina lineárně nezávislá. A libovolná množina* X *vektorů z* $\mathbf{V}$ *se nazzývá* lineárně závislá *ve* $\mathbf{V}$, *pokud není lineárně nezávislá ve* $\mathbf{V}$.

Příklad 12.4 Význam tělesa pro lineární nezávislost.

Příklad 12.5 Lineárně nezávislá množina v $\mathbf{R}[x]$.

Důkazy následujících tvrzení lze najít u analogických tvrzení v kapitole o aritmetických vektorových prostorech. Tam jsme v důkazech používali pouze axiomy abstraktního vektorového prostoru.

Tvrzení 12.5 *Množina $X \subseteq \mathbf{V}$ je lineárně nezávislá ve $\mathbf{V}$ právě když pro každý vektor $\mathbf{x} \in X$ platí $\mathbf{x} \notin \mathbf{L}(X \setminus \{\mathbf{x}\})$.*

Definice 12.7 Báze *ve vektorovém prostoru $\mathbf{V}$ nad tělesem $\mathbf{T}$ je lineárně nezávislá množina X generátorů ve $\mathbf{V}$.*

Každý vektorový prostor má nějakou bázi.

Příklad 12.6 Příklad báze v $\{\mathbf{0}\}$ a v $\mathbf{T}[x]$.

Každý vektorový prostor má nějakou bázi, obecně ale nebudeme dokazovat, vyžadovalo by to axiom výběru. Budeme se zabývat pouze prostory, které mají nějakou konečnou bázi.

Definice 12.8 *Vektorový prostor $\mathbf{V}$ nad tělesem $\mathbf{T}$ se nazývá* konečně-dimenzionální, *pokud v něm existuje nějaká konečná báze.*

Podobně také platí Steinitzova věta a její důsledky v libovolném vektorovém prostoru.

Věta 12.6 ***Steinitzova věta o výměně***
Nechť $\mathbf{U}$ je podprostor $\mathbf{V}$, $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k\} \subseteq \mathbf{U}$ je množina lineárně nezávislá ve $\mathbf{V}$, a $\{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_l\} \subseteq \mathbf{U}$ generuje $\mathbf{U}$. Pak platí $k \leq l$ a po vhodném přeuspořádání vektorů $\mathbf{y}_j$ množina $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k, \mathbf{y}_{k+1}, \dots, \mathbf{y}_l\}$ generuje podprostor $\mathbf{U}$.

Důkaz. Indukcí podle k. □

Věta 12.7 *Všechny báze konečně-dimenzionálního vektorového prostpru VV mají stejný počet prvků.*

Tvrzení 12.8 *Pro podmnožinu $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k\}$ konečně-dimenzionálního prostoru $\mathbf{V}$ jsou následující tři podmínky ekvivalentní*

1. *$\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k\}$ je báze $\mathbf{V}$,*

2. *$\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k\}$ je minimální (co do počtu prvků) generující množina v $\mathbf{U}$,*

3. *$\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k\}$ je maximální (co do počtu prvků) lineárně nezávislá podmnožina $\mathbf{U}$.*

Věta 12.9 *Je-li* $\mathbf{V}$ *konečně-dimenzionální vektorový prostor nad* $\mathbf{T}$ *a* $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k\} \subseteq \mathbf{V}$ *je lineárně nezávislá množina ve* $\mathbf{V}$*, pak lze* $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k\}$ *rozšířit do báze* $\mathbf{V}$*.*

Definice 12.9 *Počet prvků báze konečně-dimenzionálního vektorového prostoru* $\mathbf{V}$ *nazýváme* dimenze $\mathbf{V}$ *a značíme* $\dim \mathbf{V}$*.*

Tvrzení 12.10 *Je-li* $\mathbf{U}$ *podprostor konečně-dimenzionálního prostoru* $\mathbf{V}$*, pak je* $\mathbf{U}$ *také konečně-dimenzionální a platí* $\dim \mathbf{U} \leq \dim \mathbf{V}$*.*

Příklad 12.7 Podprostory vektorového prostoru $\mathbf{V}$ dimenze 2 nad tělesem $\mathbf{T}$.

Věta 12.11 ***O dimenzi součtu a průniku podprostorů***
Jsou-li $\mathbf{U}, \mathbf{W}$ *podprostory konečně-dimenzionálního prostoru* $\mathbf{V}$*, pak platí*

$$\dim(\mathbf{U} \cap \mathbf{W}) + \dim(\mathbf{U} + \mathbf{W}) = \dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{W}.$$

Tvrzení 12.12 *Je-li* $\mathcal{X} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ *báze vektorového prostoru* $\mathbf{V}$ *nad tělesem* $\mathbf{T}$*, pak pro každý vektor* $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ *existují jednoznačně určené skaláry* $a_1, \dots, a_n \in \mathbf{T}$ *takové, že platí*

$$\mathbf{x} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n.$$

Definice 12.10 *Je-li* $\mathcal{X} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ *báze vektorového prostoru* $\mathbf{V}$ *nad tělesem* $\mathbf{T}$ *a* $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$*, pak jednoznačně určené skaláry* $a_1, \dots, a_n \in \mathbf{T}$*, pro které platí*

$$\mathbf{x} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n,$$

nazýváme souřadnice vektoru $\mathbf{x}$ vzhledem k bázi $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ *a aritmetický vektor* $(a_1, \dots, a_n)^T \in \mathbf{T}^n$ *nazýváme* vektor souřadnic $\mathbf{x}$ vzhledem k bázi $\mathcal{X}$ *a označujeme jej* $[\mathbf{x}]_{\mathcal{X}}$*.*