Kapitola 7

Skalární součin

V této kapitole budeme pracovat pouze nad tělesy reálných a komplexních čísel. Symbolem $\overline{x}$ budeme označovat číslo komplexně sdružené k číslu x, tj. je-li $x = a + \mathrm{i}b$, pak $\overline{x} = a - \mathrm{i}b$.

Definice 7.1 *Je-li* $\mathbf{A} = (a_{ij})$ *matice nad komplexními čísly typu* $m \times n$, *pak matici* $\mathbf{A}^* = (b_{ij})$ *typu* $n \times m$ *nazýváme* hermitovsky sdružená *k matici* $\mathbf{A}$, *pokud* $b_{ij} = \overline{a}_{ji}$ *pro každé* i, j.

Definice 7.2 *Jsou-li* $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$ *a* $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)^T$ *dva aritmetické vektory z* $\mathbf{C}^n$, *pak definujeme* standardní skalární součin *vektorů* $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ *jako číslo*

$$< \mathbf{x}, \mathbf{y} >= \mathbf{x}^* \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} \overline{x}_i y_i.$$

V případě, že $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ *jsou prvky reálného aritmetického prostoru* $\mathbf{R}^n$, *pak standardní skalární součin vektorů* $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ *je číslo*

$$< \mathbf{x}, \mathbf{y} >= \mathbf{x}^T \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Tvrzení 7.1 Základní vlastnosti skalárního součinu. *Jsou-li* $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbf{C}^n$ *(nebo* $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbf{R}^n$*), pak platí*

1. $< \mathbf{x}, \mathbf{y} >$ *je nezáporné reálné číslo,*

2. $< \mathbf{x}, \mathbf{x} >= 0$ *právě když* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$,

3. $< \mathbf{x}, a\mathbf{y} >= a < \mathbf{x}, \mathbf{y} >$ *pro každý skalár* a,

4. $< \mathbf{x}, \mathbf{y} + \mathbf{z} >=< \mathbf{x}, \mathbf{y} > + < \mathbf{x}, \mathbf{z} >$,

5. $< \mathbf{x}, \mathbf{y} >= \overline{< \mathbf{y}, \mathbf{x} >}$, *(nebo* $< \mathbf{x}, \mathbf{y} >=< \mathbf{y}, \mathbf{x} >$*).*

Cvičení 7.1 *Dokažte pouze s použitím Tvrzení 7.1, že platí pro každé vektory* $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbf{C}^n$ *a skalár* $a \in \mathbf{C}$ *(nebo* $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbf{R}^n$ *a skalár* $a \in \mathbf{R}$*)*

1. $< \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z} >=< \mathbf{x}, \mathbf{z} > + < \mathbf{y}, \mathbf{y} >$,

2. $< a\mathbf{x}, \mathbf{y} >= \overline{a} < \mathbf{x}, \mathbf{y} >$ *(nebo* $< a\mathbf{x}, \mathbf{y} >= a < \mathbf{x}, \mathbf{y} >$*),*

3. $< \mathbf{0}, \mathbf{x} >=< \mathbf{x}, \mathbf{0} >= 0$.

Pomocí skalárního součinu můžeme definovat délku (jinak řečeno normu) vektorů a úhel mezi nimi.

Definice 7.3 Euklidovská norma *vektoru* $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbf{C}^n$ *je definována jako číslo*

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{< \mathbf{x}, \mathbf{x} >} = \sqrt{\mathbf{x}^* \mathbf{x}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}.$$

Je-li $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$*, pak*

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{< \mathbf{x}, \mathbf{x} >} = \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{x}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

Cvičení 7.2 *Dokažte, že pro euklidovskou normu libovolného vektoru* $\mathbf{x} \in \mathbf{C}^n$ *(nebo* $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$*) a libovolný skalár a platí*

1. $\|\mathbf{x}\| \geq 0$,

2. $\|\mathbf{x}\| = 0$ *právě když* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$,

3. $\|a\mathbf{x}\| = |a| \cdot \|\mathbf{x}\|$.

V následující větě dokážeme důležitou *Cauchy-Schwartzovu-Bunjakovského nerovnost.*

Věta 7.2 *Cauchy-Schwartzova-Bunjakovského nerovnost Pro libovolné dva vektory* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{C}^n$ *(nebo* $\mathbf{R}^n$*) platí*

$$| < \mathbf{x}, \mathbf{y} > | \leq \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|,$$

rovnost nastává právě když $\mathbf{y} = a\mathbf{x}$ *pro nějaký skalár* $a \in \mathbf{C}$.

Následující trojúhelníková nerovnost platí jak pro komplexní tak pro reálné vektory.

Tvrzení 7.3 *Pro libovolné dva vektory* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{C}^n$ *(*$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$*) platí*

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|.$$

Příklad 7.1 Geometrický význam skalárního součinu dvou vektorů z $\mathbf{R}^n$.

Definice 7.4 *Dva vektory* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{C}^n$ *(nebo* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$*) nazýváme* kolmé, *platí-li* $< \mathbf{x}, \mathbf{y} >= 0$.

Definice 7.5 *Množina vektorů* $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\} \subseteq \mathbf{C}^n$ *(nebo* $\mathbf{R}^n$*) se nazývá* ortogonální, *platí-li* $< \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j >= 0$ *kdykoliv* $i \neq j$. *Ortogonální množina se nazývá* ortonormální, *platí-li navíc* $\|\mathbf{u}_i\| = 1$ *pro každé* $i = 1, \ldots, k$.

Tvrzení 7.4 *Každá ortogonální množina vektorů v* $\mathbf{C}^n$ *(nebo v* $\mathbf{R}^n$*) je lineárně nezávislá.*

Definice 7.6 Ortonormální báze *v podprostoru* $\mathbf{P} \subseteq \mathbf{C}^n$ *(nebo* $\mathbf{P} \subseteq \mathbf{R}^n$*) je báze* $\mathbf{P}$*, která je současně ortonormální množinou.*

Tvrzení 7.5 *Buď* $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ *ortonormální báze podprostoru* $\mathbf{P}$ *prostoru* $\mathbf{C}^n$ *(nebo* $\mathbf{R}^n$*) a* $\mathbf{x} \in \mathbf{P}$. *Pak platí*

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{k} < \mathbf{u}_i, \mathbf{x} > \mathbf{u}_i.$$

Definice 7.7 *Je-li* $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ *ortonormální báze podprostoru* $\mathbf{P}$ *prostoru* $\mathbf{C}^n$ *(nebo* $\mathbf{R}^n$*) a* $\mathbf{x} \in \mathbf{P}$, *pak vyjádření*

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{k} < \mathbf{u}_i, \mathbf{x} > \mathbf{u}_i.$$

nazýváme Fourierův rozklad *vektoru* $\mathbf{x}$ *vzhledem k bázi* $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ *a koeficienty* $< \mathbf{u}_i, \mathbf{x} >$ *tohoto rozkladu nazýváme* Fourierovy koeficienty *vektoru* $\mathbf{x}$ *vzhledem k bázi* $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k\}$.

Tvrzení 7.6 *Je-li* $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ *ortonormální báze podprostoru* $\mathbf{P}$ *prostoru* $\mathbf{C}^n$ *(nebo* $\mathbf{R}^n$*) a* $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^k a_i\mathbf{u}_i$*,* $\mathbf{y} = \sum_{i=1}^k b_i\mathbf{u}_i$*, pak platí*

$$< \mathbf{x}, \mathbf{y} >= \sum_{i=1}^{k} \overline{a}_i b_i.$$

Kapitolu o skalárním součinu zakončíme obecnou formulací *Pythagorovy věty.*

Tvrzení 7.7 Pythagotova věta *Vektory* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$ *jsou ortogonální právě tehdy když platí*

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2.$$