Kapitola 6

Determinanty

Definice 6.1 *Je-li* $\mathbf{A} = (a_{ij})$ *čtvercová matice řádu* n *s prvky z tělesa* $\mathbf{T}$, *pak definujeme* determinant *matice* $\mathbf{A}$ *jako číslo*

$$\det \mathbf{A} = \sum_{p \in S_n} \operatorname{sgn} p \cdot a_{1p(1)} a_{2p(2)} \cdots a_{np(n)} \in \mathbf{T}.$$

Determinant matice $\mathbf{A}$ *označujeme rovněž* $|\mathbf{A}|$.

Pro zjednodušení zápisu budeme nadále v definici determinantu používat označení $p_i = p(i)$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$ a $p \in S_n$.

Příklad 6.1 Vypočtěte determinanty matic druhého a třetího řádu.

Lemma 6.1 *Je-li* $\mathbf{A} = (a_{ij})$ *horní trojúhelníková matice, pak* $\det \mathbf{A} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$.

Důkaz. Matice $\mathbf{A}$ je horní trojúhelníková právě když $a_{ij} = 0$ kdykoliv $i > j$. Dokážeme, že pro jakoukoliv permutaci $p \neq \imath$ je součin $a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n} = 0$. Protože předpokládáme, že p je neindentivcká permutace, existuje $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ takové, že $p(j) \neq j$. Je-li $p(j) < j$, je prvek $a_{jp_j} = 0$ a tedy celý součin $a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n} = 0$. Pokud $p(j) > j$, označíme k délku cyklu obsahující prvky $j, p(j)$. Tento cyklus se pak rovná $(j, p(j), p^2(j), \ldots, p^{k-1}(j))$. Je-li tato posloupnost rostoucí, platí $j < p^{k-1}(j)$. Označíme $i = p^{k-1}(j)$. Potom $p(i) = j < i$ a prvek $a_{ip_i} = 0$. V opačném případě existuje $l < k - 1$ takové, že $p^l(j) > p^{l+1}(j)$. Opět označíme $i = p^l(j)$ a dostaneme, že $i > p(i)$. I v tomto případě je tak $a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n} = 0$.

V součtu definujícím determinant tak můžeme vynechat všechny sčítance pro neindentické permutace. Zbývá jediný sčítanec pro $p = \imath$, který se rovná $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$. A protože identická permutace je sudá, je tentop sčítanec se znaménkem $+$. $\Box$

Geometrický význam determinasntů matic druhého a třetího řádu.

Tvrzení 6.2 *Pro každou čtvercovou matici* $\mathbf{A} = (a_{ij})$ *řádu* n *platí*

$$\det \mathbf{A} = \det \mathbf{A}^T.$$

Důkaz. Označme si transponovanou matici $\mathbf{A}^T = \mathbf{B} = (b_{ij})$. Pro libovolnou permutaci $p = (p_1, p_2 \ldots, p_n) \in S_n$ (zápis tabulkou) je součin $a_{1p_1}a_{1p_2}\cdots a_{np_n} = b_{p_11}b_{p_22}\cdots b_{p_nn}$. Součin $a_{1p_2}a_{1p_2}\cdots a_{np_n}$ se při výpočtu $\det \mathbf{A}$ vyskytuje se znaménkem sgn p, zatímco tentýž součin $b_{p_11}b_{p_22}\cdots b_{p_nn}$ odpovídá při výpočtu $\det \mathbf{B}$ permutaci p^{-1} a má tedy znaménko sgn $p^{-1} =$ sgn p. V součtech definujících $\det \mathbf{A}$ a $\det \mathbf{B}$ se tak vyskytují stejné součiny se stejným znaménkem, proto $\det \mathbf{A} = \det \mathbf{B} = \det \mathbf{A}^T$. $\Box$

Tvrzení 6.3 *Má-li matice* $\mathbf{A}$ *řádu* n *dva stejné řádky, pak* $\det \mathbf{A} = 0$.

Důkaz. Předpokládáme, že $\mathbf{A}_{i*} = \mathbf{A}_{j*}$ pro $i < j$, tj. $a_{ik} = a_{jk}$ pro $k = 1, 2, \ldots, n$. Označme $t = (i, j)$ transpozici, která prohazuje i-tý a j-tý řádek. Zvolíme libovolnou permutaci $p \in S_n$ a podíváme se, jaké součiny v součtu definujícím $\det \mathbf{A}$ určují permutace p a $q = p \circ (i, j) = p \circ t$. Platí $q(i) = p(j)$, $q(j) = p(i)$ a $q(k) = p(k)$ pro $k \neq i, j$. Permutace p určuje součin

$$\operatorname{sgn} p \cdot a_{1p_1} \cdots a_{ip_i} \cdots a_{jp_j} \cdots a_{np_n},$$

zatímco permutace $q = p \circ t$ určuje součin

$$\begin{aligned}
& \operatorname{sgn} q \cdot a_{1q_1} \cdots a_{iq_i} \cdots a_{jq_j} \cdots a_{nq_n} = \\
= \ & \operatorname{sgn} (p \circ t) \cdot a_{1q_1} \cdots a_{iq_i} \cdots a_{jq_j} \cdots a_{nq_n} = \\
= \ & -\operatorname{sgn} p \cdot a_{1p_1} \cdots a_{ip_j} \cdots a_{jp_i} \cdots a_{np_n} = \\
= \ & -\operatorname{sgn} p \cdot a_{1p_1} \cdots a_{ip_i} \cdots a_{jp_j} \cdots a_{np_n}.
\end{aligned}$$

Je $q = p \circ t \neq p$ neboť jedna z permutací p, q je sudá a druhá lichá podle Tvrzení 5.5. Součet součinů určených permutacemi p, q se tak rovná

$$\operatorname{sgn} p \cdot a_{1p_1} \cdots a_{ip_i} \cdots a_{jp_j} \cdots a_{np_n} + \operatorname{sgn} q \cdot a_{1q_1} \cdots a_{iq_i} \cdots a_{jq_j} \cdots a_{nq_n} = 0.$$

Celou množinu indexů, tj. symetrickou grupu S_n, rozložíme do disjunktních dvojic permutací $\{p, p \circ t\}$. Tyto dvojice jsou skutečně disjunktní. Z rovnosti permutací $p = r$ plyne rovnost $p \circ t = r \circ t$. Podobně z rovnosti $p \circ t = r \circ t$ vyplývá $p = (p \circ t) \circ t = (r \circ t) \circ t = r$ a rovnost $p = r \circ t$ platí právě když $p \circ t = (r \circ t) \circ t = r$. Pokud se tedy dvě dvojice $\{p, p \circ t\}$ a $\{r, r \circ t\}$ protínají, musí se rovnat. Celý součet

$$\sum_{p \in S_n} \text{sgn } p \cdot a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n} \in \mathbf{T}.$$

definující det $\mathbf{A}$ tak můžeme rozložit do neprotínajících se dvojic, z nichž součet každé dvojice se rovná 0. Proto také

$$\det \mathbf{A} = \sum_{p \in S_n} \text{sgn } p \cdot a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n} \in \mathbf{T} = 0.$$

□

Věta 6.4 *Předpokládáme, že* $\mathbf{A} = (a_{ij})$ *je čtvercová matice řádu* n *a* $\mathbf{B} = (b_{ij})$ *je matice, kterou dostaneme z matice* $\mathbf{A}$ *nějakou elementární řádkovou úpravou, pak*

- $\det \mathbf{B} = -\det \mathbf{A}$, *pokud jsme* $\mathbf{B}$ *dostali z* $\mathbf{A}$ *prohozením dvou řádků,*

- $\det \mathbf{B} = c \cdot \det \mathbf{A}$, *pokud jsme* $\mathbf{B}$ *dostali z* $\mathbf{A}$ *vynásobením některého řádku prvkem* $0 \neq c \in \mathbf{T}$,

- $\det \mathbf{B} = \det \mathbf{A}$, *pokud jsme dostali* $\mathbf{B}$ *z* $\mathbf{A}$ *pomocí třetí elementární řádkové úpravy.*

Důkaz. V případě první elementární úpravy platí $\mathbf{B}_{i*} = \mathbf{A}_{j*}$ a $\mathbf{B}_{j*} = \mathbf{A}_{j*}$ pro nějaké indexy $i < j$, a $\mathbf{B}_{k*} = \mathbf{A}_{k*}$ pro $k \neq i, j$. Porovnáme součin určený nějakou permutací $p \in S_n$ v součtu definujícím $\det \mathbf{A}$ a součin určený permutací $q = p \circ t$ v součtu definujícím $\det \mathbf{B}$. Stejně jako v důkazu předchozího tvrzení označuje t transpozici (i, j). Platí

$$\begin{aligned} &\text{sgn } q \cdot b_{1q_1} \cdots b_{iq_i} \cdots b_{jq_j} \cdots b_{nq_n} = \text{sgn}\,(p \circ t) \cdot a_{1p_1} \cdots a_{jp_j} \cdots a_{ip_i} \cdots a_{np_n} = \\ &= -\text{sgn } p \cdot a_{1p_1} \cdots a_{ip_i} \cdots a_{jp_j} \cdots a_{np_n}. \end{aligned}$$

V součtech definujících $\det \mathbf{B}$ a $\det \mathbf{A}$ se tak vyskytují stejné součiny, ale s opačnými znaménky. Proto $\det \mathbf{B} = -\det \mathbf{A}$.

Pro důkaz druhého tvrzení si připomeňme, že v matici $\mathbf{B}$ platí $\mathbf{B}_{i*} = c\mathbf{A}_{i*}$ pro nějaké $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, a $\mathbf{B}_{k*} = \mathbf{A}_{k*}$ pro $k \neq i$. Platí proto

$b_{ij} = ca_{ij}$ a $b_{kj} = a_{kj}$ pro libovolné j a $k \neq i$. Permutace $p \in S_n$ tak určuje v součtu definujícím $\det \mathbf{B}$ součin

$$\begin{aligned} & \operatorname{sgn} p \cdot b_{1p_1} b_{2p_2} \cdots b_{ip_i} \cdots b_{np_n} = \operatorname{sgn} p \cdot a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots ca_{ip_i} \cdots a_{np_n} = \\ = \; & c \cdot \operatorname{sgn} p \cdot a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{ip_i} \cdots a_{np_n}. \end{aligned}$$

Součin určený permutací p v definici $\det \mathbf{B}$ tak dostaneme ze součinu určeného stejnou permutací p v definici $\det \mathbf{A}$ vynásobením skalárem c. Protože to platí pro každou permutaci $p \in S_n$, dostáváme rovnost $\det \mathbf{B} = c \cdot \det \mathbf{A}$.

Konečně třetí elementární úpravou k i-tému řádku matice $\mathbf{A}$ přičítáme c-násobek j-tého řádku. Budeme opět předpokládat $i < j$, případ $i > j$ se dokáže zcela stejně. V tomto případě máme $b_{ik} = a_{ik} + ca_{jk}$ pro každé $k = 1, 2, \ldots, n$. Dále $b_{lk} = a_{lk}$ pro každé $l \neq i$ a $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Permutace $p \in S_n$ určuje v definici $\det \mathbf{B}$ součin

$$\begin{aligned} & b_{1p_1} \cdots b_{ip_i} \cdots b_{jp_j} \cdots b_{np_n} = a_{1p_1} \cdots (a_{ip_i} + ca_{jp_i}) \cdots a_{jp_j} \cdots a_{np_n} = \\ = \; & a_{1p_1} \cdots a_{ip_i} \cdots a_{jp_j} \cdots a_{np_n} + a_{1p_1} \cdots (ca_{jp_i}) \cdots a_{jp_j} \cdots a_{np_n} = \\ = \; & a_{1p_1} \cdots a_{ip_i} \cdots a_{jp_j} \cdots a_{np_n} + c \cdot a_{1p_1} \cdots a_{jp_i} \cdots a_{jp_j} \cdots a_{np_n}. \end{aligned}$$

První sčítanec v závěrečném součtu se rovná součinu určenému permutací p v $\det \mathbf{A}$, zatímco druhý sčítanec se rovná c-násobku součinu určeného permutací p v determinantu matice, jejíž i-tý řádek se rovná j-tému řádku. Taková matice má determinant rovný 0 podle Tvrzení 6.3. Proto

$$\det \mathbf{B} = \sum_{p \in S_n} \operatorname{sgn} p \cdot b_{1p_1} \cdots b_{np_n} = \sum_{p \in S_n} \operatorname{sgn} p \cdot a_{1p_1} \cdots a_{np_n} = \det \mathbf{A}.$$

□

Všimněte si, že v případě, kdy charakteristika tělesa $\mathbf{T}$ je různá od 2, plyne Tvrzení 6.3 z první části Věty 6.4. Jsou-li v matici $\mathbf{A}$ dva řádky – i-tý a j-tý – stejné, pak prohozením těchto dvou řádků dostaneme matici $\mathbf{B} = \mathbf{A}$. Podle první části Věty 6.4 platí $\det \mathbf{A} = \det \mathbf{B} = -\det \mathbf{A}$, tj. $\det \mathbf{A} + \det \mathbf{A} = 0$. Protože má těleso $\mathbf{T}$ charakteristiku různou od 2, plyne odtud $\det \mathbf{A} = 0$. Pouze v případě, kdy má těleso $\mathbf{T}$ charakteristiku rovnou 2, z rovnosti $\det \mathbf{A} + \det \mathbf{A} = 0$ nevyplývá $\det \mathbf{A} = 0$. V takovém případě je nutné použít Tvrzení 6.3.

Důsledek 6.5 *Pro determinanty elementárních matic řádu n platí*

- $\det \mathbf{E}_{ij} = -1$,
- $\det \mathbf{E}_i(c) = c$,

- $\det \mathbf{E}_{ij}(d) = 1$.

Pro každou elementární matici $\mathbf{E}$ *a libovolnou matici* $\mathbf{A}$ *téhož řádu* n *platí*

$$\det \mathbf{EB} = \det \mathbf{E} \cdot \det \mathbf{B}.$$

Důkaz. Každou elementární matici dostaneme z jednotkové matice $\mathbf{I}$ odpovídající elementární řádkovou úpravou. Protože $\det \mathbf{I} = 1$ neboť jednotková matice je horní trojúhelníková, plynou dodnoty determinantů všech elementárních matic z Věty 6.4.

Odtud rovněž plyne druhá část důsledku za využití Věty 6.4. □

Věta 6.6 *Čtvercová matice* $\mathbf{A}$ *je regulární právě když* $\det \mathbf{A} \neq 0$.

Důkaz. Podle Důsledku 6.5 platí rovnost

$$\det(\mathbf{EB}) = \det \mathbf{E} \cdot \det \mathbf{B}$$

pro každou elementární matici $\mathbf{E}$ a čtvercovou matici $\mathbf{B}$ stejného řádu n. Matici $\mathbf{A}$ převedeme Gaussovou eliminací pomocí elementárních řádkových úprav do matice $\mathbf{D}$ v řádkově odstupňovaném tvaru. To znamená, že existují elementární matice $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \ldots, \mathbf{E}_k$, pro které platí $\mathbf{D} = \mathbf{E}_k \cdots \mathbf{E}_1 \mathbf{A}$. S využitím předchozí rovnosti dostáváme

$$\begin{aligned}
\det \mathbf{D} = \det(\mathbf{E}_k \cdots \mathbf{E}_1 \mathbf{A}) &= \det \mathbf{E}_k \cdot \det(\mathbf{E}_{k-1} \cdots \mathbf{E}_1 \mathbf{A}) = \\
&= \det \mathbf{E}_k \cdot \det \mathbf{E}_{k-1} \cdot \det(\mathbf{E}_{k-2} \cdots \mathbf{E}_1 \mathbf{A}) = \\
&\;\vdots \\
&= \det \mathbf{E}_k \cdot \det \mathbf{E}_{k-1} \cdots \det \mathbf{E}_1 \cdot \det \mathbf{A}.
\end{aligned}$$

Determinanty elementárních matic jsou nenulové podle Důsledku 6.5, platí proto

$$\det \mathbf{A} \neq 0 \quad \text{právě když} \quad \det \mathbf{D} \neq 0.$$

Podle Věty 3.9 je matice $\mathbf{A}$ regulární právě když $\mathbf{D}$ neobsahuje žádný nulový řádek, což je právě když $\det \mathbf{D} \neq 0$, neboť matice $\mathbf{D}$ je horní trojúhelníková matice, a to je podle právě dokázané ekvivalence právě když $\det \mathbf{A} \neq 0$. □

Pomocí předchozí věty snadno dokážeme následující důležitou *větu o součinu determinantů*.

Věta 6.7 *Pro každé dvě čtvercové matice* $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ *řádu* n *platí*

$$\det(\mathbf{AB}) = \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{B}$$

Důkaz. Je-li matice $\mathbf{A}$ singulární, platí $r(\mathbf{A}) < n$, a proto také podle Důsledku 6.20 $r(\mathbf{AB}) \le r(\mathbf{A}) < n$, součin $\mathbf{AB}$ je proto také singulární matice. Z rovnosti $\det \mathbf{A} = 0$ tak plyne $\det(\mathbf{AB}) = 0$ a dokazovaná rovnost $\det(\mathbf{AB}) = \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{B}$ tak platí v případě, že $\mathbf{A}$ je singulární matice.

Pokud je $\mathbf{A}$ regulární matice, můžeme ji podle podle Tvrzení 3.12 vyjádřit jako součin elementárních matic $\mathbf{A} = \mathbf{E}_k \cdots \mathbf{E}_1$. Potom platí

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{AB}) &= \det(\mathbf{E}_k \cdots \mathbf{E}_1 \mathbf{B}) = \det \mathbf{E}_k \cdots \det \mathbf{E}_1 \cdot \det \mathbf{B} = \\ &= \det(\mathbf{E}_k \cdots \mathbf{E}_1) \cdot \det \mathbf{B} = \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{B}. \end{aligned}$$

□

Nyní se budeme věnovat základní metodě výpočtu determinantů – *rozvoji determinantu podle řádku* případně *podle sloupce.*

Definice 6.2 *Je-li $\mathbf{A} = (a_{ij})$ čtvercová matice řádu n, pak pro $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ označujeme $\mathbf{M}_{ij}$ čtvercovou matici řádu $n-1$, kterou dostaneme z $\mathbf{A}$ vynecháním i-tého řádku a j-tého sloupce. Nazýváme ji* minor *matice $\mathbf{A}$ odpovídající místu (i, j). Číslo $m_{ij} = (-1)^{i+j} \det \mathbf{M}_{ij}$ nazýváme* kofaktor *matice $\mathbf{A}$ určený místem (i, j). Matici $\mathbf{M} = (m_{ij})$ nazýváme* kofaktorová matice *určená maticí $\mathbf{A}$ a transponovanou matici $\mathbf{M}^T$ nazýváme* adjungovaná matice *k matici $\mathbf{A}$. Adjungovanou matici k matici $\mathbf{A}$ budeme označovat* $\operatorname{adj} \mathbf{A}$.

Věta 6.8 *Pro každou čtvercovou matici $\mathbf{A} = (a_{ij})$ řádu n a každé $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ platí*

- $\det \mathbf{A} = a_{i1} m_{i1} + a_{i2} m_{i2} + \cdots + a_{in} m_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} m_{ik}$,
- $\det \mathbf{A} = a_{1j} m_{1j} + a_{2j} m_{2j} + \cdots + a_{nj} m_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} m_{kj}$.

Důkaz. Dokážeme první z obou tvrzení o rozvoji determinantu podle i-tého řádku. Druhé tvrzení o rozvoji determinantu podle j-tého sloupce pak vyplyne z rozvoje podle j-tého řádku a z Tvrzení 6.2.

Začneme tím, že se podíváme na všechny součiny v součtu definujícím $\det \mathbf{A}$, které obsahují činitele a_{nn}. Tyto součiny jsou určené permutacemi $p \in S_n$, pro které platí $p(n) = n$. Každý takový součin má tvar

$$\operatorname{sgn} p \cdot a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{n-1 p_{n-1}} a_{nn}.$$

Součet všech těchto součinů se potom rovná

$$\sum_{p(n)=n} \operatorname{sgn} p \cdot a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{n-1 p_{n-1}} a_{nn} = a_{nn} \cdot \sum_{p(n)=n} \operatorname{sgn} p \cdot a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{n-1 p_{n-1}}.$$

Pokud každou permutaci $p \in S_n$, pro kterou platí $p(n) = n$, zúžíme na množinu $\{1, 2, \ldots, n-1\}$, dostaneme permutaci $q \in S_{n-1}$. Permutace q působí na množině, která má o jeden prvek méně, a sama má také o jeden cyklus méně, než permutace p. Proto $\operatorname{sgn} q = \operatorname{sgn} p$. Každou permutaci $q \in S_{n-1}$ můžeme naopak jednoznačně rozšířit do permutace $p \in S_n$ tak, že dodefinujeme $p(n) = n$. Každý člen $\operatorname{sgn} p \cdot a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{n-1p_{n-1}}$ v druhém součtu v poslední rovnosti se proto rovná $\operatorname{sgn} q \cdot a_{1q_1} a_{2q_2} \cdots a_{n-1q_{n-1}}$, kde q je zúžení permutace p na množinu $\{1, 2, \ldots, n-1\}$. Druhá suma v poslední rovnosti se proto rovná

$$\sum_{q \in S_{n-1}} \operatorname{sgn} q \cdot a_{1q_1} a_{2q_2} \cdots a_{n-1q_{n-1}} = \det \mathbf{M}_{nn},$$

součet všech součinů v $\det \mathbf{A}$ obsahujících prvek a_{nn} se tak rovná součinu $a_{nn} \cdot \det \mathbf{M}_{nn}$.

Nyní se podíváme, jak vypadají všechny součiny v $\det \mathbf{A}$ obsahující prvek a_{ij}. K tomu účelu postupně zaměníme i-tý řádek matice $\mathbf{A}$ s $(i+1)$-ním řádkem, potom s $(i+2)$-hým řádkem, atd. až s n-tým řádkem. Dostaneme tak matici, jejíž n-tý řádek se rovná i-tému řádku matice $\mathbf{A}$ a pořadí ostatních řádků se nezměnilo. Speciálně, prvek na místě (n, j) nové matice se rovná a_{ij}.

Dále pokračujeme tak, že postupně prohazujeme j-tý sloupec s $(j+1)$-ním sloupcem, pak s $(j+2)$-hým sloupcem, a tak dále až nakonec s n-tým sloupcem. Dostaneme tak nakonec matici $\mathbf{B} = (b_{ij})$, pro kterou platí $b_{nn} = a_{ij}$, a dále minor $\mathbf{N}_{nn}$ matice $\mathbf{B}$ odpovídající místu (n, n) se rovná minoru $\mathbf{M}_{ij}$ matice $\mathbf{A}$ odpovídajícímu místu (i, j). Součet všech součinů v $\det \mathbf{B}$ obsahujících prvek b_{nn} se podle předchozích dvou odstavců proto rovná $b_{nn} \cdot \det \mathbf{N}_{nn} = a_{ij} \cdot \det \mathbf{M}_{ij}$.

Matici $\mathbf{B}$ jsme dostali z matice $\mathbf{A}$ pomocí $n - i + 1$ elementárních řádkových úprav prvního druhu a dále pomocí $n - j + 1$ elementárních sloupcových úprav prvního druhu. Každá z těchto úprav mění znaménko $\det \mathbf{A}$ podle Věty 6.4 a Tvrzení 6.2, platí proto

$$\det \mathbf{B} = (-1)^{2n-i-j-2} \det \mathbf{A} = (-1)^{i+j} \det \mathbf{A}.$$

Protože $\det \mathbf{A} = (-1)^{i+j} \det \mathbf{B}$, součet všech součinů v $\det \mathbf{A}$ obsahujících prvek a_{ij} se proto rovná součtu všech součinů v $\det \mathbf{B}$ obsahujících prvek $b_{nn} = a_{ij}$ s koeficientem $(-1)^{i+j}$. Podle předchozího odstavce se tak součet všech součinů v $\det \mathbf{A}$ obsahujících a_{ij} rovná

$$(-1)^{i+j} b_{nn} \cdot \det \mathbf{N}_{nn} = a_{ij} \cdot (-1)^{i+j} \det \mathbf{M}_{ij} = a_{ij} m_{ij},$$

kde m_{ij} je podle Definice 6.2 kofaktor matice $\mathbf{A}$ určený místem (i, j).

Protože v každém součinu v součtu definujícím $\det \mathbf{A}$ se vyskytuje právě jeden prvek z i-tého řádku matice $\mathbf{A}$, platí

$$\det \mathbf{A} = a_{i1}m_{i1} + a_{i2}m_{i2} + \cdots + a_{in}m_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}m_{ik} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} \det \mathbf{M}_{ik}.$$

□

Úloha 6.1 Spočítejte determinant Vandermondovy matice a rozhodněte, kdy je Vandermondova matice regulární.

Řešení. Označíme

$$V_{t_0,t_1,\dots,t_n} = \begin{vmatrix} 1 & t_0 & t_0^2 & \cdots & t_0^n \\ 1 & t_1 & t_1^2 & \cdots & t_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & t_n & t_n^2 & \cdots & t_n^n \end{vmatrix}$$

determinant Vandermondovy matice řádu n určené prvky $t_0, t_1, \dots, t_n \in \mathbf{T}$. Pokud se dva z prvků $t_0, t_1, \dots, t_n$ rovnají, má Vandermondova matice dva stejné řádky a její determinant se proto rovná 0 podle Tvrzení 6.3. Budeme proto nadále předpokládat, že všechny prvky $t_0, t_1, \dots, t_n$ jsou navzájem různé.

Napřed odečteme první řádek od všech ostatních. Determinant se podle Věty 6.4 nezmění, dostaneme tak

$$V_{t_0,t_1,\dots,t_n} = \begin{vmatrix} 1 & t_0 & t_0^2 & \cdots & t_0^n \\ 0 & t_1 - t_0 & t_1^2 - t_0^2 & \cdots & t_1^n - t_0^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & t_n - t_0 & t_n^2 - t_0^2 & \cdots & t_n^n - t_0^n \end{vmatrix}.$$

Nyní determinant rozvineme podle prvního sloupce a dostaneme vyjádření

$$V_{t_0,t_1,\dots,t_n} = \begin{vmatrix} t_1 - t_0 & t_1^2 - t_0^2 & \cdots & t_1^n - t_0^n \\ t_2 - t_0 & t_2^2 - t_0^2 & \cdots & t_2^n - t_0^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_n - t_0 & t_n^2 - t_0^2 & \cdots & t_n^n - t_0^n \end{vmatrix}.$$

Dále použijeme známý algebraický rozklad

$$t_i^j - t_0^j = (t_i - t_0)(t_i^{j-1} + t_i^{j-2}t_0 + \cdots t_i t_0^{j-2} + t_0^{j-1}) = (t_i - t_0)c_{ij},$$

kde jsme pro jednoduchost označili

$$c_{ij} = t_i^{j-1} + t_i^{j-2} t_0 + \cdots t_i t_0^{j-2} + t_0^{j-1} = \sum_{k=0}^{j-1} t_i^k t_0^{j-1-k}.$$

Speciálně platí $c_{i1} = 1$ pro libovolné $i = 1, \ldots, n$. S použitím tohoto označení dostáváme

$$V_{t_0,t_1,\ldots,t_n} = \begin{vmatrix} (t_1 - t_0)c_{11} & (t_1 - t_0)c_{12} & \cdots & (t_1 - t_0)c_{1n} \\ (t_2 - t_0)c_{21} & (t_2 - t_0)c_{22} & \cdots & (t_2 - t_0)c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (t_n - t_0)c_{n1} & (t_n - t_0)c_{n2} & \cdots & (t_n - t_0)c_{nn} \end{vmatrix}.$$

Z i-tého řádku můžeme vytknout $t_i - t_0$ pro každé $i = 1, \ldots, n$ a dosadit $c_{i1} = 1$, proto

$$V_{t_0,t_1,\ldots,t_n} = \prod_{i=1}^{n} (t_i - t_0) \begin{vmatrix} 1 & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ 1 & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix}.$$

Nyní $c_{i2} = t_i + t_0$ pro každé $i = 1, \ldots, n$. Pokud tedy odečteme od druhého sloupce t_0-násobek prvního sloupce, dostaneme

$$V_{t_0,t_1,\ldots,t_n} = \prod_{i=1}^{n} (t_i - t_0) \begin{vmatrix} 1 & t_1 & c_{13} & \cdots & c_{1n} \\ 1 & t_2 & c_{23} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & t_n & c_{n3} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix}.$$

Podobně $c_{i3} = t_i^2 - t_i t_0 + t_0^2$ pro každé $i = 1, \ldots, n$. Odečteme tedy od třetího sloupce t_0^2-násobek prvního sloupce a t_0-násobek druhého sloupce. Potom

$$V_{t_0,t_1,\ldots,t_n} = \prod_{i=1}^{n} (t_i - t_0) \begin{vmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & c_{14} & \cdots & c_{1n} \\ 1 & t_2 & t_2^2 & c_{24} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & t_n & t_n^2 & c_{n4} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix}.$$

Postupně tak dostaneme

$$V_{t_0,t_1,\ldots,t_n} = \prod_{i=1}^{n} (t_i - t_0) \cdot V_{t_1,\ldots,t_n}$$

Poslední výraz je rekurentní formule, pomocí které již vypočítáme hodnotu $V_{t_0,t_1,\ldots,t_n}$ Vandermonodova determinantu řádu $n+1$. Začneme hodnotami pro malá n.

$$V_{t_0} = 1, \qquad V_{t_0,t_1} = t_1 - t_0, \qquad V_{t_0,t_1,t_2} = (t_2 - t_0)(t_2 - t_1)(t_1 - t_0).$$

Pokud induktivně předpokládáme, že

$$V_{t_0,t_1,\ldots,t_{n-1}} = \prod_{\substack{i>j \\ i,j=0,\ldots,n-1}} (t_i - t_j),$$

potom pomocí již dokázané rekurentní formule dostaneme

$$\begin{aligned} V_{t_0,t_1,\ldots,t_n} &= \left(\prod_{i=1}^{n}(t_i - t_0)\right) V_{t_1,\ldots,t_n} = \prod_{i=1}^{n}(t_i - t_0) \prod_{\substack{i>j \\ i,j=1,\ldots,n}} (t_i - t_j) = \\ &= \prod_{\substack{i>j \\ i,j=0,\ldots,n}} (t_i - t_j). \end{aligned}$$

Tím je hodnota Vandermondova determinantu dokázána pomocí matematické indukce. Všimněte si, že rovnost

$$V_{t_0,t_1,\ldots,t_n} = \prod_{\substack{i>j \\ i,j=0,\ldots,n}} (t_i - t_j)$$

platí i v případě, kdy se dva z prvků $t_0, t_1, \ldots, t_n \in \mathbf{T}$ rovnají. Vandermondova matice je tak regulární právě když jsou prvky $t_0, t_1, \ldots, t_n \in \mathbf{T}$ navzájem různé. □

Tvrzení 6.9 *Je-li* $\mathbf{A}$ *regulární matice, pak*

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \cdot \operatorname{adj} \mathbf{A}.$$

Důkaz. Adjungovaná matice $\operatorname{adj} A = (n_{ij})$, kde $n_{ij} = m_{ji}$, minor matice $\mathbf{A}$ určený místem (j,i). V součinu $\mathbf{A} \cdot \operatorname{adj} \mathbf{A}$ se prvek na místě (i,i) na hlavní diagonále rovná součtu

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} n_{ki} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} m_{ik} = \det \mathbf{A}$$

podle Věty 6.8. Prvek na místě (i,j) mimo hlavní diagonálu v součinu $\mathbf{A} \cdot \operatorname{adj} \mathbf{A}$, tj. pro $i \neq j$, se rovná

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} n_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} m_{jk}.$$

Poslední součet se rovná rozvoji determinantu podle i-tého řádku v matici, kterou dostaneme z matice $\mathbf{A}$ nahrazením j-tého řádku $\mathbf{A}_{j*}$ řádkem $\mathbf{A}_{i*}$. Minory m_{jk} pro $k = 1, \ldots, n$ se tak nezmění a nová matice má dva stejné řádky. Její determinant se proto rovná 0 podle Tvrzení 6.3. Proto platí rovněž

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} m_{jk} = 0.$$

Součin $\mathbf{A} \cdot \operatorname{adj} \mathbf{A}$ má proto nenulové prvky pouze na hlavní diagonále, a ty se všechny rovnají $\det \mathbf{A}$. Platí tak $\mathbf{A} \cdot \operatorname{adj} \mathbf{A} = \det \mathbf{A} \cdot \mathbf{I}_n$, neboli

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \cdot \operatorname{adj} \mathbf{A}.$$

□

A nakonec vzoreček pro řešení soustavy lineárních rovnic s regulární maticí. Tomuto vzorečku se říká *Cramerovo pravidlo.*

Tvrzení 6.10 *Je-li $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ soustava n lineárních rovnic o n neznámých s regulární maticí $\mathbf{A}$, pak pro $j = 1, 2, \ldots, n$ platí*

$$x_j = \frac{\det \mathbf{A}_j}{\det \mathbf{A}},$$

kde $\mathbf{A}_i = [\mathbf{A}_{*1}| \cdots |\mathbf{A}_{*j-1}|\mathbf{b}|\mathbf{A}_{*j+1}| \cdots |\mathbf{A}_{*n}]$ je matice, kterou dostaneme z matice $\mathbf{A}$ nahrazením i-tého sloupce sloupcem pravých stran $\mathbf{b}$.

Důkaz. Soustava má jediné řešení $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$. Dosadíme za inverzní matici $\mathbf{A}^{-1}$ její vyjádření podle předchozí Věty 6.9

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \cdot \operatorname{adj} \mathbf{A}.$$

Dostaneme tak rovnost

$$\mathbf{x} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \cdot \operatorname{adj} \mathbf{A} \cdot \mathbf{b}.$$

Pro j-tou souřadnici řešení $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$ pak platí

$$x_j = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \cdot [\operatorname{adj} \mathbf{A}]_{j*}\mathbf{b} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \cdot \sum_{k=1}^{n} m_{kj} b_k,$$

kde b_k je k-tá souřadnice vektoru $\mathbf{b}$ pravých stran. Součet

$$\sum_{k=1}^{n} b_k m_{kj}$$

je rozvojem podle j-tého sloupce determinantu matice $\mathbf{A}_j$, kterou dostaneme z matice $\mathbf{A}$ nahrazením sloupce $\mathbf{A}_{*j}$ vektorem pravých stran $\mathbf{b}$. □