

Logické spojky *a* a *nebo*.

Z výroků lze vytvářet další výroky pomocí logických spojek *a* a *nebo*.

Definice. Jsou-li P, Q výroky, pak výrok $P \text{ a } Q$ nazýváme *konjunkce* výroků P, Q a výrok $P \text{ nebo } Q$ nazýváme *disjunkce* P, Q .

Pravdivost konjunkce a disjunkce výroků P, Q závisí pouze na pravdivosti výroků P, Q a to následujícím způsobem.

Výrok $P \text{ a } Q$ je pravdivý právě když jsou pravdivé oba výroky P, Q .

Výrok $P \text{ nebo } Q$ je pravdivý právě když je pravdivý aspoň jeden z výroků P, Q .

Logická spojka *nebo* není používána ve vylučujícím smyslu. To znamená, že disjunkce $P \text{ nebo } Q$ je pravdivá i v případě, že jsou pravdivé oba výroky P, Q .

Chceme-li vyjádřit, že platí jeden z výroků P, Q nikoliv ale oba současně, musíme to vyjádřit jinak než logickou spojkou *nebo*. Například tak, že řekneme, že platí *právě jeden* z výroků P, Q .

V tvrzení, že $z P \text{ plyne } Q$, mohou být jak P tak Q složené výroky vytvořené z jednodušších výroků pomocí logických spojek *a*, *nebo*, *jestliže*, *pak*, atd.

Následující výrok

jestliže p je prvočíslo a p dělí n^2-1 , pak p dělí $n-1$ nebo p dělí $n+1$

je pravdivé tvrzení.

Vynecháme-li jeden z předpokladů nebo jeden ze závěrů, pak nový výrok není pravdivý.

Jestliže p dělí n^2-1 , pak p dělí $n-1$ nebo p dělí $n+1$

je nepravdivý výrok. Stejně tak je nepravdivý výrok

Jestliže p je prvočíslo a p dělí n^2-1 , pak p dělí $n+1$.

Pravdivý je naopak následující výrok: je-li x reálné číslo, pak $x > 0$ nebo $x < 1$.

Logické spojky *a* a *nebo* se často v matematických formulacích vyskytují implicitně, aniž by vůbec byly řečeny.

Příklad. Vyřešte soustavu rovnic

$$(x-1)(x-y)=0,$$

$$(y-3)(x^2-y^2+1)y=0.$$

Ve skutečnosti máme doplnit pravou stranu ekvivalence

čísla x, y splňují rovnici $(x-1)(x-y)=0$ a splňují rovnici $(y-3)(x^2-y^2+1)y=0$ právě když $(x=1 \text{ a } y=3)$ nebo $(x=1 \text{ a } y=\sqrt{2})$ nebo $(x=1 \text{ a } y=-\sqrt{2})$ nebo ...

Podobně je tomu s následujícím příkladem.

Příklad. Najděte všechna reálná čísla splňující nerovnost

$$4|x+1| + 5 > 3|x+2| + 2|x-1|.$$

V tomto případě rozdělíme množinu všech reálných čísel na čtyři intervaly $(-\infty, -2), (-2, -1), (-1, 1), (1, \infty)$. V každém z intervalů pak můžeme odstranit absolutní hodnoty a řešit nerovnost zvlášť. Celkové řešení je pak disjunkcí řešení v jednotlivých případech.

Máme-li dokázat, že $z P$ nebo P' plyne Q , postupujeme nejčastěji tak, že dokážeme, že $z P$ plyne Q a také, že $z P'$ plyne Q .

Podobně máme-li dokázat, že $z P$ plyne Q a Q' , musíme dokázat, že platí $z P$ plyne Q a také že $z P$ plyne Q' .

Kvantifikátory

V první přednášce jsme se zabývali výrokem o existenci druhé odmocniny z kladného reálného čísla.

Je-li x kladné reálné číslo, pak existuje druhá odmocnina z x .

Jedna z možných formulací je také

Pro každé reálné číslo $x > 0$ existuje $y > 0$, pro které platí $y^2 = x$.

Máme-li nějaký výrok $P(x)$, který závisí na proměnné x a S je nějaká množina, můžeme formulovat výroky

existuje $x \in S$, pro které platí $P(x)$,

nebo

pro každé $x \in S$ platí $P(x)$.

Například *pro každé $x > 0$ platí $x^2 > 0$.*

Tyto výroky se v matematice vyskytují tak často, že si pro ně matematici zavedli zvláštní symboly.

Místo *pro každé $x \in S$ platí $P(x)$* píší $\forall x \in S (P(x))$ a místo *existuje $x \in S$, pro které platí $P(x)$* píší $\exists x \in S (P(x))$.

Podobně místo $\exists x \in S$ píší $\exists x \in S$ a místo *existuje* $x \in S$, *pro které platí* $P(x)$ píší $\exists x \in S (P(x))$.

Symbolům $\forall$ a $\exists$ se říká *kvantifikátory*, $\forall$ je *obecný kvantifikátor*, $\exists$ je *existenční kvantifikátor*.

Výrok o existenci druhé odmocniny z kladného reálného čísla pak můžeme napsat v následujícím tvaru

$$\forall x \in (0, \infty) \exists y \in (0, \infty) (y = x^2) .$$

Všimněte si, že na pořadí kvantifikátorů záleží. Výrok

$$\exists y \in (0, \infty) \forall x \in (0, \infty) (y = x^2)$$

není pravdivý, na rozdíl od toho předchozího.

Podobně dělení se zbytkem můžeme popsat pomocí následujícího výroku. V něm $\mathbb{N}$ označuje množinu všech přirozených čísel (včetně 0), zatímco $\mathbb{N}_0$ označuje množinu všech *nenulových* přirozených čísel.

$$\exists q \in \mathbb{N} \exists r \in \mathbb{N} (a = bq + r \wedge 0 \leq r < b).$$

$$\forall a \in \mathbb{N} \forall b \in \mathbb{N}_0$$

Číslo q je *podíl* a číslo r je *zbytek* při dělení čísla a číslem b . To, že r je *zbytek* při dělení čísla a číslem b se zapisuje také ve tvaru $r = a \bmod b$.

Matematika, kterou se budeme zabývat, je založena na tzv. *principu vyloučeného třetího*. Ten říká, že pokud výrok P není pravdivý, pak je pravdivá jeho negace $\text{non } P$.

Toto je filosofické tvrzení a jsou matematici, kteří jej nepřijímají. Ti potom nemůžou dokazovat nic sporem.

Důležité je také umět negovat libovolné výroky. Tak například

$\text{non } (P \wedge Q)$ je totéž jako $(\text{non } P \vee \text{non } Q)$. Negace konjunkce je disjunkce negací.

Podobně $\text{non } (P \vee Q)$ je totéž jako $(\text{non } P \wedge \text{non } Q)$. Negace disjunkce je konjunkce negací.

Negovat implikaci je také jednoduché, $\text{non } (P \rightarrow Q)$ je totéž jako $(P \wedge \text{non } Q)$.

Důležité je také umět negovat výroky s kvantifikátory.

$\text{non } (\forall x \in S (P(x)))$ je to samé jako $\exists x \in S (\text{non } P(x))$

a $\text{non } (\exists x \in S (P(x)))$ je totéž, jako $\forall x \in S (\text{non } P(x))$.

Za použití těchto pravidel můžeme negovat také výroky s více kvantifikátory. Tak například

$\text{non} \left(\forall x \in X \exists y \in Y (P(x,y)) \right)$ je totéž jako $\exists x \in X \forall y \in Y (\text{non } P(x,y))$.

Obecné pravidlo zní, že při zachování pořadí kvantifikátorů každý obecný kvantifikátor zaměníme za existenční, každý existenční kvantifikátor zaměníme za obecný, a kvantifikovaný výrok nahradíme jeho negací.

Tak například negací výroku o existenci druhé odmocniny z kladného reálného čísla je výrok

$$\exists x > 0 \forall y > 0 (y \neq x^2) .$$

Podobně dostaneme zcela mechanicky negaci výroku o dělení se zbytkem pro přirozená čísla následující výrok:

$$\exists a \in \mathbb{N} \exists b \in \mathbb{N}_0 \forall q \in \mathbb{N} \forall r \in \mathbb{N} (a \neq bq + r \text{ nebo } r \in \langle 0, b \rangle).$$

A nakonec jeden výrok ze života goril horských. Označíme symbolem X množinu všech samiček goril horských, symbolem Y množinu všech samců goril horských a $S(x,y,t)$ označuje následující výrok: samička x a samec y mají spolu sex v čase t . Symbol T pak označuje časový interval, který nás zajímá. Vzhledem k tomu, že gorilám horským hrozí vyhynutí, jde o příklad ze života.

Domácí úkol. a) Přeložte z matematické do lidštiny

$$\forall x \in X \exists y \in Y \exists t \in T (S(x,y,t)) \text{ a } \forall x \in X \exists t \in T \forall y \in Y (\text{non } S(x,y,t)) \text{ a}$$

$$\forall x \in X \exists y \in Y \forall t \in T (\text{non } S(x,y,t)).$$

b) Negujte tento výrok v přirozeném jazyce.

c) Přeložte negaci tohoto výroku zpět do matematického jazyka.

Porovnejte formulaci z bodu c) s negací výroku z bodu a).