**Logické spojky  *a* a *nebo.***

Z výroků lze vytvářet další výroky pomocí logických spojek  *a* a *nebo*.

**Definice.**  Jsou-li *P, Q* výroky, pak výrok *P a Q* nazýváme *konjunkce*  výroků *P,Q*  a výrok *P nebo Q*  nazýváme disjunkce *P,Q.*

Pravdivost konjunkce a disjunkce výroků *P,Q*  závisí pouze na pravdivosti výroků *P,Q* a to následujícím způsobem.

Výrok *P a Q* je pravdivý právě když jsou pravdivé oba výroky *P,Q.*

Výrok *P nebo Q*  je pravdivý právě když je pravdivý aspoň jeden z výroků *P,Q*.

Logická spojka *nebo*  není používána ve vylučujícím smyslu. To znamená, že disjunkce *P nebo Q* je pravdivá i v případě, že jsou pravdivé oba výroky *P,Q*.

Chceme-li vyjádřit, že platí jeden z výroků *P,Q* nikoliv ale oba současně, musíme to vyjádřit jinak než logickou spojkou *nebo*. Například tak, že řekneme, že platí *právě jeden* z výroků *P,Q*.

V tvrzení, že  *z P plyne Q,* mohou být jak P tak Q složené výroky vytvořené z jednodušších výroků pomocí logických spojek *a, nebo, jestliže, pak,* atd.

Následující výrok

jestliže *p* je prvočíslo a *p* dělí *n2-1*, pak *p* dělí *n-1* nebo *p* dělí *n+1*

je pravdivé tvrzení.

Vynecháme-li jeden z předpokladů nebo jeden ze závěrů, pak nový výrok není pravdivý.

Jestliže *p* dělí *n2-1*, pak *p* dělí *n-1* nebo *p* dělí *n+1*

je nepravdivý výrok. Stejně tak je nepravdivý výrok

Jestliže *p* je prvočíslo a *p* dělí *n2-1*, pak *p* dělí *n+1.*

Pravdivý je naopak následující výrok: je-li *x* reálné číslo, pak *x > 0* nebo *x < 1*.

Logické spojky  *a*  a *nebo* se často v matematických formulacích vyskytují implicitně, aniž by vůbec byly řečeny.

**Příklad.**  Vyřešte soustavu rovnic

 *(x-1)(x-y)=0,*

 *(y-3) (x2-y2+1)y=0.*

Ve skutečnosti máme doplnit pravou stranu ekvivalence

čísla x,y splňují rovnici  *(x-1)(x-y)=0* a splňují rovnici´ *(y-3) (x2-y2+1)y=0* právě když *(x=1 a y=3)* nebo *(x=1 a y=√2)* nebo *(x=1 a y=- √2)* nebo …

Podobně je tomu s následujícím příkladem.

**Příklad.** Najděte všechna reálná čísla splňující nerovnost

 4|x+1| + 5 > 3|x+2| + 2|x-1|.

V tomto případě rozdělíme množinu všech reálných čísel na čtyři intervaly (-$\infty $,-2), <-2,-1), <-1,1),

 <-1,$\infty $). V každém z intervalů pak můžeme odstranit absolutní hodnoty a řešit nerovnost zvlášť. Celkové řešení je pak disjunkcí řešení v jednotlivých případech.

Máme-li dokázat, že *z P nebo P’ plyne Q,* postupujeme nejčastěji tak, že dokážeme, že *z P plyne Q* a také, že z *P’ plyne Q.*

Podobně máme-li dokázat, že *z P plyne Q a Q’*, musíme dokázat, že platí z *P plyne Q* a také že *z P plyne Q’*.

**Kvantifikátory**

V první přednášce jsme se zabývali výrokem o existenci druhé odmocniny z kladného reálného čísla.

*Je-li x kladné reálné číslo, pak existuje druhá odmocnina z x.*

Jedna z možných formulací je také

*Pro každé reálné číslo x > 0 existuje y > 0, pro které platí y2 = x.*

Máme-li nějaký výrok P(x), který závisí na proměnné x a S je nějaká množina, můžeme formulovat výroky

 *existuje* $xϵS$*, pro které platí P(x)*,

nebo

*pro každé* $xϵS$ *platí P(x).*

Například *pro každé x > 0 platí x2 > 0.*

Tyto výroky se v matematice vyskytují tak často, že si pro ně matematici zavedli zvláštní symboly.

Místo *pro každé* $xϵS$píší $∀xϵS$ a místo *pro každé* $xϵS$ *platí P(x)* napíší $∀xϵS \left(P\left(x\right)\right).$

Podobně místo existuje $xϵS$ píší $∃xϵS$ a místo *existuje* $xϵS$*, pro které platí P(x)* píší $∃xϵS (P\left(x\right))$ .

Symbolům $∀$ a $∃$ se říká *kvantifikátory*, $∀$ je *obecný kvantifikátor*, $∃$ je *existenční kvantifikátor*.

Výrok o existenci druhé odmocniny z kladného reálného čísla pak můžeme napsat v následujícím tvaru

$∀ xϵ\left(0,\infty \right) ∃ yϵ(0,\infty )(y=x$2$)$ .

Všimněte si, že na pořadí kvantifikátorů záleží. Výrok

$∃ yϵ(0,\infty )$ $∀ xϵ\left(0,\infty \right)$ $(y=x$2)

není pravdivý, na rozdíl od toho předchozího.

Podobně dělení se zbytkem můžeme popsat pomocí následujícího výroku. V něm $ N $ označuje množinu všech přirozených čísel (včetně 0), zatímco $N$0 označuje množinu všech *nenulových*  přirozených čísel.

$∀ a ϵ N ∀ b ϵ N$0$ ∃ q ϵ N ∃ r ϵ N \left(a=bq+r a 0\leq r<b\right).$

Číslo $q$ je *podíl* a číslo $r$ je *zbytek* při dělení čísla $a$ číslem $b$. To, že $r$ je *zbytek* při dělení čísla $a$ číslem $b$ se zapisuje také ve tvaru  *r = a* mod *b.*

Matematika, kterou se budeme zabývat, je založena na tzv. *principu vyloučeného třetího.* Ten říká, že

pokud výrok *P* není pravdivý, pak je pravdivá jeho negace non *P.*

Toto je filosofické tvrzení a jsou matematici, kteří jej nepřijímají. Ti potom nemůžou dokazovat nic sporem.

Důležité je také umět negovat libovolné výroky. Tak například

non ( *P* a *Q*) je totéž jako (non *P* nebo non *Q*)*.* Negace konjunkce je disjunkce negací.

Podobně non ( *P* nebo *Q*) je totéž jako (non *P* a non *Q*). Negace disjunkce je konjunkce negací.

Negovat implikaci je také jednoduché, non (z *P* plyne *Q*) je totéž jako (*P* a non *Q*)*.*

Důležité je také umět negovat výroky s kvantifikátory.

non ( $∀xϵS (P(x)))$ je to samé jako $∃xϵS (non P\left(x\right))$

a non ( $∃xϵS (P\left(x\right)))$ je totéž, jako $∀xϵS ( non P(x))$ .

Za použití těchto pravidel můžeme negovat také výroky s více kvantifikátory. Tak například

non $( ∀ x ϵ X ∃ y ϵ Y \left(P\left(x,y\right)\right))$ je totéž jako $ ∃ x ϵ X ∀ y ϵ Y (non P(x,y))$ .

Obecné pravidlo zní, že při zachování pořadí kvantifikátorů každý obecný kvantifikátor zaměníme za existenční, každý existenční kvantifikátor zaměníme za obecný, a kvantifikovaný výrok nahradíme jeho negací.

Tak například negací výroku o existenci druhé odmocniny z kladného reálného čísla je výrok

$∃ x>0 ∀ y>0 ( y \ne x$2$)$ .

Podobně dostaneme zcela mechanicky negaci výroku o dělení se zbytkem pro přirozená čísla následující výrok:

$∃ a ϵ N ∃ b ϵ N$0$ ∀ q ϵ N ∀ r ϵ N \left(a\ne bq+r nebo r \notin <0,b\right)).$

A nakonec jeden výrok ze života goril horských. Označíme symbolem *X* množinu všech samiček goril horských, symbolem *Y* množinu všech samců goril horských a *S(x,y,t)* označuje následující výrok: samička *x* a samec *y* mají spolu sex v čase *t*. Symbol  *T* pak označuje časový interval, který nás zajímá. Vzhledem k tomu, že gorilám horským hrozí vyhynutí, jde o příklad ze života.

**Domácí úkol.** a) Přeložte z matematiččiny do lidštiny $ ∀ x ϵ X ∃ y ϵ Y ∃ t ϵ T \left(S\left(x,y,t\right)\right) a ∀ x ϵ X ∃ t ϵ T ∀ y ϵ Y \left(non S\left(x,y,t\right)\right) a $

$$∀ x ϵ X ∃ y ϵ Y ∀ t ϵ T \left(non S\left(x,y,t\right)\right).$$

b) Negujte tento výrok v přirozeném jazyce.

c) Přeložte negaci tohoto výroku zpět do matematického jazyka.

Porovnejte formulaci z bodu c) s negací výroku z bodu a).