

Příklad z učebnice matematiky pro základní školu:

Součet trojnásobku neznámého čísla zvětšeného o dva a dvojnásobku neznámého čísla zmenšeného o pět se rovná čtyřnásobku neznámého čísla zvětšeného o jedna. Najděte neznámé číslo.

Hlavní část řešení spočívá v sestavení příslušné rovnice o jedné neznámé.

Co je ale zvětšené o tři – neznámé číslo nebo trojnásobek neznámého čísla? V prvním případě levá strana rovnice začíná $3(x+2)$, ve druhém případě $3x+2$.

Problém je v tom, že znění úlohy vzniklo jako překlad rovnice do běžného jazyka. Přeloží každý formulaci v běžném jazyce zpátky do stejné matematické formulace? Ukazuje se, že nikoliv. Obě možná uzávorkování jsou gramaticky oprávněná.

Součet trojnásobku (neznámého čísla zvětšeného o dva)...

V tomto případě přívlástek *zvětšeného* vztahujeme k podstatnému jménu *čísla* a vede to k matematickému překladu $3(x+2)$.

Součet (trojnásobku neznámého čísla) zvětšeného o dva...

V tomto případě přívlástek *zvětšeného* rozvíjí celý větný člen *trojnásobku neznámého čísla* a vede k matematické formulaci $3x+2$.

Tyto nejednoznačnosti se obvykle řeší pomocí gramatického pravidla, že přívlástek rozvíjí to podstatné jméno, ke kterému stojí ve větě nejbližší. Za použití tohoto pravidla by správná matematická formulace byla $3(x+2)$.

Bohužel přívlástek nemusí rozvíjet pouze podstatná jména, ale také celé větné členy, a v tom případě je i druhá možná formulace $3x+2$ oprávněná.

Jazyk většinou používáme k popisu reálných situací a vztah k realitě nám pomáhá zvolit interpretaci, která dává smysl. Větu

Řidiče traktoru zraněného při nehodě odvezla sanitka

nejspíš nepochopíme tak, že sanitka odvezla traktor, přestože gramatická pravidla takovou interpretaci upřednostňují.

V každém případě bychom měli při matematické formulaci použít v obou případech levé strany rovnice stejnou interpretaci. Takže levá strana je buď $3(x+2)+2(x-5)$ nebo $(3x+2)+(2x-5)$.

S pravou stranou problém není. Kdyby přívlástek *zvětšeného o pět* rozvíjel celý větný člen *čtyřnásobku neznámého čísla*, musela by úloha znít ...se rovná čtyřnásobku neznámého čísla *zvětšenému o jedna*. Formulace $4x+1$ je proto špatně.

Na pravé straně rovnice tedy musí být $4(x+1)$.

Správná rovnice pro naši úlohu je tedy $3(x+2) + 2(x-5) = 4(x+1)$.

Přijatelná je také formulace $(3x+2)+(2x-5) = 4(x+1)$.

Špatně sestavená je rovnice $3x+2+2x-5=4x+1$.

Ve výsledcích v učebnici byl uveden pouze jeden správný výsledek, ke kterému vedla toliko poslední špatně sestavená rovnice.

Přirozený jazyk je často nejednoznačný, věty umožňují různé interpretace. Proto je někdo vtipný (má schopnost vymýšlet formulace, kde nabízející se interpretace je nudná a druhá nečekaná a tedy zábavná), jiný má básnické vlohy, atd. Pro srandu nebo básnění není v matematice místo, matematické formulace by měly být jednoznačné.

Matematický jazyk je utvářen tak, aby dvojí možnosti výkladu eliminoval. Používá proto prostředky, které běžný jazyk nemá. Například závorky.

Různé interpretace má výrok

$x=1$ a $y=2$ nebo $z=3$ a $t=4$

Přirozený jazyk má k dispozici pouze interpunkci a pravidla větné stavby. Použijeme-li závorky, nejednoznačnost odstraníme:

$(x=1 \text{ a } y=2) \text{ nebo } (z=3 \text{ a } t=4)$,

$x=1 \text{ a } (y=2 \text{ nebo } z=3) \text{ a } t=4$,

$x=1 \text{ a } [y=2 \text{ nebo } (z=3 \text{ a } t=4)]$.

Kdy platí který z výroků, protipříklady na ekvivalenci výroků. Důkaz ekvivalence výroků.

Výuka matematiky spočívá ve výuce matematického jazyka a jeho správného používání. Aplikace matematiky pak znamenají umět zvolit správnou část matematického jazyka k popisu nějaké reálné situace (sestavit vhodný matematický model reálné situace), vyřešit příslušnou matematickou úlohu, a výsledek pak správně interpretovat v reálné situaci.

Z počátku se budeme učit především správnému používání matematického jazyka.

Většina matematických tvrzení má tvar

Z předpokladu P plyne závěr Q .

Například:

Je-li x kladné reálné číslo, pak existuje jednoznačně určená druhá odmocnina z x .

Zde je předpokladem P výrok *x je kladné reálné číslo*. Závěr Q pak zní *existuje jednoznačně určená kladná druhá odmocnina z x* .

Zde předpokládáme, že čtenář ví, co je to kladná druhá odmocnina z x . Pokud tuto znalost nepředpokládáme, můžeme tvrzení formulovat následovně

Je-li $x > 0$, pak existuje právě jedno $y > 0$ takové, že $y^2 = x$.

Obě tvrzení jsou ekvivalentní za předpokladu, že čtenář ve druhém případě ví, že se bavíme o reálných číslech, a v prvním případě ví, co se rozumí kladnou druhou odmocninou.

Kontext reálných čísel je důležitý. Pokud bychom se bavili o *racionálních číslech*, tvrzení

Je-li x kladné racionální číslo, pak existuje jednoznačně určené kladné racionální číslo y takové, že $y^2 = x$.

Toto tvrzení není pravdivé, narozdíl od toho o reálných číslech. Abychom ukázali, že není pravdivé, stačí předvést racionální číslo, jehož (jednoznačně určená) reálná druhá odmocnina není racionální číslo. Takovým číslem je například $\sqrt{2}$. Dokazovat to ale nebudeme, přestož to je jednoduché.

Abychom měli jistotu, že každý správně chápe, co je to kladná druhá odmocnina z reálného čísla, můžeme zavést definici.

Definice. *Druhou odmocninou z reálného čísla $x > 0$ rozumíme reálné číslo $y > 0$ takové, že $y^2 = x$.*

Definovaný pojem je zvýrazněn kurzívou a je definován pomocí již známých pojmů. Pokud takovou definici zavedeme, můžeme pak používat i první formulaci

je-li x kladné reálné číslo, pak existuje jednoznačně určená druhá odmocnina z x

bez obav, že čtenář nebude vědět, jak jí správně rozumět.

Matematický jazyk se skládá z definic pojmů a tvrzení, že z nějakého předpokladu plyne nějaký závěr.

Definice matematických pojmů jsou jakýmsi výkladovým slovníkem matematického jazyka. Oproti výkladovým slovníkům přirozeného jazyka jsou jednoznačné v tom smyslu, že definovaný matematický pojem má právě jeden výklad. Jak pojem tak jeho výklad pomocí jednodušších/známějších pojmů lze libovolně zaměňovat podobně jako jsme to udělali u dvou tvrzení o existenci druhé odmocniny z kladného reálného čísla.

Matematika usiluje o obecná tvrzení pokrývající co nejvíce konkrétních tvrzení. Správná jsou také tvrzení

K číslu 2 existuje jednoznačně určená druhá odmocnina.

K číslu π existuje jednoznačně určená druhá odmocnina.

K číslu 7,890123 existuje jednoznačně určená druhá odmocnina.

Naše formulace je obecná a platí pro jakékoliv kladné reálné číslo. Jedním tvrzením tak zahrneme nekonečně mnoho speciálních tvrzení pro každé konkrétní reálné číslo.

Je důležité umět v každé formulaci matematického tvrzení rozpoznat všechny implikace. I naše tvrzení o existenci druhé odmocniny v sobě skrývá vlastně dvě jednodušší tvrzení. Výrok

existuje právě jedno reálné číslo $y > 0$ takové, že $y^2 = x$

říká současně dvě různé věci.

- *existuje aspoň jedno $y > 0$ takové, že $y^2 = x$*
- *existuje nejvýše jedno $y > 0$ takové, že $y^2 = x$.*

Naše tvrzení o existenci jednoznačně určené reálné druhé odmocniny z kladného reálného čísla je pravdivé právě když jsou současně pravdivé následující dva výroky:

- *Je-li $x > 0$, pak existuje aspoň jedno $y > 0$ takové, že $y^2 = x$.*
- *Je-li $x > 0$, pak existuje nejvýše jedno $y > 0$ takové, že $y^2 = x$.*

Druhé tvrzení lze snadno dokázat pouze za použití pravidel pro počítání s reálnými čísly. K důkazu prvního potřebujeme vědět, co je to reálné číslo.

U každého matematického tvrzení je důležité uvědomit si všechny předpoklady. Ne vždy jsou napsány na jednom místě. Opakovat u každého tvrzení o reálných číslech předpoklad, že se zabýváme reálnými čísly, je zbytečné. Často je v úvodu nějaké kapitoly v knize napsáno něco jako

V této kapitole se budeme zabývat pouze reálnými čísly.

Pak už není potřeba opakovat u každého tvrzení znovu, že předpokládáme, že číslo x je reálné. Všechny předpoklady nějakého tvrzení tak mohou být roztroušeny na několika stránkách předcházejících samotné formulaci tvrzení.

V matematických formulacích často používáme slova běžného jazyka, ale s přesně stanoveným významem.

Jak jsem si už řekli, většina matematických tvrzení zní následovně.

Jestliže platí P , pak platí také Q .

P je předpoklad, Q je závěr. P i Q jsou nějaké výroky, jejichž pravdivost můžeme posoudit.

Uvedená formulace není jediná možná, stejné tvrzení můžeme formulovat mnoha různými způsoby.

Z P plyne Q .

Platí-li P , pak platí také Q .

Necht' platí P . Pak platí Q .

P implikuje Q .

P platí pouze platí-li Q .

P je postačující podmínka pro Q .

Q je nutná podmínka pro P .

Jestliže neplatí Q , pak neplatí ani P .

Atd., atd.

Můžeme si zvolit libovolnou z formulací. V závislosti na P a Q budou některé formulace znít lépe než jiné. Správně formulované ale budou všechny. Vyzkoušejte si to na příkladu (bavíme se o reálných číslech), kdy

P : číslo $x > 1$,

Q : $x^2 > 1$.

U formulace *jestliže neplatí Q , pak neplatí ani P* , se chvíli zastavíme.

Ukazuje, že role výroků P a Q nejsou zaměnitelné. Jestliže všechny výše uvedené formulace říkají jedno a totéž, formulace

jestliže platí Q pak platí také P

je zcela jiné tvrzení.

Tvrzení

je-li $x > 1$, pak také $x^2 > 1$,

je pravdivé, zatímco tvrzení

je-li $x^2 > 1$, pak také $x > 1$

pravdivé není.

Neznamená to ale, že pokud je tvrzení

jestliže platí P , pak platí také Q

pravdivé, pak je nutně opačné tvrzení

jestliže platí P , pak platí také Q

nepravdivé. Například obě následující navzájem opačná tvrzení

- *jestliže $x > 0$, pak existuje $y > 0$ takové, že $y^2 = x$,*

- *existuje $y > 0$ takové, že $y^2 = x$, pak $x > 0$,*

jsou pravdivá. První říká, že ke kladnému číslu existuje kladná druhá odmocnina, zatímco druhé říká, že druhá mocnina kladného čísla je zase kladné číslo.

Často se také setkáme s následující formulací.

P platí právě když platí Q.

Tomuto tvrzení se říká ekvivalence dvou výroků. Můžeme jej také formulovat následovně:

P je ekvivalentní s Q.

Toto tvrzení je společnou formulací dvou implikací

Jestliže platí P, pak platí také Q.

Jestliže platí Q, pak platí také P.

Dokazujeme-li pravdivost ekvivalence dvou výroků, musíme dokázat pravdivost obou navzájem opačných implikací.

Užitečnou kontrolou správnosti nějaké matematické formulace je ověření, že po každém *jestliže* nebo *je-li* nebo *pokud* následuje nějaké *pak*.

Formulace

je-li n prvočíslo, n je různé od 2, n je liché

není správně formulované matematické tvrzení.. Může znamenat například

je-li n prvočíslo, pak n je různé od 2 a n je liché,

což není pravdivé tvrzení, nebo také

je-li n prvočíslo a, n je různé od 2 pak n je liché,

což je naopak pravdivé tvrzení.

Nepravdivá jsou rovněž následující (správně formulované) výroky

je-li n prvočíslo a nebo n je různé od 2, pak n je liché,

případně

je-li n prvočíslo, pak n je různé od 2 nebo n je liché,

