

Domácí úkol č. 7 k přednášce NMAG 102: Lineární algebra a geometrie 2, letní semestr 2014–2015

Datum odevzdání 13.4.2015 18:00

(7.1) Uvažujme diskrétní dynamický systém $\mathbf{x}_k = A\mathbf{x}_{k-1}$, kde $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^3$ a A je reálná čtvercová matice řádu 3. O matici A máme následující informace:

- A je singulární.
- Součet prvků v každém sloupci matice A je 1.
- Součet prvků na diagonále matice A je 0.

Konverguje pak posloupnost $(\mathbf{x}_k)_{k=0}^{\infty}$ pro jakýkoliv počáteční vektor \mathbf{x}_0 ? Konverguje tato posloupnost pro nějaký nenulový počáteční vektor k nulovému vektoru? Konverguje tato posloupnost pro nějaký nenulový počáteční vektor k nenulovému vektoru? (S konvergencí stačí pracovat neformálně.)

Nápověda: Podívejte se na to, co říkají podmínky o charakteristickém polynomu matice A , přičemž použijte výsledek domácího úkolu 5.1. Pak můžete spočítat vlastní čísla a rozmyslet si, co říkají o řešení zadaného dynamického systému.

(7.2) Lineární operátor f na prostoru $\mathbf{V} = \langle (1, 1, 0)^T, (2, -1, 3)^T \rangle$ (jde o podprostor prostoru \mathbb{R}^3) splňuje

$$f((1, 1, 0)^T) = (7, 4, 3)^T, \quad f((2, -1, 3)^T) = (5, -4, 9)^T$$

Spočítejte $f^n((-1, 5, -6)^T)$.

Nápověda: Začněte tím, že najdete matici f vzhledem k nějaké bázi prostoru \mathbf{V} . Pak najděte jinou bázi tohoto prostoru, vzhledem ke které je matice f v Jordanově tvaru.

Bonusový problém:

Dokažte, že pro každý operátor na $\mathbf{V} = \mathbb{R}^2$ se standardním skalárním součinem, který nemá (reálná) vlastní čísla, existuje ortogonální báze B prostoru \mathbf{V} taková, že matice f vzhledem k B je tvaru

$$[f]_B^B = r \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

Dále ukažte, že nelze požadovat, aby B byla ortonormální.