Domácí úkol č. 7 k přednášce NMAG 102: Lineární algebra a geometrie 2, letní semestr 2017–2018

(7.1) Matice lineárního operátoru f na $\mathbb{R}^9$ vzhledem k bázi $B = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_9)$ je matice v Jordanově tvaru s dvěma buňkami příslušnými vlastnímu číslu 0 řádů 3 a 4 a jednou buňkou příslušnou vlastnímu číslu 1 řádu 2. Pro každé $i, j \in \mathbb{N}$ určete dimenzi a najděte nějakou bázi prostoru $(\mathrm{Ker}\, f^i) \cap (\mathrm{Im}\, f^j)$.

(7.2) Diskrétní lineární dynamický systém s řízením je dán rovnicí

$$\mathbf{x}_{t+1} = A\mathbf{x}_t + B\mathbf{u}_t \ ,$$

kde $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ a $B \in \mathbb{R}^{n\times k}$ jsou reálné matice a $\mathbf{u}_t \in \mathbb{R}^k$ je vstup v čase t. Předpokládáme, že počáteční stav $\mathbf{x}_0 = \mathbf{o}$.

V příkladu 9.120 ve skriptech jsme si odvodili, že prostor

$$\mathbf{V}_t = \mathrm{Im}\,(A^{t-1}B|A^{t-2}B|\cdots|AB|B)$$

můžeme považovat za prostor všech možných stavů, kterých lze dosáhnout v čase $t \geq 1$ z počátečního stavu $\mathbf{x}_0 = \mathbf{o}$ vhodnou volbou vstupů $\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{t-1} \in \mathbb{R}^k$. Označíme ještě $\mathbf{V}_0 = \{\mathbf{o}\}$.

Vektor (stav) $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ nazveme *dosažitelný*, pokud platí $\mathbf{x} \in \mathbf{V}_t$ pro nějaké $t \geq 0$. Dokažte, že platí

1. $\mathbf{V}_t \subseteq \mathbf{V}_{t+1}$ pro každé $t \geq 0$,
2. pokud pro nějaké $t \geq 0$ platí $\mathbf{V}_t = \mathbf{V}_{t+1}$, pak $\mathbf{V}_t = \mathbf{V}_{t+j}$ pro každé $j \geq 1$,
3. každý dosažitelný stav leží v $\mathbf{V}_n$.

Poznámka: V bodě 3. jsme dostali stejný výsledek jako v příkladu 9.120, ale bez použití Cayleyho-Hamiltonovy věty.

Bonusový problém: Čtvercová matice $A = (a_{ij})$ řádu n je *divná*, pokud $a_{i+1,i} = 1$ pro $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ a $a_{i,j} = 0$ pro $j \in \{1, \ldots, n-1\}$, $i \neq j+1$ (tedy poslední sloupec je libovolný, pod hlavní diagonálou jsou jedničky a jinde nuly). Ukažte, že každá čtvercová matice nad libovolným tělesem je podobná blokově diagonální matici, jejíž bloky jsou divné. Najděte, jak se divné matice ve skutečnosti nazývají.