# **Domácí úkol č. 5** k přednášce NMAG 102: Lineární algebra a geometrie 2, letní semestr 2017–2018

**(5.1)** Rozhodněte, která z následujících tvrzení platí pro každou reálnou čtvercovou matici $A$ řádu $k$. (Odpověď dokažte.)

(a) Pokud $A^2 = A$ a $\lambda$ je vlastní číslo matice $A$, pak $\lambda \in \{0, 1\}$.

(b) Pokud $A^2 = A$, pak 0 je vlastním číslem matice $A$.

(c) Pokud $A^2 = A$, pak 1 je vlastním číslem matice $A$.

(d) Pokud pro nějaké přirozené číslo $n$ platí $A^n = 0_{k\times k}$ a $\lambda$ je vlastní číslo matice $A$, pak $\lambda = 0$.

(e) Pokud pro nějaké přirozené číslo $n$ platí $A^n = 0_{k\times k}$, pak 0 je vlastní číslo matice $A$.

**(5.2)** Máme k dispozici neomezenou zásobu pěti druhů dlaždic – červené o rozměrech $1 \times 1$, modré o rozměrech $2 \times 1$, zelené o rozměrech $2 \times 1$, žluté o rozměrech $2 \times 1$, a bílé o rozměrech $3 \times 1$ (dlaždice stejného druhu jsou nerozlišitelné). Kolika různými způsoby lze vydláždit chodník o rozměru $n \times 1$? Najděte explicitní (nikoliv pouze rekurentní) vzorec. Spočtěte jeho hodnotu pro $n = 10$. (Na estetickou hodnotu dláždění nehledíme.)

**Nápověda:** Najděte nejprve rekurentní formuli pro počet způsobů vydláždění chodníku délky $n$ (v závislosti na $n$). Vše lze spočítat ručně, při výpočtech se mohou objevit pouze racionální čísla a druhé odmocniny ze dvou. Pro částečné výpočty můžete použít Wolphramalpha, případně jiný software.

**Bonusový problém:** Nechť $f, g$ jsou diagonalizovatelné operátory na konečně generovaném prostoru $\mathbf{V}$. Dokažte, že $fg = gf$ právě tehdy, když existuje báze $B$ prostoru $\mathbf{V}$ taková, že každý vektor z $B$ je zároveň vlastním vektorem operátoru $f$ i $g$.