Domácí úkol č. 3 k přednášce NMAG 102: Lineární algebra a geometrie 2, letní semestr 2017–2018

(3.1) Nechť $A = (\mathbf{a}_1|\dots|\mathbf{a}_n)$ je regulární reálná matice řádu n. Dokažte, že absolutní hodnota determinantu matice A je menší nebo rovná součinu norem vektorů $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ (normy bereme vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu). Pro $n = 3$ interpretujte tuto nerovnost geometricky.

Nápověda: Použijte QR-rozklad. Ukažte, že ortogonální matice má determinant ± 1 a že prvky na diagonále matice R lze odhadnout velikostmi vektorů $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$.

(3.2) V rovině jsou dány tři přímky

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2 \\ a_3x + b_3y &= c_3 \ , \end{aligned}$$

které se neprotínají v jednom bodě. Dále předpokládáme, že euklidovské normy normálových vektorů $\left\|(a_i, b_i)^T\right\| = 1$ pro všechna $i = 1, 2, 3$. Dokažte, že aproximace řešení uvedené soustavy metodou nejmenších čtverců najde bod $\hat{\mathbf{x}}$ v rovině, který má mezi všemi body v rovině nejmenší součet druhých mocnin vzdáleností od třech daných přímek.

Bonusový problém: Najděte a dokažte geometrickou intepretaci aproximace $\hat{\mathbf{x}}$ řešení předchozí soustavy metodou nejmenších v případě, že normy $\left\|(a_i, b_i)^T\right\|$ mohou být libovolné.