

Domácí úkol č. 1 k přednášce NMAG 102: Lineární algebra a geometrie 2, letní semestr 2017–2018

(1.1) Dokažte, že v libovolném komplexním vektorovém prostoru \mathbf{V} se skalárním součinem $\langle \cdot, \cdot \rangle$ platí (pro libovolné $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$)

$$\operatorname{Im}(\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle) = \frac{1}{2}(\|\mathbf{u} - i\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u}\|^2 - \|\mathbf{v}\|^2) = \frac{1}{4}(\|\mathbf{u} - i\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u} + i\mathbf{v}\|^2) ,$$

kde $\operatorname{Im}(x)$ značí imaginární část komplexního čísla x .

(1.2) Zobrazení $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ je dáno vzorcem

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^T A \mathbf{v}$$

kde A je reálná symetrická čtvercová matice $A = (a_{ij})$ řádu 2. Dokažte, že $\langle \cdot, \cdot \rangle$ je skalární součin na \mathbb{R}^2 právě tehdy, když platí

$$a_{11} > 0 \quad \text{a} \quad \det(A) > 0 .$$

Bonusový problém: Vytvořte a dokažte podobné kritérium jako v příkladu 1.2. pro matici A řádu n .