16 a) Různá vyjádření parametru p

víme už $A_{12} = k(t_2 - t_1)\sqrt{p}$, $A_{23} = k(t_3 - t_2)\sqrt{p}$, takže

$$\frac{A_{23}}{A_{12}} = \frac{t_3 - t_2}{t_2 - t_1} = \frac{\frac{A_{23}}{n_{23}} \cdot n_{23}}{\frac{A_{12}}{n_{12}} \cdot n_{12}} = \frac{n_{23} \cdot \eta_{23}}{n_{12} \cdot \eta_{12}}$$

z této rovnosti vidíme, jakou chybu děláme, když nahrazujeme počty obsahů trojúhelníků $\frac{n_{23}}{n_{12}}$ poměrem obsahů výsečí $\frac{A_{23}}{A_{12}}$

Podobně pro poměry $\frac{A_{23}}{A_{13}} = \frac{n_{23}}{n_{13}} \cdot \frac{\eta_{23}}{\eta_{13}}$, atd.

Samozřejmě, poměry $\frac{\eta_{23}}{\eta_{12}}$, $\frac{\eta_{23}}{\eta_{13}}$ stále neznáme

16b) Najdeme ještě jedno vyjádření p z polárních rovnic

$$r_1 = \frac{p}{1+e\cos\theta_1}, \quad r_2 = \frac{p}{1+e\cos\theta_2}, \quad r_3 = \frac{p}{1+e\cos\theta_3},$$

po úpravě

$$\frac{p}{r_1} = 1+e\cos\theta_1 \quad \Big/ \cdot \sin(\theta_3-\theta_2)$$

$$\frac{p}{r_2} = 1+e\cos\theta_2 \quad \Big/ \cdot \sin(\theta_1-\theta_3)$$

$$\frac{p}{r_3} = 1+e\cos\theta_3 \quad \Big/ \cdot \sin(\theta_2-\theta_1)$$

vynásobíme, sečteme a použijeme součtové vzorce pro sin

$$\frac{p}{r_1}\sin(\theta_3-\theta_2) + \frac{p}{r_2}\sin(\theta_1-\theta_3) + \frac{p}{r_3}\sin(\theta_2-\theta_1) =$$

$$= \sin(\theta_3-\theta_2) + \sin(\theta_1-\theta_3) - \sin\big((\theta_1-\theta_3)+(\theta_3-\theta_2)\big)$$

16 c) Použijeme vzorec

$$\sin x + \sin y - \sin(x+y) = 4 \cdot \sin\frac{x}{2}\,\sin\frac{y}{2}\,\sin\frac{x+y}{2}$$

pro $x = \theta_3 - \theta_2$, $y = \theta_1 - \theta_3$, tedy $x + y = (\theta_1 - \theta_3) + (\theta_3 - \theta_2)$

Dostaneme

$$\frac{p}{r_1}\sin(\theta_3 - \theta_2) + \frac{p}{r_2}\sin(\theta_1 - \theta_3) + \frac{p}{r_3}\sin(\theta_2 - \theta_1)$$

$$= 4\sin\frac{\theta_3 - \theta_2}{2} \cdot \sin\frac{\theta_1 - \theta_3}{2} \cdot \sin\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}$$

Levou stranu sečteme

$$p\,\frac{r_2 r_3 \sin(\theta_3 - \theta_2) + r_1 r_3 \sin(\theta_1 - \theta_3) + r_1 r_2 \sin(\theta_2 - \theta_1)}{r_1 r_2 r_3}$$

$$= p \cdot 2\left(\kappa_{23} - \kappa_{13} + \kappa_{12}\right)$$

16 d) Přidáme pravou stranu a vypočteme

$$n_{12} - n_{13} + n_{23} = \frac{2 r_1 r_2 r_3 \sin\frac{\theta_3-\theta_2}{2} \sin\frac{\theta_3-\theta_1}{2} \sin\frac{\theta_2-\theta_1}{2}}{p}$$

rozšíříme zlomek $r_1 r_2 r_3 \cos\frac{\theta_3-\theta_2}{2} \cos\frac{\theta_3-\theta_1}{2} \cos\frac{\theta_2-\theta_1}{2}$,

použijeme opakovaně $\sin x = 2 \sin\frac{x}{2} \cos\frac{x}{2}$ a

vzorec pro plochu trojúhelníku a dostaneme

$$n_{12} - n_{13} + n_{23} = \frac{r_1^2 r_2^2 r_3^2 \sin(\theta_3-\theta_2) \sin(\theta_3-\theta_1) \sin(\theta_2-\theta_1)}{4 p\, r_1 r_2 r_3 \cos\frac{\theta_3-\theta_2}{2} \cos\frac{\theta_3-\theta_1}{2} \cos\frac{\theta_2-\theta_1}{2}}$$

$$= \frac{2\, n_{12} n_{13} n_{23}}{p\, r_1 r_2 r_3 \cos\frac{\theta_3-\theta_2}{2} \cos\frac{\theta_3-\theta_1}{2} \cos\frac{\theta_2-\theta_1}{2}}$$

16 e) Nyní za p dosadíme z rovnic:

$$p = \sqrt{p}\sqrt{p} = \frac{A_{12}}{k(t_2-t_1)} \frac{A_{23}}{k(t_3-t_2)}$$ a dostaneme

$$n_{12} - n_{13} + n_{23} = \frac{2\cdot k(t_2-t_1)\, k(t_3-t_2)\, n_{12} n_{13} n_{23}}{A_{12}\cdot A_{23}\cdot r_1 r_2 r_3 \cos\frac{\theta_3-\theta_2}{2} \cos\frac{\theta_3-\theta_1}{2} \cdot \cos\frac{\theta_2-\theta_1}{2}} =$$

$$= \frac{2\, k(t_2-t_1)\cdot k(t_3-t_2)\, n_{13}}{\eta_{12}\cdot\eta_{23}\cdot r_1 r_2 r_3 \cos\frac{\theta_3-\theta_2}{2} \cos\frac{\theta_3-\theta_1}{2} \cos\frac{\theta_2-\theta_1}{2}}$$

Geometrický význam $n_{12} - n_{13} + n_{23}$