Matematický popis žonglování

Cyril Matoušek

NMAG166 LS 2016/2017

1 Úvod

Žonglování je pohybová a umělecká aktivita, při které účinkující, žonglér, vyhazuje různé objekty do vzduchu, a pak je chytá. Mezi nejznámější triky, které si představí většina z nás, když přijde řeč na žonglování, patří kaskáda se třemi míčky[1] nebo fontána se čtyřmi míčky, ale různých triků je nepřeberné množství.

Čím se mohou jednotlivé triky od sebe lišit? Žonglér může žonglovat prakticky s čímkoliv. S míčky, s kuželkami, s obručemi a někteří se dokonce odváží i k žonglování s běžícími motorovými pilami. I samotný způsob chytání a házení má mnoho variant. Nejčastěji se objekty chytají dále od těla a vyhazují blíže u těla, ale třeba při reverzním žonglování je tomu naopak. Pokud žonglér při žonglování střídavě kříží ruce, jedná se o tzv. Mills mess. Nic mu ani nebrání v tom si míčky házet za sebe a chytat je za zády.

Nicméně nehledě na to, jaký objekt žonglér hází nebo v jakých pozicích ho chytá, všechny triky mají jednu zásadní společnou vlastnost. Objekty jsou házeny do různých výšek, tím pádem každý z nich stráví ve vzduchu jinak dlouhý časový úsek a podle toho jsou objekty v nějakém pořadí pochytány a opět vyhozeny.

Právě na takové pojetí žonglování se zaměříme v tomto textu. Zajímat nás bude, jak opakující se vyhazování objektů převést do řeči čísel, aniž bychom zkreslili jeho klíčové vlastnosti, a dále jak pomocí tohoto modelu vytvářet nové žonglovací triky.

2 Žonglovací funkce a posloupnosti

Žonglovací trik se skládá opakovaného vyhazování objektů, řekněmě míčků, a jejich následného chytání, lze jej tedy popsat jako sérii jednotlivých hodů. Při matematickém popisování takového triku se u jednotlivého hodu nezaměřujeme na jeho fyzikální podstatu, ale hod vnímáme jako přesun míčku o nějaký čas dopředu, po jehož uplynutí bude míček opět vyhozen.

Pro zjednodušení předpokládáme, že jednotlivé hody jsou diskrétní body v čase a že žonglér žongluje v pravidelném, neměnném rytmu tak, aby mezi každým hodem a hodem následujícím uplynula vždy stejně dlouhá doba. Abychom nemuseli řešit, jak v praxi trik začít nebo skončit, předpokládáme, že žonglér žongluje od nepaměti a bude žonglovat navěky. Dále předpokládáme, že během každého hodu je vyhozen nejvýše jeden míček, a pokud je během nějakého hodu míček chycen, pak je v rámci toho samého hodu vyhozen.

2.1 Žonglovací funkce

Definice: Nechť $j : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$[2] je funkce. Pro j definujme funkci $f_j : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ předpisem $f_j(x) = x + j(x)$ pro každé $x \in \mathbb{Z}$. Řekneme, že j je *žonglovací funkce* [2], právě tehdy, když f_j je permutace na $\mathbb{Z}$. *Výškou* [2] žonglovací funkce j rozumíme prvek $v(j) = max\{j(x), x \in \mathbb{Z}\}$, pokud takové číslo existuje. Jinak klademe $v(j) = \infty$.

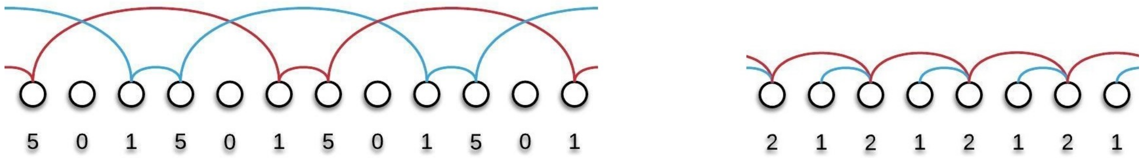
Takto definovaná žonglovací funkce j popisuje žonglování, které splňuje uvedené předpoklady. Celá čísla představují jednotlivé hody. Hodnota $j(x)$ (dále též výška x-tého hodu) udává, kolik dob míček stráví ve vzduchu, než bude znovu chycen, pokud byl vyhozen při x-tém hodu. Pevnými

[1] Pro triky, u kterých je to možné, je uveden odkaz na webovou stránku Juggle Wiki [3], kde jsou mj. k vidění animace ukazující, jak trik ve skutečnosti vypadá.

[2] Množinou přirozených čísel $\mathbb{N}$ v tomto textu rozumíme množinu všech celých nezáporných čísel včetně nuly.

body permutace f_j jsou tzv. nulové hody, ve kterých žonglér nechytá a tedy ani nehází žádný míček. Hodnota žonglovací funkce je v takovém bodě rovná nule.

Skutečnost, že f_j je funkce, zajišťuje, že během každého nenulového hodu je vyhozen právě jeden míček, zatímco požadavek, že se jedná o permutaci na $\mathbb{Z}$, znamená, že v každém nenulovém hodu je právě jeden míček chycen. Pokud by se o permutaci nejdenalo, docházelo by v některých hodech ke srážce více míčků (při dopadu v nenulovém hodu) nebo by některý chycený míček nebyl následně vyhozen (při dopadu v nulovém hodu) a příslušné zobrazení $\mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ by tedy nebylo žonglovací funkcí dle uvedených předpokladů.



Obrázek 1: Vlevo diagram žonglovací funkce. Vpravo diagram funkce, která není žonglovací z důvodu kolize míčků. [1]

Žonglovací funkci j lze znázornit diagramem. Každý hod $x \in \mathbb{Z}$ je reprezentován tečkou, pod kterou je uvedena hodnota $j(x)$ pro daný hod. Hod x je spojen obloukem s hodem $x + j(x)$, dohromady oblouky tvoří křivku spojující všechna vyhození a dopady jednoho míčku. Formálně definujeme *počet míčků* [2] žonglovací funkce j (zn. $m(j)$) jako počet jednotlivých křivek v diagramu této funkce.

2.2 Žonglovací posloupnost

Obecná žonglovací funkce nemusí nutně obsahovat jakoukoliv pravidelnost a výška jejích hodů nemusí být nijak omezena. Když ale žonglér předvádí nějaký trik v praxi, téměř vždy při tom pravidelně opakuje sestavu několika hodů. Takovou sestavu nazývýváme žonglovací posloupnost.

Definice: Nechť $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$. Nechť $\{a_k\}_{k=0}^{n-1}$ je konečná posloupnost přirozených čísel. Definujme pro tuto posloupnost funkci $j : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ předpisem $j(x) = a_{x \ mod \ n}$ pro každé $x \in \mathbb{Z}$. Řekneme, že $\{a_k\}_{k=0}^{n-1}$ je *žonglovací posloupnost* [4], pokud j je žonglovací funkce. Číslo n nazýváme *periodou* [2] této žonglovací posloupnosti. Řekneme, že žonglovací posloupnost je *minimální* [2], pokud ze všech žonglovacích posloupností příslušejících stejné žonglovací funkci má nejmenší periodu.

Zápis žonglovacích triků formou žonglovacích posloupností se mezi žongléry nazývá „siteswap". Dává nám informaci, jak vysoko v jakou chvíli míčky házet, aby trik vypadal, tak jak má. Např. pro provedení minimální posloupnosti (7,4,4) je třeba v jednom hodu míček vyhodit na 7 dob do vzduchu, v dalším hodu míček vyhodit na 4 doby, v dalším opět na 4 doby, a tak pořád dokola. Posloupnosti (7,4,4,7,4,4) a (7,4,4,7,4,4,7,4,4) popisují tutéž sestavu, ale již nejsou minimální.

Následující tvrzení pak dává návod, jak zjistit, kolik míčků je pro žonglování zadané posloupnosti potřeba.

Věta: Nechť j je žonglovací fuknce a $v(j) \in \mathbb{N}$. Poté

$$\lim_{|I| \to \infty} \frac{\sum_{x \in I} j(x)}{|I|}$$

existuje vlastní a je rovna $m(j)$, přičemž limitu bereme přes všechny celočíselné intervaly I tvaru $I = \{a, a+1, a+2, \ldots, b\} \subset \mathbb{Z}$, kde $|I|$ je počet prvků I. [2]

Důkaz. BÚNO uvažujme pouze intervaly I takové, že $|I| > v(j)$. Poté každý míček (formálně vzato křivka v žonglovacím diagramu) je během hodů v intervalu I chycen a vyhozen alespoň jednou. Zafixujme libovolný míček a označme S součet hodnot $j(x)$ takových, které se týkají vyhození tohoto míčku (tzn. náleží stejné křivce v diagramu) v intervalu I. Odhadneme S seshora. Maximálního S dosáhneme tak, že míček chytíme hned v hodu a (první hod intervalu I), jedním nebo více hody o celkovém součtu $|I| - 1$ ho dopravíme do hodu b (poslední hod I) a tam vyhodíme

na co nejdelší dobu, tj. položíme $j(b) = v(j)$. Pak $S \leq |I| - 1 + v(j)$. Obdobně ukážeme $S \geq |I| + 1 - v(j)$. Jelikož $\sum_{x \in I} j(x)$ se rovná sumě všech hodnot S přes všechny míčky, získáváme nerovnost
$$\frac{m(j) \cdot (|I| + 1 - v(j))}{|I|} \leq \frac{\sum_{x \in I} j(x)}{|I|} \leq \frac{m(j) \cdot (|I| - 1 + v(j))}{|I|}$$
Levá i pravá strana v pro $|I| \to \infty$ konvergují v limitě k $m(j)$, z věty o dvou strážnících pak plyne tvrzení. □

Důsledkem této věty je fakt, že počet míčků pro žonglování žonglovací posloupnosti je roven aritmetickému průměru všech jejích prvků.

Pochopitelně každá konečná posloupnosti přirozených čísel nemusí být nutně žonglovací posloupností. Uvedenou větou ale získáváme nutnou podmínku pro žonglovací posloupnosti — aritmetickým průměrem každé žonglovací posloupnosti musí být přirozené číslo. Například posloupnost (5,0,1) je žonglovací posloupností se dvěma míčky, zatímco posloupnost (2,1) žonglovací posloupností vůbec není (viz. též Obrázek 1). Opačná implikace neplatí, protipříkladem je třeba nežonglovatelná posloupnost přirozených čísel (1,3,8).

Existuje ovšem i ekvivalentní podmínka pro žonglovací posloupnosti:

Věta: Nechť $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$. Nechť $\{a_k\}_{k=0}^{n-1}$ je konečná posloupnost přirozených čísel. $\{a_k\}_{k=0}^{n-1}$ je žonglovací posloupnost právě tehdy, když konečná posloupnost $\{(a_k + k) \ mod \ n\}_{k=0}^{n-1}$ obsahuje každé číslo z množiny $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ právě jednou. [2]

2.3 Vytváření nových žonglovacích posloupností

Pro žongléry je užitečné vědět, jak z již existujících žonglovacích posloupností vytvářet posloupnosti nové. Následující metody [2] z konečné posloupnosti přirozených čísel vytvoří jinou konečnou posloupnost přirozených čísel, která je žonglovací posloupností právě tehdy, když i původní posloupnost je žonglovací.

- **Cyklická záměna:** Posloupnost $\{a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n\}$ změní v posloupnost $\{a_n, a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}\}$. Prováděný trik zůstává de facto stejný, jednotlivé výhozy míčků jsou pouze prováděny v jiných hodech.

- **Prohození stran:** Mějme posloupnost $\{a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_{k+d-1}, a_{k+d}, a_{k+d+1}, \ldots, a_n\}$. Prohozením stran s hody a_k a a_{k+d}, kde $d \leq a_k$ (tzn. míček vyhozený v hodu a_k dopadne v hodu a_{k+d} nebo později) získáme posloupnost $\{a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}, a_{k+d} + d, a_{k+1}, \ldots, a_{k+d-1}, a_k - d, a_{k+d+1}, \ldots, a_n\}$. Viz. Obrázek 2.

- **Vertikální posun:** Posloupnost $\{a_k\}_{k=0}^{n-1}$ změní v posloupnost $\{a_k + l\}_{k=0}^{n-1}$, kde $l \in \mathbb{Z}$, $l \geq -min \ \{a_k\}_{k=0}^{n-1}$. Např. pro $l = -6$ vertikální posun změní žonglovací posloupnost (9,9,6) s osmi míčky v žonglovací posloupnost (3,3,0) se dvěma míčky.

Obrázek 2: Vlevo prohození stran pro $a_k = 4$, $d = 2 < a_k$. Míček vyhozený v hodu a_k dopadne během hodu, kdy by jinak dopadl míček vyhozený v hodu a_{k+d}. Vpravo prohození stran pro $a_k = 2$, $d = 2 = a_k$. Dva výhozy jednoho míčku jsou spojeny do jednoho velkého, uprostřed vzniká nulový hod.

Jak cyklická záměna, tak prohození stran nemění ani počet míčků potřebných k žonglování původní posloupnosti, ani periodu. Dokonce libovolnou žonglovací posloupnost $\{a_k\}_{k=0}^{n-1}$ s m míčky lze jen pomocí cyklických záměn a prohození stran převést na konstantní žonglovací posloupnost $\{m\}_{k=0}^{n-1}$ a to následujícím způsobem (tzv. **vyhlazovací algoritums** [2]).

1. Pokud posloupnost $\{a_k\}_{k=0}^{n-1}$ už konstantní je, algoritmus končí.

2. Pomocí cyklických záměn přeuspořádáme posloupnost $\{a_k\}_{k=0}^{n-1}$ v posloupnost $\{a'_k\}_{k=0}^{n-1}$ tak, aby $a'_0 = max\ \{a_k\}_{k=0}^{n-1}$ (tj. aby bylo rovno výšce této posloupnosti) a zároveň, aby $a'_1 \neq max\ \{a_k\}_{k=0}^{n-1}$. Odteď berme za posloupnost $\{a_k\}_{k=0}^{n-1}$ tuto novou posloupnost $\{a'_k\}_{k=0}^{n-1}$.

3. Pokud $a_0 = a_1 + 1$, pak algoritmus končí. Toto nastává právě tehdy, když zadaná posloupnost není platnou žonglovací posloupností, protože hody a_0 a a_1 posílají míčky na tentýž cílový hod, což vede ke kolizi.

4. Provedeme prohození stran s hody a_0 a a_1 a opakujeme postup znovu od bodu 1.

Př.: (1,2,3,4,5) $\longrightarrow$ CZ (**5**,**1**,2,3,4) $\longrightarrow$ PS (2,4,2,3,4) $\longrightarrow$ CZ (**4**,**2**,4,2,3) $\longrightarrow$ PS (3,3,4,2,3) $\longrightarrow$ CZ (**4**,**2**,3,3,3) $\longrightarrow$ PS (3,3,3,3,3)

Vyhlazovací algoritmus je konečný, protože prohozením stran v bodu 4 vždy klesne hodnota jednoho z maximálních členů posloupnosti alespoň o jedna.

Jelikož efekt prohození stran lze vyrušit prohozením stran na týchž indexech zase zpátky a cyklickou záměnu lze zvrátit $(perioda - 1)$-násobným iterováním cyklické záměny na změněnou posloupnost, znamená to dokonce, že můžeme otočit celý proces, který provádíme se vstupní posloupností během vyhlazovacího algoritmu. Jinými slovy, jakoukoliv žonglovací posloupnost s m míčky a periodou n jsme schopni vytvořit z konstatní žonglovací posloupnosti $\{m\}_{k=0}^{n-1}$ jen za pomoci cyklických záměn a prohazování stran.

Vyhlazovací algoritmus se využívá mj. při důkazu věty o ekvivalentní podmínce pro žonglovací posloupnosti (viz. 2.2). Vlastnost posloupnosti $\{(a_k)\}_{k=0}^{n-1}$, že posloupnost $\{(a_k + k)\ mod\ n\}_{k=0}^{n-1}$ obsahuje nebo neobsahuje každé číslo z množiny $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ právě jednou, se cyklickou záměnou ani prohozením stran nemění. Pro konstantní žonglovací posloupnost uvedená vlastnost platí zjevně, a jelikož každou žonglovací posloupnost dokážeme převést na konstantní, platí i pro všechny žonglovací posloupnosti. A každá posloupnost, která není žonglovací, skončí ve vyhlazovacím algoritmu na bodu 3. V takovém případě ale platí $a_0 + 0 = a_1 + 1$, a tedy uvedená vlastnost neplatí.

Generující algoritmus

Na závěr kapitoly uvedeme algoritmus [2], který umožňuje najít všechny žonglovací posloupnosti o zadaném počtu míčků m a periodou n. Princip vychází z věty o ekvialentní podmínkce pro žonglovací posloupnosti (viz. 2.2). Tento algoritmus prochází všechny posloupnosti tvaru $\{(a_k + k)\ mod\ n\}_{k=0}^{n-1}$ obsahující každé číslo z množiny $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ právě jednou a rekonstruuje z nich původní posloupnosti $\{a_k\}_{k=0}^{n-1}$.

1. Pro každou posloupnost $P = \{b_k\}_{k=0}^{n-1}$ obsahující každé číslo z množiny $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ právě jednou vytvoříme žonglovací posloupnost $Q = \{c_k\}_{k=0}^{n-1} = \{(b_k - k)\ mod\ n\}_{k=0}^{n-1}$. Pokud $b_k - k$ je záporné, bereme, že $(b_k - k)\ mod\ n\ = n + b_k - k$.

2. Označme c aritmetický průměr posloupnosti Q. To je celé číslo, protože z definice P platí $\sum_{k=0}^{n-1} b_k = \sum_{k=0}^{n-1} k$, a tedy $\sum_{k=0}^{n-1} (b_k - k)\ mod\ n = 0$.

3. Položme $d = m - c$. Pokud $d < 0$, pak tato větev algoritmu skončí. Jinak pro každou posloupnost přirozených čísel $R = \{d_k\}_{k=0}^{n-1}$ splňující $\sum_{k=0}^{n-1} d_k = d$ vytvoříme posloupnost $S = \{e_k\}_{k=0}^{n-1} = \{n \cdot d_k\}_{k=0}^{n-1}$.

4. Položme $T = \{f_k\}_{k=0}^{n-1} = \{c_k + e_k\}_{k=0}^{n-1}$. T je žonglovací posloupnost, protože vznikla přičtením násobků periody n k prvkům žonglovací posloupnosti Q, a tudíž $\{(f_k + k)\ mod\ n\}_{k=0}^{n-1} = \{(c_k + k)\ mod\ n\}_{k=0}^{n-1} = P$. Jelikož aritmetický průměr posloupnosti S je d, pak arimetický průměr posloupnosti T je m. T je proto žonglovací posloupnost s m míčky a periodou n a je vrácena algoritmem.

Př.: Hledáme všechny žonglovací posloupnosti se třemi míčky $(m = 3)$ a periodou $n = 2$.

P	(0,1)	(1,0)
Q	(0,0)	(1,1)
c	0	1
d	3	2
R	(3,0),(0,3),(1,2),(2,1)	(2,0),(0,2),(1,1)
S	(6,0),(0,6),(2,4),(4,2)	(4,0),(0,4),(2,2)
T	(6,0),(0,6),(2,4),(4,2)	(5,1),(1,5),(3,3)

Pokud vynecháme posloupnosti lišící se pouze cyklickou záměnou, získáme žonglovací posloupnosti (6,0), (4,2), (5,1) a (3,3). Všechny tyto posloupnosti kromě (3,3) jsou minimální.

3 Stavové grafy

Žonglovací posloupnosti sice dávají návod, jak vyhazovat míčky během vybraného triku, ale už neříkají, jak z jednoho triku přejít do druhého, jak dva triky spojit dohromady či jak naopak z jednoho složitějšího triku udělat více jednodušších. Navíc některé triky mohou být natolik složité, že je třeba si na začátku žonglování míčky nějakým určitým způsobem rozhodit. Na tyto otázky však lze odpovědět pomocí stavových grafů.

3.1 Konstrukce stavového grafu

Stavový graf konstruujeme pro pevný počet míčků m a stanovenou maximální výšku hodu v, přičemž $m \le v$. Jedná se o graf orientovaný a ohodnocený, jehož vrcholy představují tzv. *žonglovací stavy* [2] pro jednotlivé hody.

Žonglovací stav je posloupnost v čísel, z nichž právě m jsou jedničky a zbytek jsou nuly. První číslo se vztahuje k aktuálnímu hodu a další k hodům po řadě následujícím. Pokud je číslo pro daný hod rovno 1, v tomto hodu dopadne míček a je třeba ho opět hodit. Pokud je ale toto číslo 0, v tomto hodu žádný míček nedopadne a bude proveden nulový hod.

Obsahuje-li vrchol A stav, jehož první číslo je 0, žonglér nemůže v takovém stavu nic dělat, protože nemá v ruce žádný míček. Musí provést nulový hod a počkat na další hod s novým stavem. Spojíme tedy hranou s ohodnocením 0 vrchol A s vrcholem B, jehož stav bude obsahovat všechny prvky stavu vrcholu A kromě první nuly na začátku a s nulou na konci navíc. Např. vrchol se stavem (0,1,1,0,1) spojíme s vrcholem se stavem (1,1,0,1,0). Dopady všech míčků ve vzduchu se tak o jednu dobu přiblíží.

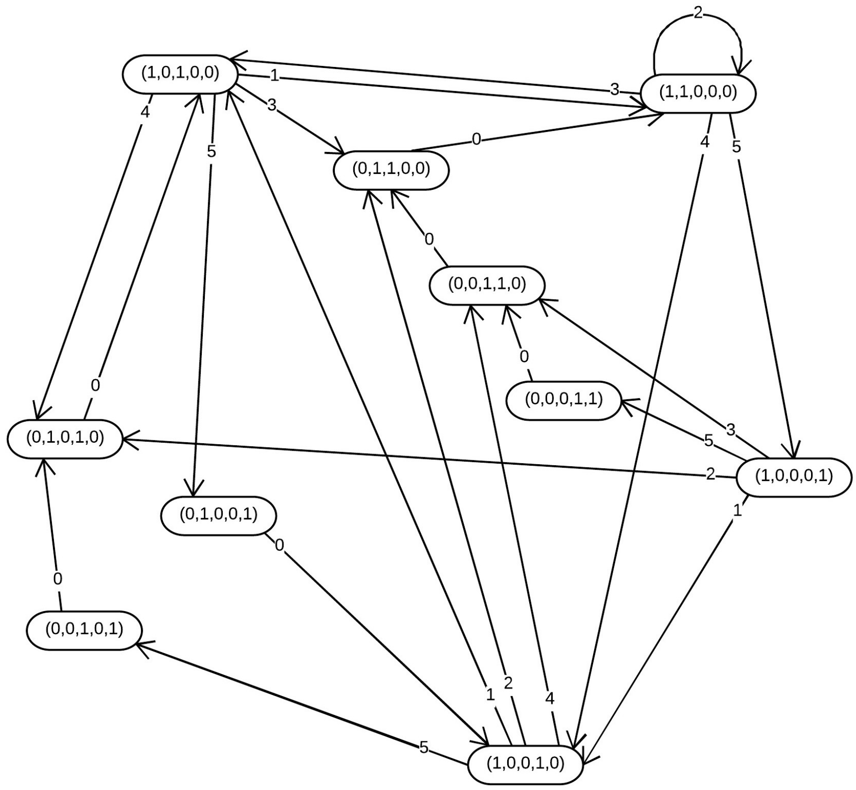
Obsahuje-li vrchol A stav, jehož první číslo je 1, žonglér chytil během tohoto hodu míček a musí ho vyhodit. Uvažujme stav, který bude obsahovat všechny prvky stavu vrcholu A kromě první jedničky na začátku a s nulou na konci navíc, poté vyberme nějakou z jeho nul a nahraďme ji jedničkou. To říká, že žonglér hodil svůj míček tak, aby ho chytil během takového hodu, ve kterém neměl dopadnout žádný z dosud letících míčků. Existuje přesně $v - m + 1$ stavů, které jsme mohli takto vytvořit, a vrchol A spojíme hranou se všemi vrcholy, které obsahují nějaký z těchto stavů. Ohodnocením hrany je výška hodu, který přesunem z počátečního do cílového stavu provedeme. Např. vrchol se stavem (1,1,0,1,0) spojíme s vrcholem se stavem (1,1,1,0,0) a hranu ohodnotíme číslem 2, s vrcholem se stavem (1,0,1,1,0) a hranu ohodnotíme číslem 4 a s vrcholem se stavem (1,0,1,0,1) a hranu ohodnotíme číslem 5.

Pro dané m a v má stavový graf celkem $\binom{v}{m}$ vrcholů s vzájemně různými stavy.

3.2 Přechod mezi triky

Uzavřený cyklus se zvoleným počátečním vrcholem ve stavovém grafu představuje vždy nějakou žonglovací posloupnost. Členy této posloupnosti získáme postupným přečtením ohodnocení hran ve směru cyklu od počátečního vrcholu. Např. cyklus v obrázku 3 zahrnující po řadě vrcholy se stavy (1,0,1,0,0), (0,1,0,0,1) a (1,0,0,1,0) nám dává žonglovací posloupnost (5,0,1).

Pokud žonglér žongluje podle nějaké žonglovací sekvence, může z ní přejít do jiné žonglovací sekvence ve chvíli, kdy žonglování nachází ve stavu společném pro obě tyto sekvence. Např. pokud žongluje (5,0,1) a je ve stavu (1,0,1,0,0), může přejít do posloupnosti (3,1). Dokonce je možné obě posloupnosti spojit do jedné posloupnosti (5,0,1,1,3). Naopak libovolnou žonglovací posloupnost, která navštěvuje stejný stav alespoň dvakrát, lze v tomto stavu rozpojit na dvě posloupnosti s kratší periodou.



Obrázek 3: Stavový graf pro dva míčky a maximální výšku hodu 5.

Všechny žonglovací posloupnosti s maximální výškou v a m míčky jsou reprezentovány nějakým cyklem v odpovídajícím stavovém grafu.

Každý stavový graf má právě jeden vrchol, ze kterého hrana vede do něj samotného. Tento cyklus o jedné hraně představuje minimální žonglovací posloupnost (m). Stav v tomto vrcholu se nazývá *základní stav* [2] a jeho prvních m členů jsou jedničky, zbytek jsou nuly. Stavy, které nejsou základní, nazýváme *excitované* [2].

Možný postup pro začínání složitějších triků s m míčky je takový, že žonglér začne nejprve žonglovat posloupnost (m), která zahrnuje pouze základní stav, aby všechny míčky vyhodil do vzduchu, a poté postupně přejde do stavu, ze kterého lze začít žonglovat požadovanou posloupnost. Např. posloupnost (1,2,3,4,5) se začíná přechodem ze základního stavu z posloupnosti (3). Abychom byli přesní, žonglovanou posloupností ve skutečnosti bude (4,5,1,2,3), protože první hod, který se liší od posloupnosti (3) bude mít výšku 4, a pokud bude žonglér chtít později přejít zpět do (3), bude muset skončit hodem s výškou 3.

4 Žonglování v praxi

4.1 Siteswapová notace

Podoba zápisu žonglovací posloupnosti je u žonglérů z praktických důvodů jiná než u matematiků. Siteswapový zápis nepoužívá závorky na vyznačení začátku a konce posloupnosti a mezi jednotlivé členy nepíše čárky. Dvojciferná čísla 10 až 35 jsou nahrazena velkými písmeny A až Z latinské abecedy. Vyšší hodnoty zpravidla nebývají potřeba. Z posloupnosti (11,9,7,5,3,1) se tak stává stručné B97531.

Při interpretaci žonglovací posloupnosti se už počítá s tím, že žonglér žongluje oběma rukama. První číslo posloupnosti značí výhoz pro pravou ruku, dále se levá a pravá ruka střídají. Pokud je perioda žonglovací posloupnosti lichá, pak se pochopitelně po projití celé posloupnosti role rukou vymění. Sudá čísla značí hod z jedné ruky do té samé ruky, zatímco liché číslo znamená přehození míčku z jedné ruky do druhé.[3] Protože každý prvek posloupnosti udává počet dob, který má míček strávit ve vzduchu, může se stát, že žonglér potřebuje zapsat, že míček má letět sudý počet dob z jedné ruky do druhé, nebo naopak lichý počet dob z jedné ruky do té samé. Na označení takového výhozu, který letí do jiné ruky, než by běžně měl, se používá písmeno malé „x“ uvedené za číslem.

S posloupnostmi obsahující písmeno „x“ se setkáváme hlavně u tzv. synchronních triků, které jdou nad rámec zde uvedené teorie. Během nich se vyhazují míčky z pravé a levé ruky současně. Odpovídající posloupnosti se skládají z dvojic čísel v závorkách, které představují jednotlivé dvou-hody. Př. (8,6x)(4x,6).

4.2 Závěr

Asi největším přínosem matematického zápisu žonglovacího triku jako série hodů je vůbec možnost trik nějak snadno popsat. Žonglovací posloupnosti představují společný jazyk, který usnadňuje komunikaci mezi žongléry. V dnešní době existuje mnoho počítačových aplikací, které na základě žonglovací posloupnosti vytvoří její animaci, takže kdokoliv se může kdykoliv podívat, jak ten či onen trik vypadá. I učení se novým trikům je tak jednodušší. Pokud se žonglér chce naučit náročnější trik, může se nejprve naučit jednodušší trik s podobnou žonglovací posloupností.

Navíc tato teorie přispívá k objevování nových žonglovacích triků. Žonglér si může nechat počítačem vygenerovat všechny žonglovací posloupnosti zadaných parametrů a je pak jen na něm, aby si z nich vybral ty, které považuje za esteticky nebo jinak zajímavé.

Zdroje

[1] Burkard Polster, *Juggling, maths and a beautiful mind / plus.maths.org*, https://plus.maths.org/content/os/issue52/features/polster/index, 9.9.2017

[2] Burkard Polster, *The Mathematics of Juggling*, Springer-Verlag Inc., New York, 2003, ISBN 0-387-95513-5.

[3] *Juggle Wiki*, http://juggle.wikia.com/wiki/Juggle_Wiki, 11.9.2017

[4] Michal Zamboj, *Matematická teorie žonglování*, Diplomová práce, MFF UK, Praha, 2014, dostupné na https://is.cuni.cz/webapps/zzp/detail/130757/

[5] Osobní rozhovor s žonglérem Filipem Štanclem, Praha, 10.9.2017

Veškeré obrázky byly vytvořeny pomocí webové služby Lucidchart. Text práce byl vytvořen pomocí online LaTeX editoru Overleaf.

[3] Konkrétně číslo 2 má v žonglovacích posloupnostech zvláštní význam. Formálně by se mělo jednat o krátký výhoz z jedné do té samé ruky. V praxi je však realizován tak, že žonglér míček po dvě doby drží. Tedy žonglovací posloupnost 2 říká, že má žonglér držet v každé ruce jeden míček a jinak nic nedělat.