

# Stabilita proudění

Vít Průša

`prusv@karlin.mff.cuni.cz`

Matematický ústav, Univerzita Karlova

7. května 2015

## 1 Úvod

- Stabilita řešení
- Hagen–Poiseuille
- Rayleigh–Bénard

## 2 Matematická formulace

- Rovnice
- Linearizace v blízkosti stacionárního řešení

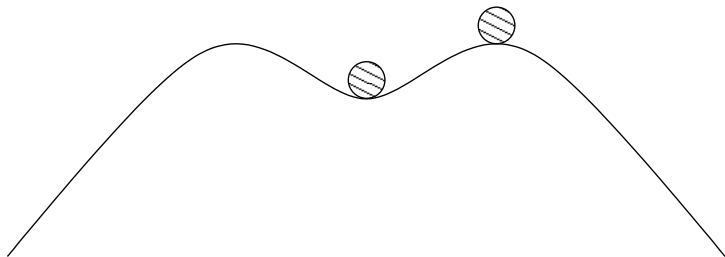
## 3 Výpočty

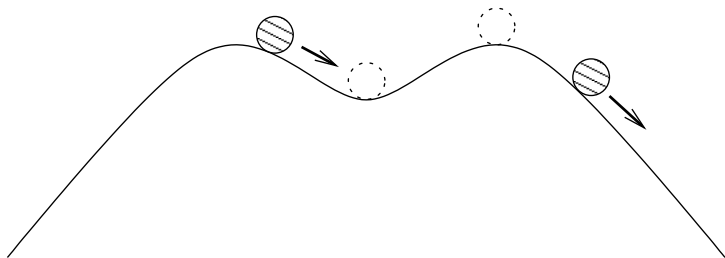
- Orr–Sommerfeld rovnice
- Diskretizace spektrální metodou

## 4 Přechodné růsty (transient growth)

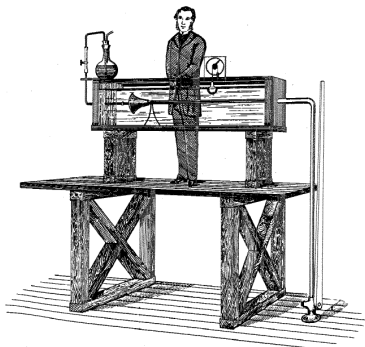
- Nenormální operátory
- Pseudospektrum

## 5 Závěr





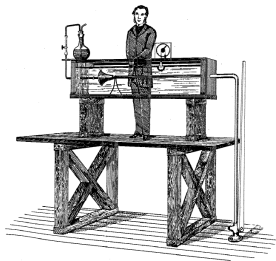
# Reynolds experiment



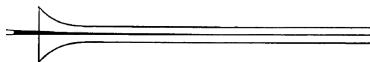
Obrázek: Reynolds experiment.

Osborne Reynolds. An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and of the law of resistance in parallel channels. *Proc. R. Soc. Lond.*, 25:84–99, 1883

# Reynolds experiment – základní pozorování



(a) Reynolds experiment.



(b) Laminární proudění.



(c) Turbulentní proudění.

[...] the internal motion of water assumes one or other of two broadly distinguishable forms—either the elements of the fluid follow one another along lines of motion which lead in the most direct manner to their destination, or the eddy about in sinous paths the most indirect possible.

# Proč je to zajímavé?

Parabolický rychlostní profil

$$\mathbf{v} = \frac{\Delta_s R^2}{4\rho\nu} \left( 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right) \mathbf{e}_{\hat{z}}$$

je řešením rovnic pro proudění. Do vzorce lze dosadit pro jakékoliv  $\Delta_s$ . Jak je možné, že parabolický rychlostní profil v experimentu **nevidíme** pro jakékoliv  $\Delta_s$ ?

Gotthilf Heinrich Ludwig Hagen. Über die Bewegung des Wassers in Einen Cylindrischen Röhren. *Poggendorf's Annalen der Physik und Chemie*, pages 423–442, 1839

Jean Léonard Marie Poiseuille. Sur le mouvement des liquides de nature différente dans les tubes de très petits diamètres. *Annales de Chimie et Physique*, XXI:76–110, 1847

Friction factor:

$$\lambda \approx \frac{\text{pressure drop}}{\text{volumetric flow rate}}$$

Reynolds číslo:

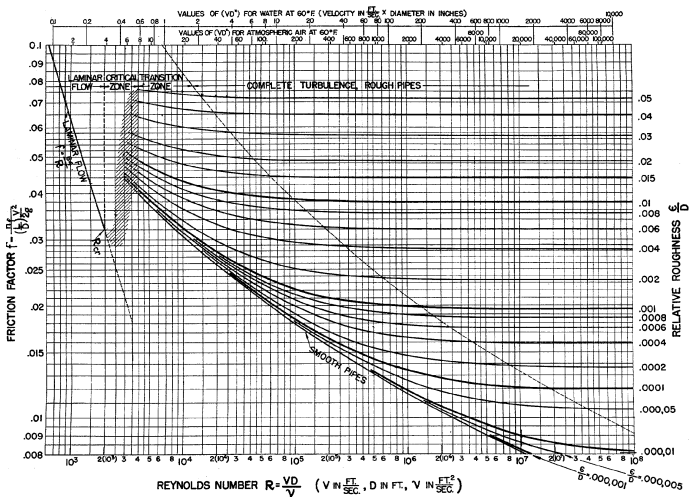
$$\text{Re} = \frac{U_{\max} R}{\nu}$$

Pro **laminární proudění** (parabolický rychlostní profil):

$$\lambda = \frac{64}{\text{Re}}$$



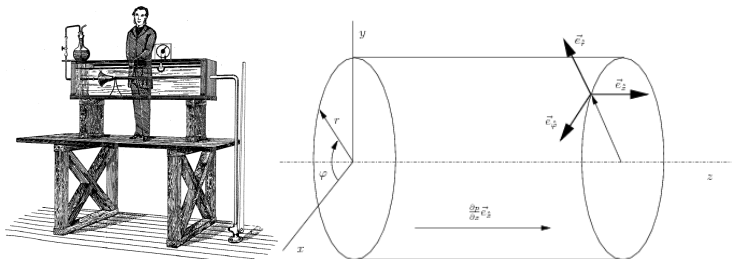
# Moody diagram



Lewis F. Moody. Friction factors for pipe flow. *Transactions of ASME*, 66:671–684, November 1944

<https://www.youtube.com/watch?v=5ApSJe4FaLI>

# Reynolds experiment – matematický popis



Navier–Stokes rovnice, okrajové podmínky  $\mathbf{u}|_{\partial\Omega} = \mathbf{0}$ :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + [\nabla \mathbf{u}] \mathbf{u} = -\nabla p + \frac{1}{\text{Re}} \Delta \mathbf{u}$$
$$\text{div } \mathbf{u} = 0$$

Tlakový gradient ve směru  $\mathbf{e}_z$ :  $\frac{\partial p}{\partial z} = -\Delta_s$

# Reynolds experiment – evoluční rovnice pro poruchu

Rychlostní pole rozložíme na základní rychlostní pole  $\mathbf{V}$  a poruchu  $\mathbf{v}$ :

$$\mathbf{u} = \mathbf{V} + \mathbf{v}$$

Evoluční rovnice pro poruchu  $\mathbf{v}$ :

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + [\nabla \mathbf{V}] \mathbf{v} + [\nabla \mathbf{v}] \mathbf{V} + [\nabla \mathbf{v}] \mathbf{v} = -\nabla p + \frac{1}{\text{Re}} \Delta \mathbf{v}$$

$$\text{div } \mathbf{v} = 0$$

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0$$

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{t}|_{\partial\Omega} = 0$$

$$\mathbf{v}|_{t=0} = \mathbf{v}_0$$

# Rayleigh–Bénard – evoluční rovnice pro poruchu

Rychlostní a teplotní pole rozložíme na základní rychlostní pole (bez proudění) a základní teplotní pole (lineární teplotní profil):

$$\mathbf{u} = \mathbf{V} + \mathbf{v}$$

$$\vartheta = T + \theta$$

Evoluční rovnice pro poruchu:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + [\nabla \mathbf{v}] \mathbf{v} = -\nabla p + \Delta \mathbf{v} + \text{R}\theta \mathbf{e}_z$$

$$\text{div } \mathbf{v} = 0$$

$$\text{Pr} \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} + \mathbf{v} \bullet \nabla \theta \right) = \text{R}v^2 + \Delta \theta$$

$$\mathbf{v}|_{\partial\Omega} = 0$$

$$\theta|_{\partial\Omega} = 0$$

$$\mathbf{v}|_{t=0} = \mathbf{v}_0$$

$$\theta|_{t=0} = \theta_0$$

Úplný systém:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbb{A} \mathbf{v} + \mathbb{N}(\mathbf{v}),$$
$$\mathbf{v}|_{t=t_0} = \mathbf{v}_0.$$

Linearizace:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbb{A} \mathbf{v},$$
$$\mathbf{v}|_{t=t_0} = \mathbf{v}_0.$$

Struktura rovnic po linearizaci:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbb{A}(\text{Re}, \mathbf{V}) \mathbf{v}$$

Hledáme řešení ve tvaru:

$$\mathbf{v}(x, y, z, t) = \tilde{\mathbf{v}}(x, y, z) e^{-i\omega t} = \tilde{\mathbf{v}}(x, y, z) e^{-i\Re(\omega)t} e^{\Im(\omega)t}$$

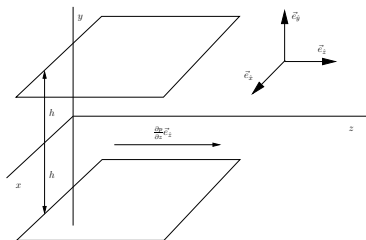
Problém pro vlastní čísla:

$$i\omega \tilde{\mathbf{v}} = \mathbb{A}(\text{Re}, \mathbf{V}) \tilde{\mathbf{v}}$$

Řekneme, že základní rychlostní pole  $\mathbf{V}$  je pro dané Reynolds číslo  $\text{Re}$  stabilní vůči infinitesimálním poruchám, právě když všechna vlastní čísla  $\omega$  operátoru  $\mathbb{A}$  platí

$$\Im(\omega) < 0.$$

# Orr–Sommerfeld rovnice (proudění v rovinném kanálu)



Hledáme řešení ve tvaru:

$$\mathbf{v}(y, z, t) = \tilde{\mathbf{v}}(y)e^{i(\alpha z - \omega t)}$$

Rovnice pro  $\tilde{v}^{\hat{y}}$ , okrajové podmínky  $\tilde{v}^{\hat{y}}|_{y=\pm 1} = 0$ ,  $\frac{d\tilde{v}^{\hat{y}}}{dy}|_{y=\pm 1} = 0$ :

$$\left(-i\omega + i\alpha V^{\hat{z}}\right) \left(\frac{d^2}{dy^2} - \alpha^2\right) \tilde{v}^{\hat{y}} - i\alpha \frac{d^2 V^{\hat{z}}}{dy^2} \tilde{v}^{\hat{y}} = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{d^2}{dy^2} - \alpha^2\right)^2 \tilde{v}^{\hat{y}}$$

Struktura:

$$-i\omega B \tilde{v}^{\hat{y}} = C \tilde{v}^{\hat{y}}$$



# Lagrange interpolace

Lagrange interpolace:

$$p(x) = \sum_{j=0}^n f_j l_j(x) \quad l_j(x) =_{\text{def}} \frac{\prod_{k=0, k \neq j}^n (x - x_k)}{\prod_{k=0, k \neq j}^n (x_j - x_k)}$$

Zřejmě:

$$p(x_j) = f_j \quad l_j(x_k) = \begin{cases} 1, & j = k, \\ 0, & \text{v ostatních případech} \end{cases}$$

Lloyd N. Trefethen. *Spectral methods in MATLAB*, volume 10 of *Software, Environments, and Tools*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 2000

Lloyd N. Trefethen. *Approximation theory and approximation practice*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 2013

# Barycentrická interpolace I

Barycentric weight:

$$w_j =_{\text{def}} \frac{1}{\prod_{k=0, k \neq j}^n (x_j - x_k)}$$

Polynom:

$$l(x) =_{\text{def}} \prod_{k=0}^n (x - x_k) \quad l_j(x) = l(x) \frac{w_j}{x - x_j}$$

Lagrange interpolace:

$$p(x) = \left( \sum_{j=0}^n f_j \frac{w_j}{x - x_j} \right) l(x)$$

Zřejmě:

$$1 = \sum_{j=0}^n l_j(x) = \left( \sum_{j=0}^n \frac{w_j}{x - x_j} \right) l(x)$$

Lagrange interpolace (barycentric formula):

$$p(x) = \frac{\sum_{j=0}^n f_j \frac{w_j}{x - x_j}}{\sum_{j=0}^n \frac{w_j}{x - x_j}}$$

Máme:

$$\left\{ f(x) \Big|_{x=x_j} \right\}_{i=0}^n$$

Chceme:

$$\left\{ \frac{df}{dx} \Big|_{x=x_j} \right\}_{i=0}^n$$

Umíme:

$$\frac{dp}{dx} = \frac{d}{dx} \left( \frac{\sum_{j=0}^n f_j \frac{w_j}{x-x_j}}{\sum_{j=0}^n \frac{w_j}{x-x_j}} \right)$$

Aproximace derivace:

$$\frac{df}{dx} \Big|_{x=x_j} \approx \frac{dp}{dx} \Big|_{x=x_j}$$

Derivace interpolačního polynomu:

$$p(x) = \sum_{j=0}^n f_j l_j(x) \implies \frac{dp}{dx}(x) = \sum_{j=0}^n f_j \frac{dl_j}{dx}(x)$$

Derivace „bázové“ funkce v interpolačních bodech:

$$\left. \frac{dl_j}{dx} \right|_{x=x_i} = \frac{w_j}{w_i} \frac{1}{x_i - x_j} \quad \left. \frac{dl_j}{dx} \right|_{x=x_j} = - \sum_{i=0, i \neq j}^n \left. \frac{dl_j}{dx} \right|_{x=x_i}$$

Celkem:

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_i} \approx \left. \frac{dp}{dx} \right|_{x=x_i} = \sum_{j=0}^n f_j \frac{w_j}{w_i} \frac{1}{x_i - x_j} = \sum_{j=0}^n D^{(1)}_{ij} f_j$$

Chebyshev body, interval  $[-1, 1]$ ,  $x_i = \cos\left(\frac{(k-1)\pi}{N-1}\right)$ ,  $i = 1, \dots, N$ :

$$\begin{bmatrix} \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_1} \\ \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_2} \\ \vdots \\ \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_N} \end{bmatrix} = \mathbb{D}^{(1)} \begin{bmatrix} f|_{x=x_1} \\ f|_{x=x_2} \\ \vdots \\ f|_{x=x_N} \end{bmatrix}$$

Polož  $c_1 = c_N = 2$ ,  $c_2 = \dots = c_{N-1} = 1$ :

$$D_{11}^{(1)} = \frac{2(N-1)^2 + 1}{6}$$

$$D_{NN}^{(1)} = -\frac{2(N-1)^2 + 1}{6}$$

$$D_{kj}^{(1)} = \frac{c_k}{c_j} \frac{(-1)^{j+k}}{(x_k - x_j)}$$

$$D_{jj}^{(1)} = -\frac{1}{2} \frac{x_j}{(1 - x_j^2)}$$

# Derivování IV

Pozor na konvenci číslování uzlových bodů.

$$D_N = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \frac{2N^2 + 1}{6} & & \frac{1}{2}(-1)^N \\ \hline & & \frac{(-1)^{i+j}}{x_i - x_j} \\ \hline -\frac{1}{2} \frac{(-1)^i}{1 - x_i} & \frac{-x_j}{2(1 - x_j^2)} & \frac{1}{2} \frac{(-1)^{N+i}}{1 + x_i} \\ \hline & \frac{(-1)^{i+j}}{x_i - x_j} & \\ \hline -\frac{1}{2}(-1)^N & -2 \frac{(-1)^{N+j}}{1 + x_j} & -\frac{2N^2 + 1}{6} \\ \hline \end{array}$$

Lloyd N. Trefethen. *Spectral methods in MATLAB*, volume 10 of *Software, Environments, and Tools*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 2000

J. A. Weideman and S. C. Reddy. A MATLAB differentiation matrix suite. *ACM Trans. Math. Softw.*, 26(4):465–519, 2000

Rovnice pro  $\tilde{v}^{\hat{y}}$ , okrajové podmínky  $\tilde{v}^{\hat{y}}|_{y=\pm 1} = 0$ ,  $\frac{d\tilde{v}^{\hat{y}}}{dy}|_{y=\pm 1} = 0$ :

$$\left(-i\omega + i\alpha V^{\hat{z}}\right) \left(\frac{d^2}{dy^2} - \alpha^2\right) \tilde{v}^{\hat{y}} - i\alpha \frac{d^2 V^{\hat{z}}}{dy^2} \tilde{v}^{\hat{y}} = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{d^2}{dy^2} - \alpha^2\right)^2 \tilde{v}^{\hat{y}}$$

Plán:

- Rovnici vynutíme ve vnitřních interpolačních bodech  $i = 2, \dots, N - 1$ .  
(V krajních bodech intervalu máme okrajovou podmínku  $\tilde{v}^{\hat{y}}|_{y=\pm 1} = 0$ . Podmínka  $\frac{d\tilde{v}^{\hat{y}}}{dy}|_{y=\pm 1} = 0$  se vynucuje lehce komplikovanějším způsobem.)
- Derivace nahradíme maticovým násobením  $\frac{d}{dx} \mapsto \mathbb{D}(1)$ .



J. A. Weideman and S. C. Reddy. A MATLAB differentiation matrix suite. *ACM Trans. Math. Softw.*, 26(4):465–519, 2000

Lloyd N. Trefethen. *Spectral methods in MATLAB*, volume 10 of *Software, Environments, and Tools*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 2000

# Přechodný růst I

Rovnice:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} v \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\text{Re}} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{\text{Re}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \eta \end{bmatrix}$$

Operátor:

$$\mathbb{A} =_{\text{def}} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\text{Re}} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{\text{Re}} \end{bmatrix}$$

# Přechodný růst I

Rovnice:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} v \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\text{Re}} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{\text{Re}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \eta \end{bmatrix}$$

Operátor:

$$\mathbb{A} =_{\text{def}} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\text{Re}} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{\text{Re}} \end{bmatrix}$$

Operátor  $\mathbb{A}$  je nenormální.

$$\mathbb{A}^T \mathbb{A} \neq \mathbb{A} \mathbb{A}^T$$

Vlastní čísla:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{\text{Re}}$$

Báze v  $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathbf{v}_1 = [1 \ 1]^T$ ,  $\mathbf{v}_2 = [0 \ 1]^T$ :

$$(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}) \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$$

$$(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I})^2 \mathbf{v}_1 = (\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}) \mathbf{v}_2 = 0$$

Rovnice:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{q} = \mathbb{A}\mathbf{q}$$

Pozorování:

$$\mathbf{q}(t) = e^{\mathbb{A}t}\mathbf{q}_0 = e^{\mathbb{A}t}(a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2) = \dots = a_1e^{\lambda t}\mathbf{v}_1 + (a_2 + a_1t)e^{\lambda t}\mathbf{v}_2$$

Nabízí se otázka jak odhadnout počáteční růst řešení. (Aneb pokusit se kvantifikovat nakolik je příslušný operátor nenormální.)

Pseudospektrum operátoru  $A$ ,  $\Lambda_\varepsilon(A)$ ,  $|\cdot|$  je 2-norma:

- $\Lambda_\varepsilon(A) =_{\text{def}} \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| (zI - A)^{-1} \right| \geq \frac{1}{\varepsilon} \right\}$
- $\Lambda_\varepsilon(A) =_{\text{def}} \{ z \in \mathbb{C} : \text{existuje } E, |E| \leq \varepsilon, \text{ tak, že } z \in \Lambda(A + E) \}$
- $\Lambda_\varepsilon(A) =_{\text{def}} \{ z \in \mathbb{C} : \text{existuje } \mathbf{v}, |\mathbf{v}| = 1, \text{ tak, že } |(A - zI)\mathbf{v}| \leq \varepsilon \}$
- $\Lambda_\varepsilon(A) =_{\text{def}} \{ z \in \mathbb{C} : \sigma_{\min} [zI - A] \leq \varepsilon \}$

J. L. M. van Dorselaer, J. F. B. M. Kraaijevanger, and M. N. Spijker. Linear stability analysis in the numerical solution of initial value problems. In *Acta numerica, 1993*, Acta Numer., pages 199–237. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993

# Spodní odhad na růst

Rovnice:

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt} = -i\mathbb{A}\mathbf{q}$$
$$\mathbf{q}|_{t=0} = \mathbf{q}_0$$

Velikost:

$$\sup_{\mathbf{q}_0 \neq \mathbf{0}} \frac{|\mathbf{q}(t)|}{|\mathbf{q}_0|} = |e^{-i\mathbb{A}t}|$$

Odhad:

$$\sup_{t \geq 0} |e^{-i\mathbb{A}t}| \geq \sup_{\varepsilon > 0} \frac{1}{\varepsilon} \sigma_\varepsilon(\mathbb{A})$$
$$\sigma_\varepsilon(\mathbb{A}) =_{\text{def}} \sup_{z \in \Lambda_\varepsilon(\mathbb{A})} \Im(z)$$

Lloyd N. Trefethen, Anne E. Trefethen, Satish C. Reddy, and Tobin A. Driscoll. Hydrodynamic stability without eigenvalues.

*Science*, 261(5121):578–584, July 1993

- Důležitou vlastností řešení je jeho stabilita.
- Derivování je také „matice“. (S tímto tvrzením zacházejte opatrně.)
- Spektrální metoda je vhodný nástroj pro diskretizaci.
- Nenormální matice (operátory) jsou „ošklivé“.