Kapitola 9

Determinanty

Začneme pomocnou definicí.

Definice 9.1 *Vzájemně jednoznačné zobrazení* $p : X \to X$ *nazýváme* permutace *na množině* X*. Je-li* p *permutace na množině* X*, pak inverzní zobrazení* $p^{-1} : X \to X$ *nazýváme* inverzní permutace *k permutaci* p*. Jsou-li* p, q *dvě permutace na množině* X*, pak složené zobrazení, tj. permutaci,* $q \circ p : X \to X$ *nazýváme* složení *permutací* p *a* q *(v tomto pořadí). Identické zobrazení* $\imath : X \to X$*, pro které platí* $\imath(x) = x$ *pro každé* $x \in X$*, nazýváme* identická permutace *na množině* X*.*

Zřejmě platí

- $p \circ \imath = \imath \circ p = p$ pro každou permutaci p na množině X,
- $p \circ p^{-1} = p^{-1} \circ p = \imath$ pro každou permutaci p na množině X,
- $r \circ (q \circ p) = (r \circ q) \circ p$ pro každé tři permutace p, q, r na množině X.

Budeme se zabývat výhradně permutacemi na množině $\{1, 2, \ldots, n\}$. Množinu všech permutací na $\{1, 2, \ldots, n\}$ budeme nazývat *grupa všech permutací* na množině $\{1, 2, \ldots, n\}$ a budeme ji označovat S_n.

Permutace můžeme zapisovat různým způsobem. V případě permutací na konečné množině $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ je můžeme zapsat pomocí tabulky. Do tabulky napíšeme do horního řádku čísla $1, 2, \ldots, n$ a pod každé číslo i napíšeme hodnotu $p(i)$. Tak například

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 5 & 2 & 9 & 4 & 1 & 8 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

je permutace na množině $\{1, 2, \ldots, 9\}$.

Pokud se domluvíme, že v horním řádku budeme psát čísla vždy ve stejném pořadí $1, 2, \ldots, n$, tak stačí zapsat pouze druhý řádek této tabulky $(3, 5, 2, 9, 4, 1, 8, 7, 6)$.

Permutace můžeme zapisovat rovněž graficky. V rovině si zvolíme body $1, 2, \ldots, n$, a pokud permutace p zobrazuje prvek i do prvku $j = p(i)$, pak nakreslíme šipku z bodu i do bodu $j = p(i)$. Takovému obrázku říkáme *graf permutace* p. Graf permutace je charakterizován vlastnostmi

- z každého bodu $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ vychází právě jedna šipka, neboť hodnota $p(i)$ je určena jednoznačně pro každý bod $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$,
- do každého bodu $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ vede právě jedna šipka, neboť pro každý bod $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ existuje právě jeden bod $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ takový, že $j = p(i)$.

Z grafu permutace je ihned vidět, že každá permutace se skládá z několika cyklů. Tak například uvedená permutace p na množině $\{1, 2, \ldots, 9\}$ se skládá ze dvou cyklů. Jeden je na bodech $1, 3, 2, 5, 4, 9$, má délku 6, a druhý je na bodech $7, 8$, má délku 2. Permutaci tak můžeme zapsat v *cyklickém zápisu* jako

$$p = (1, 3, 2, 5, 4, 9), (7, 8).$$

Každý bod z množiny $\{1, 2, \ldots, 9\}$ se zobrazí do bodu, který v zápisu následuje těsně za ním ve stejné závorce. Poslední bod v nějaké závorce se zobrazí do prvního bodu v téže závorce.

Pro obecnou permutaci p na nějaké konečné množině X najdeme cyklus obsahující bod $i_1 \in X$ tak, že postupně zapisujeme, kam se permutací p zobrazuje. Proto $i_2 = p(i_1)$, $i_3 = p(i_2)$, $\ldots$, tj. $i_{k+1} = p(i_k)$ pro libovolné $k > 0$. Protože je množina X konečná, musí se v posloupnosti $i_1, i_2, \ldots$ nějaký prvek opakovat. Označme $k + 1$ nejmenší index takový, že i_{k+1} se rovná některému z předcházejících prvků posloupnosti $i_1, \ldots, i_k$. To znamená, že $p(i_k) = i_{k+1} \in \{i_1, \ldots, i_k\}$. To znamená, že $p(i_k) = i_j$ pro nějaké $j \leq k$. Pokud by bylo $j > 1$, platilo by $p(i_k) = p(i_{j-1}) = p_j$. Protože i_{k+1} byl první prvek posloupnosti $i_1, i_2, \ldots$, který se rovnal některému z předchozích prvků, bylo by $i_k \neq i_{j-1}$, což je ve sporu se vzájemnou jednoznačností permutace p. Proto $j = 1$, tj. $p(i_k) = i_1$. Cyklus permutace p obsahující bod i_1 se proto rovná $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$. Počet jeho prvků, tj. číslo k, se nazývá *délka* tohoto cyklu. Je také dobré uvědomit si, že permutace $p \in S_n$ se rovná identické permutaci $\imath$ právě když má všechny cykly délky 1.

Cyklický zápis rovněž popisuje permutaci p jednoznačně stejně jako tabulka nebo graf. Pokud jsou v permutaci nějaké cykly délky 1, tak je obvykle v cyklickém zápisu vynecháváme. V tom případě mluvíme o *redukovaném cyklickém zápisu* permutace. Tak například cyklický zápis permutace

$$q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 3 & 9) \end{pmatrix}$$

se rovná

$$q = (1), (2), (3, 4, 5, 6, 7, 8), (9)$$

a redukovaný cyklický zápis téže permutace q je

$$q = (3, 4, 5, 6, 7, 8).$$

V případě redukovaného cyklického zápisu musíme být předem domluveni, na jaké množině je permutace q definovaná.

Skládání permutací

Nejdříve si ukážeme, jak najít tabulku složené permutace $q \circ p$, známe-li tabulky permutací p a q. Vezmeme například výše uvedené permutace p, q. Uděláme si tabulku o třech řádcích tak, že horní dva řádky budou tvořit tabulku permutace p a dolní dva řádky tabulku permutace q. Dostaneme tak

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 5 & 2 & 9 & 4 & 1 & 8 & 7 & 6 \\ 4 & 6 & 2 & 9 & 5 & 1 & 3 & 8 & 7 \end{pmatrix}.$$

V každém sloupci máme pod prvkem i ve druhém řádku prvek $p(i)$ a ve třetím řádku prvek $q(p(i))$. Tabulku složené permutace $q \circ p$ nyní dostaneme tak, že vynecháme druhý řádek:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 6 & 2 & 9 & 5 & 1 & 3 & 8 & 7 \end{pmatrix}.$$

Také graf složení dvou permutací snadno získáme z grafů obou permutací. Pro obě permutace použijeme stejnou množinu bodů v rovině. Máme-li najít graf složené permutace $q \circ p$ najdeme napřed šipku v grafu p, která vede z bodu i do bodu $p(i)$ a potom navážeme šipkou v grafu permutace q, která vede z bodu $p(i)$ do bodu $q(p(i))$. V grafu složené permutace $q \circ p$ pak vede šipka z bodu i do bodu $q \circ p(i) = q(p(i))$.

O něco složitější je najít cyklický zápis a redukovaný cyklický zápis složené permutace $q \circ p$, známe-li odpovídající zápisy permutací p a q. Pro různé úlohy o permutacích je třeba zvolit vždy ten zápis, který je pro řešení příslušné úlohy nejvhodnější.

Definice 9.2 *Permutace $t \in S_n$ se nazývá* transpozice, *pokud má jeden cyklus délky* 2 *a ostatní cykly délky* 1.

Pro zápis transpozic používáme nejčastěji redukovaný cyklický zápis $t = (i, j)$.

Lemma 9.3 *Každou permutaci $p \in S_n$, kde $n \geq 2$, lze vyjádřit jako složení transpozic.*

Důkaz. Budeme předpokládat, že $p \neq \imath$. V permutaci p tak existuje aspoň jeden cyklus délky aspoň 2. Označíme si jej $(i_1, i_2, \dots, i_k)$. Složíme permutaci p s transpozicí (i_1, i_2). Dostaneme tak permutaci $(i_1, i_2) \circ p$. V této složené permutaci se cyklus $(i_1, i_2, \dots, i_k)$ rozpadne na dva cykly (i_1) a $(i_2, \dots, i_k)$, a všechny ostatní cykly zůstanou beze změny.

V permutaci $(i_2, i_3) \circ (i_1, i_2) \circ p$ se tak původní cyklus $(i_1, i_2, \dots, i_k)$ rozpadne do tří cyklů (i_1), (i_2) a $(i_3, \dots, i_k)$. Jednoduchou indukcí podle k tak dokážeme, že v permutaci

$$(i_{k-1}, i_k) \circ (i_{k-2}, i_{k-1}) \circ \cdots \circ (i_1, i_2) \circ p$$

se původní cyklus $(i_1, i_2, \dots, i_k)$ rozpadne na k cyklů délky 1 a všechny ostatní cykly permutace p zůstanou beze změny.

Opakujeme-li celý postup s dalším cyklem $(j_1, \dots, j_l)$, dostaneme permutaci

$$(j_{l-1}, j_l) \circ (j_{l-2}, j_{l-1}) \circ \cdots \circ (j_1, j_2) \circ (i_{k-1}, i_k) \circ (i_{k_2}, i_{k-1}) \circ \cdots \circ (i_1, i_2) \circ p,$$

ve které se dva cykly $(i_1, i_2, \dots, i_k)$ a $(j_1, \dots, j_l)$ původní permutace p rozpadnou na cykly délky 1 a všechny ostatní cykly zůstávají beze změny. Postupně rozkládáme tímto způsobem další cykly permutace p na cykly délky 1, dokud nedostaneme identickou permutaci $\imath$. Existují proto transpozice $t_1, \dots, t_m$, pro které platí

$$t_m \circ \cdots \circ t_1 \circ p = \imath.$$

Protože pro každou transpozici t platí $t = t^{-1}$, tj. $t \circ t = \imath$, můžeme poslední rovnost složit z transpozicí t_m zleva a dostaneme tak

$$t_{m-1} \circ \ldots \circ t_1 \circ p = t_m.$$

Postupným skládáním s transpozicemi $t_{m-1}, \dots, t_1$ zleva tak dostaneme rovnost

$$p = t_1 \circ t_2 \circ \cdots \circ t_m,$$

což znamená, že jsme permutaci p vyjádřili jako složení transpozic. V případě identické permutace stačí vzít vyjádření $\imath = t \circ t$ pro libovolnou transpozici $t \in S_n$. $\square$

Lemma 9.4 *Počet cyklů v permutaci $p \in S_n$ a permutaci $t \circ p$, kde $t \in S_n$ je libovolná transpozice, se liší o* 1. *Rovněž počty cyklů v permutacích p a $p \circ t$ se liší o* 1.

Důkaz. Označíme $t = (i, j)$. Napřed budeme předpokládat, že prvky i, j leží ve stejném cyklu $(i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_l)$ permutace p a $i = i_1$, $j = j_1$. Pak platí, že v permutaci $t \circ p$ se tento cyklus rozpadne na dva cykly $(i_1, \dots, i_k)$ a $(j_1, \dots, j_l)$ a ostatní cykly zůstanou beze změny. Počet cyklů v permutaci $t \circ p$ je tak o 1 větší, než počet cyklů v permutaci p.

Jsou-li prvky i, j z různých cyklů $(i = i_1, \dots, i_k)$ a $(j = j_1, \dots, j_l)$ permutace p, potom ve složení $t \circ p$ se oba cykly propojí do jednoho cyklu $(i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_l)$ a ostatní cykly zůstanou beze změny, počet cyklů v permutaci $t \circ p$ je proto o 1 menší než počet cyklů v permutaci p.

Zcela stejně dokážeme, že také počet cyklů v permutaci $p \circ t$ se liší o 1 od počti cyklů v permutaci p. $\square$

Lemma 9.5 *Jsou-li $p = t_1 \circ \cdots \circ t_k$ a $p = u_1 \circ \cdots \circ u_l$ dvě různá vyjádření permutace $p \in S_n$ jako složení transpozic, pak jsou obě čísla k, l buď současně sudá nebo jsou současně lichá.*

Důkaz. Z rovnosti $t_1 \circ \cdots \circ t_k = u_1 \circ \cdots \circ u_l$ dostaneme postupným skládáním s transpozicemi $t_1, \dots, t_k$ zleva rovnost

$$t_k \circ \cdots \circ t_1 \circ u_1 \circ \cdots \circ u_l = \imath.$$

To znamená, že počet cyklů v obou permutacích $\imath$ a $t_k \circ \cdots \circ t_1 \circ u_1 \circ \cdots \circ u_l$ je stejný a rovná se n. Podle předchozího Tvrzení 9.4 se počet cyklů v jakékoliv permutaci změní o 1, pokud ji složíme s transpozicí. Proto musí být počet transpozic $k + l$ ve složení $t_k \circ \cdots \circ t_1 \circ u_1 \circ \cdots \circ u_l$ sudý, a tedy jsou čísla k, l buď obě sudá nebo obě lichá. $\square$

Definice 9.6 *Permutace $p \in S_n$ se nazývá* sudá*, pokud ji lze vyjádřit jako složení sudého počtu transpozic. Nazývá se* lichá*, pokud ji lze vyjádřit jako složení lichého počtu transpozic. Definujeme také* znaménko permutace p *jako* 1*, pokud je p sudá permutace, a jako* -1*, pokud je p lichá permutace. Znaménko permutace p označujeme jako* $\operatorname{sgn} p$.

Tvrzení 9.7 *Složení dvou sudých permutací nebo dvou lichých permutací je sudá permutace. Složení sudé permutace s lichou (v jakémkoliv pořadí) je lichá permutace. Speciálně, pro každou permutaci $p \in S_n$ a každou transpozici $t \in S_n$ platí*

$$\mathrm{sgn}\,(t \circ p) = \mathrm{sgn}\,(p \circ t) = -\mathrm{sgn}\;p.$$

Důkaz. Plyne okamžitě z předchozího Tvrzení 9.5. Pokud $p = t_1 \circ \cdots \circ t_k$ a $q = u_1 \circ \cdots \circ u_l$, pak $q \circ p = (u_1 \circ \cdots \circ u_l) \circ (t_1 \circ \cdots \circ t_k)$, permutaci $q \circ p$ proto dostaneme jako složení $k + l$ transpozic. □

Lemma 9.8 *Je-li k počet cyklů permutace $p \in S_n$, pak* $\mathrm{sgn}\;p = (-1)^{n-k}$.

Důkaz. Permutaci p vyjádříme jako složení transpozic $p = (t_1 \circ \cdots \circ t_l) \circ \imath$. Přidáním indentické permutace $\imath$ se složení nezmění. Identická permutace $\imath$ má n cyklů, zatímco permutace p má k cyklů. To znamená, že číslo l musí mít stejnou paritu jako číslo $n - k$ (to znamená, že obě čísla musí být současně sudá nebo současně lichá). Z Definice 9.6 tak plyne

$$\mathrm{sgn}\;p = (-1)^l = (-1)^{n-k}.$$

□

Cvičení 9.1 *Dokažte, že permutace $p \in S_n$ je sudá právě když má sudý počet cyklů sudé délky a je lichá právě když má lichý počet cyklů sudé délky.*

Úloha 9.1 *Charakterizace řešitelných a neřešitelných pozic u hry “15”.*

Determinanty

Definice 9.9 *Je-li $\mathbf{A} = (a_{ij})$ čtvercová matice řádu n s prvky z tělesa $\mathbf{T}$, pak definujeme* determinant *matice $\mathbf{A}$ jako číslo*

$$\det \mathbf{A} = \sum_{p \in S_n} \mathrm{sgn}\;p \cdot a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n} \in \mathbf{T}.$$

Determinant matice $\mathbf{A}$ označujeme rovněž $|\mathbf{A}|$.

Pro zjednodušení zápisu jsme v definici determinantu použili označení $p_i = p(i)$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$ a $p \in S_n$.

Úloha 9.2 *Spočítejte determinant matice řádu* 2 *a matice řádu* 3*. Spočítejte determinant horní trojúhelníkové matice.*

Řešení. Matice řádu 2

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

má determinant $\det \mathbf{A} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Matice řádu 3

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

má determinant

$$\begin{aligned} \det \mathbf{B} &= b_{11}b_{22}b_{33} + b_{12}b_{23}b_{31} + b_{13}b_{21}b_{32} \\ &\quad -b_{11}b_{23}b_{32} - b_{12}b_{21}b_{33} - b_{13}b_{22}b_{31}. \end{aligned}$$

Matice $\mathbf{C} = (c_{ij})$ řádu n je horní trojúhelníková právě když $c_{ij} = 0$ kdykoliv $i > j$. V součtu definujícím $\det \mathbf{C}$ dostaneme pro $p = \imath$ součin $\operatorname{sgn} \imath \cdot c_{11}c_{22} \cdots c_{nn} = c_{11}c_{22} \cdots c_{nn}$. Ukážeme si, že pro jakoukoliv permutaci $p \neq \imath$ je součin $c_{1p_1}c_{2p_2} \cdots c_{np_n} = 0$. V permutaci p je aspoň jeden cyklus délky větší než 1. Ukážeme si, že v tomto cyklu existuje prvek j, pro který platí $j > p(j)$, a tedy $c_{jp_j} = 0$. Má-li tento cyklus délku $m \geq 2$ a je-li $i = i_1$ nějaký prvek tohoto cyklu, pak všechny ostatní prvky můžeme vyjádřit induktivně jako $i_{k+1} = p(i_k)$ pro $k = 1, 2, \ldots, m-1$. Kromě toho rovněž $p(i_m) = i_1$. Nemůže platit $i_1 < i_2 < \cdots < i_m < i_1$. Proto existuje $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$, pro které platí $i_k > p(i_k)$. Pro toto $j = i_k$ pak platí $c_{jp_j} = 0$ a tedy $\operatorname{sgn} p \cdot c_{1p_1}c_{2p_2} \cdots c_{np_n} = 0$. Všechny členy součtu definujícího determinant $\det \mathbf{C}$ určené permutacemi $p \neq \imath$ jsou tak rovné 0, proto

$$\det \mathbf{C} = c_{11}c_{22} \cdots c_{nn}.$$

□

Absolutní hodnota determinantu reálné matice $\mathbf{A} = (a_{ij})$ řádu 2 má jasný geometrický význam. Nakreslíme-li si v rovině dva vektory (a_{11}, a_{12}) a (a_{21}, a_{22}), a doplníme je na rovnoběžník, pak plocha tohto rovnoběžníku se rovná $|\det \mathbf{A}|$ (spočtěte si to!). Číslo $\det \mathbf{A}$ je kladné, pokud je úhel mezi vektory (a_{11}, a_{12}) a (a_{21}, a_{22}) měřený v kladném směru (tj. proti směru hodinových ručiček) menší než π a je záporný, pokud je tento úhel větší než π. Pokud se rovná tento úhel 0 nebo π, tj. jsou-li řádky matice $\mathbf{A}$ lineárně závislé, platí $\det \mathbf{A} = 0$, jak se můžete sami přesvědčit přímo z definice determinantu.

Podobný geometrický význam má rovněž determinant reálné matice $\mathbf{B} = (b_{ij})$ řádu 3. Řádkové vektory $\mathbf{b}_1 = (b_{11}, b_{12}, b_{13})$, $\mathbf{b}_2 = (b_{21}, b_{22}, b_{23})$ a $\mathbf{b}_3 = (b_{31}, b_{32}, b_{33})$ určují v třídimenzionálním prostoru rovnoběžnostěn a jeho objem se rovná $|\det \mathbf{B}|$. Determinant $\det \mathbf{B}$ je kladný, pokud je posloupnost vektorů $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ pravotočivá, tj. pokud umístíme pravou ruku tak, aby prsty ukazovaly od vektoru $\mathbf{b}_1$ k vektoru $\mathbf{b}_2$ ve směru, ve kterém je úhel mezi těmito vektory menší než π, pak palec ukazuje do poloprostoru, do kterého také míří vektor $\mathbf{b}_3$. Deteminant $\det \mathbf{B}$ je záporný, pokud palec ukazuje do opačného poloprostoru než kam míří vektor $\mathbf{b}_3$, tj. pokud je posloupnost $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ levotočivá.

V případě reálných prostorů dimenze větší než 3 můžeme naopak pomocí determinantu definovat, kdy je posloupnost vektorů $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$ pravotočivá nebo levotočivá, a co je to objem zobecněného rovnoběžnostěnu určeného vektory $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$.

Tvrzení 9.10 *Pro každou čtvercovou matici $\mathbf{A} = (a_{ij})$ řádu n platí*

$$\det \mathbf{A} = \det \mathbf{A}^T.$$

Důkaz. Označme si transponovanou matici $\mathbf{A}^T = \mathbf{B} = (b_{ij})$. Pro libovolnou permutaci $p = (p_1, p_2 \ldots, p_n) \in S_n$ (zápis tabulkou) je součin $a_{1p_1} a_{1p_2} \cdots a_{np_n} = b_{p_1 1} b_{p_2 2} \cdots b_{p_n n}$. Součin $a_{1p_2} a_{1p_2} \cdots a_{np_n}$ se při výpočtu $\det \mathbf{A}$ vyskytuje se znaménkem $\operatorname{sgn} p$, zatímco tentýž součin $b_{p_1 1} b_{p_2 2} \cdots b_{p_n n}$ odpovídá při výpočtu $\det \mathbf{B}$ permutaci p^{-1} a má tedy znaménko $\operatorname{sgn} p^{-1} = \operatorname{sgn} p$. V součtech definujících $\det \mathbf{A}$ a $\det \mathbf{B}$ se tak vyskytují stejné součiny se stejným znaménkem, proto $\det \mathbf{A} = \det \mathbf{B} = \det \mathbf{A}^T$. $\square$

Tvrzení 9.11 *Má-li matice $\mathbf{A}$ řádu n dva stejné řádky, pak* $\det \mathbf{A} = 0$.

Důkaz. Předpokládáme, že $\mathbf{A}_{i*} = \mathbf{A}_{j*}$ pro $i < j$, tj. $a_{ik} = a_{jk}$ pro $k = 1, 2, \ldots, n$. Označme $t = (i, j)$ transpozici, která prohazuje i-tý a j-tý řádek. Zvolíme libovolnou permutaci $p \in S_n$ a podíváme se, jaké součiny v součtu definujícím $\det \mathbf{A}$ určují permutace p a $q = p \circ (i, j) = p \circ t$. Platí $q(i) = p(j)$, $q(j) = p(i)$ a $q(k) = p(k)$ pro $k \neq i, j$. Permutace p určuje součin

$$\operatorname{sgn} p \cdot a_{1p_1} \cdots a_{ip_i} \cdots a_{jp_j} \cdots a_{np_n},$$

zatímco permutace $q = p \circ t$ určuje součin

$$\begin{aligned} & \operatorname{sgn} q \cdot a_{1q_1} \cdots a_{iq_i} \cdots a_{jq_j} \cdots a_{nq_n} = \\ = \; & \operatorname{sgn} (p \circ t) \cdot a_{1q_1} \cdots a_{iq_i} \cdots a_{jq_j} \cdots a_{nq_n} = \\ = \; & -\operatorname{sgn} p \cdot a_{1p_1} \cdots a_{ip_j} \cdots a_{jp_i} \cdots a_{np_n} = \\ = \; & -\operatorname{sgn} p \cdot a_{1p_1} \cdots a_{ip_i} \cdots a_{jp_j} \cdots a_{np_n}. \end{aligned}$$

Je $q = p \circ t \neq p$ neboť jedna z permutací p, q je sudá a druhá lichá podle Tvrzení 9.7. Součet součinů určených permutacemi p, q se tak rovná

$$\mathrm{sgn}\ p \cdot a_{1p_1} \cdots a_{ip_i} \cdots a_{jp_j} \cdots a_{np_n} + \mathrm{sgn}\ q \cdot a_{1q_1} \cdots a_{iq_i} \cdots a_{jq_j} \cdots a_{nq_n} = 0.$$

Celou množinu indexů, tj. symetrickou grupu S_n, rozložíme do disjunktních dvojic permutací $\{p, p \circ t\}$. Tyto dvojice jsou skutečně disjunktní. Z rovnosti permutací $p = r$ plyne rovnost $p \circ t = r \circ t$. Podobně z rovnosti $p \circ t = r \circ t$ vyplývá $p = (p \circ t) \circ t = (r \circ t) \circ t = r$ a rovnost $p = r \circ t$ platí právě když $p \circ t = (r \circ t) \circ t = r$. Pokud se tedy dvě dvojice $\{p, p \circ t\}$ a $\{r, r \circ t\}$ protínají, musí se rovnat. Celý součet

$$\sum_{p \in S_n} \mathrm{sgn}\ p \cdot a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n} \in \mathbf{T}.$$

definující $\det \mathbf{A}$ tak můžeme rozložit do neprotínajících se dvojic, z nichž součet každé dvojice se rovná 0. Proto také

$$\det \mathbf{A} = \sum_{p \in S_n} \mathrm{sgn}\ p \cdot a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n} \in \mathbf{T} = 0.$$

□

Věta 9.12 *Předpokládáme, že* $\mathbf{A} = (a_{ij})$ *je čtvercová matice řádu* n *a* $\mathbf{B} = (b_{ij})$ *je matice, kterou dostaneme z matice* $\mathbf{A}$ *nějakou elementární řádkovou úpravou, pak*

- $\det \mathbf{B} = -\det \mathbf{A}$*, pokud jsme* $\mathbf{B}$ *dostali z* $\mathbf{A}$ *prohozením dvou řádků,*
- $\det \mathbf{B} = c \cdot \det \mathbf{A}$*, pokud jsme* $\mathbf{B}$ *dostali z* $\mathbf{A}$ *vynásobením některého řádku prvkem* $0 \neq c \in \mathbf{T}$*,*
- $\det \mathbf{B} = \det \mathbf{A}$*, pokud jsme dostali* $\mathbf{B}$ *z* $\mathbf{A}$ *pomocí třetí elementární řádkové úpravy.*

Důkaz. V případě první elementární úpravy platí $\mathbf{B}_{i*} = \mathbf{A}_{j*}$ a $\mathbf{B}_{j*} = \mathbf{A}_{j*}$ pro nějaké indexy $i < j$, a $\mathbf{B}_{k*} = \mathbf{A}_{k*}$ pro $k \neq i, j$. Porovnáme součin určený nějakou permutací $p \in S_n$ v součtu definujícím $\det \mathbf{A}$ a součin určený permutací $q = p \circ t$ v součtu definujícím $\det \mathbf{B}$. Stejně jako v důkazu předchozího tvrzení označuje t transpozici (i, j). Platí

$$\begin{aligned} \mathrm{sgn}\ q \cdot b_{1q_1} \cdots b_{iq_i} \cdots b_{jq_j} \cdots b_{nq_n} &= \mathrm{sgn}\,(p \circ t) \cdot a_{1p_1} \cdots a_{jp_j} \cdots a_{ip_i} \cdots a_{np_n} = \\ &= -\mathrm{sgn}\ p \cdot a_{1p_1} \cdots a_{ip_i} \cdots a_{jp_j} \cdots a_{np_n}. \end{aligned}$$

V součtech definujících $\det \mathbf{B}$ a $\det \mathbf{A}$ se tak vyskytují stejné součiny, ale s opačnými znaménky. Proto $\det \mathbf{B} = -\det \mathbf{A}$.

Pro důkaz druhého tvrzení si připomeňme, že v matici $\mathbf{B}$ platí $\mathbf{B}_{i*} = c\mathbf{A}_{i*}$ pro nějaké $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, a $\mathbf{B}_{k*} = \mathbf{A}_{k*}$ pro $k \neq i$. Platí proto $b_{ij} = ca_{ij}$ a $b_{kj} = a_{kj}$ pro libovolné j a $k \neq i$. Permutace $p \in S_n$ tak určuje v součtu definujícím $\det \mathbf{B}$ součin

$$\begin{aligned} & \operatorname{sgn} p \cdot b_{1p_1} b_{2p_2} \cdots b_{ip_i} \cdots b_{np_n} = \operatorname{sgn} p \cdot a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots ca_{ip_i} \cdots a_{np_n} = \\ = \ & c \cdot \operatorname{sgn} p \cdot a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{ip_i} \cdots a_{np_n}. \end{aligned}$$

Součin určený permutací p v definici $\det \mathbf{B}$ tak dostaneme ze součinu určeného stejnou permutací p v definici $\det \mathbf{A}$ vynásobením skalárem c. Protože to platí pro každou permutaci $p \in S_n$, dostáváme rovnost $\det \mathbf{B} = c \cdot \det \mathbf{A}$.

Konečně třetí elementární úpravou k i-tému řádku matice $\mathbf{A}$ přičítáme c-násobek j-tého řádku. Budeme opět předpokládat $i < j$, případ $i > j$ se dokáže zcela stejně. V tomto případě máme $b_{ik} = a_{ik} + ca_{jk}$ pro každé $k = 1, 2, \ldots, n$. Dále $b_{lk} = a_{lk}$ pro každé $l \neq i$ a $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Permutace $p \in S_n$ určuje v definici $\det \mathbf{B}$ součin

$$\begin{aligned} & b_{1p_1} \cdots b_{ip_i} \cdots b_{jp_j} \cdots b_{np_n} = a_{1p_1} \cdots (a_{ip_i} + ca_{jp_i}) \cdots a_{jp_j} \cdots a_{np_n} = \\ = \ & a_{1p_1} \cdots a_{ip_i} \cdots a_{jp_j} \cdots a_{np_n} + a_{1p_1} \cdots (ca_{jp_i}) \cdots a_{jp_j} \cdots a_{np_n} = \\ = \ & a_{1p_1} \cdots a_{ip_i} \cdots a_{jp_j} \cdots a_{np_n} + c \cdot a_{1p_1} \cdots a_{jp_i} \cdots a_{jp_j} \cdots a_{np_n}. \end{aligned}$$

První sčítanec v závěrečném součtu se rovná součinu určenému permutací p v $\det \mathbf{A}$, zatímco druhý sčítanec se rovná c-násobku součinu určeného permutací p v determinantu matice, jejíž i-tý řádek se rovná j-tému řádku. Taková matice má determinant rovný 0 podle Tvrzení 9.11. Proto

$$\det \mathbf{B} = \sum_{p \in S_n} \operatorname{sgn} p \cdot b_{1p_1} \cdots b_{np_n} = \sum_{p \in S_n} \operatorname{sgn} p \cdot a_{1p_1} \cdots a_{np_n} = \det \mathbf{A}.$$

□

Všimněte si, že v případě, kdy charakteristika tělesa $\mathbf{T}$ je různá od 2, plyne Tvrzení 9.11 z první části Věty 9.12. Jsou-li v matici $\mathbf{A}$ dva řádky – i-tý a j-tý – stejné, pak prohozením těchto dvou řádků dostaneme matici $\mathbf{B} = \mathbf{A}$. Podle první části Věty 9.12 platí $\det \mathbf{A} = \det \mathbf{B} = -\det \mathbf{A}$, tj. $\det \mathbf{A} + \det \mathbf{A} = 0$. Protože má těleso $\mathbf{T}$ charakteristiku různou od 2, plyne odtud $\det \mathbf{A} = 0$. Pouze v případě, kdy má těleso $\mathbf{T}$ charakteristiku rovnou 2, z rovnosti $\det \mathbf{A} + \det \mathbf{A} = 0$ nevyplývá $\det \mathbf{A} = 0$. V takovém případě je nutné použít Tvrzení 9.11.

Důsledek 9.13 *Pro determinanty elementárních matic řádu n platí*

- $\det \mathbf{E}_{ij} = -1$,
- $\det \mathbf{E}_i(c) = c$,
- $\det \mathbf{E}_{ij}(d) = 1$.

Pro každou elementární matici $\mathbf{E}$ *a libovolnou matici* $\mathbf{A}$ *téhož řádu* n *platí*

$$\det \mathbf{EB} = \det \mathbf{E} \cdot \det \mathbf{B}.$$

Důkaz. Každou elementární matici dostaneme z jednotkové matice $\mathbf{I}$ odpovídající elementární řádkovou úpravou. Protože $\det \mathbf{I} = 1$ neboť jednotková matice je horní trojúhelníková, plynou dodnoty determinantů všech elementárních matic z Věty 9.12.

Odtud rovněž plyne druhá část důsledku za využití Věty 9.12. □

Věta 9.14 *Čtvercová matice* $\mathbf{A}$ *je regulární právě když* $\det \mathbf{A} \neq 0$.

Důkaz. Podle Důsledku 9.13 platí rovnost

$$\det(\mathbf{EB}) = \det \mathbf{E} \cdot \det \mathbf{B}$$

pro každou elementární matici $\mathbf{E}$ a čtvercovou matici $\mathbf{B}$ stejného řádu n. Matici $\mathbf{A}$ převedeme Gaussovou eliminací pomocí elementárních řádkových úprav do matice $\mathbf{D}$ v řádkově odstupňovaném tvaru. To znamená, že existují elementární matice $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \ldots, \mathbf{E}_k$, pro které platí $\mathbf{D} = \mathbf{E}_k \cdots \mathbf{E}_1 \mathbf{A}$. S využitím předchozí rovnosti dostáváme

$$\begin{aligned}
\det \mathbf{D} = \det(\mathbf{E}_k \cdots \mathbf{E}_1 \mathbf{A}) &= \det \mathbf{E}_k \cdot \det(\mathbf{E}_{k-1} \cdots \mathbf{E}_1 \mathbf{A}) = \\
&= \det \mathbf{E}_k \cdot \det \mathbf{E}_{k-1} \cdot \det(\mathbf{E}_{k-2} \cdots \mathbf{E}_1 \mathbf{A}) = \\
&\vdots \\
&= \det \mathbf{E}_k \cdot \det \mathbf{E}_{k-1} \cdots \det \mathbf{E}_1 \cdot \det \mathbf{A}.
\end{aligned}$$

Determinanty elementárních matic jsou nenulové podle Důsledku 9.13, platí proto

$$\det \mathbf{A} \neq 0 \quad \text{právě když} \quad \det \mathbf{D} \neq 0.$$

Podle Věty 3.9 je matice $\mathbf{A}$ regulární právě když $\mathbf{D}$ neobsahuje žádný nulový řádek, což je právě když $\det \mathbf{D} \neq 0$, neboť matice $\mathbf{D}$ je horní trojúhelníková matice, a to je podle právě dokázané ekvivalence právě když $\det \mathbf{A} \neq 0$. □

Pomocí předchozí věty snadno dokážeme následující důležitou *větu o součinu determinantů.*

Věta 9.15 *Pro každé dvě čtvercové matice* $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ *řádu* n *platí*

$$\det(\mathbf{AB}) = \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{B}$$

Důkaz. Je-li matice $\mathbf{A}$ singulární, platí $r(\mathbf{A}) < n$, a proto také podle Důsledku 6.20 $r(\mathbf{AB}) \leq r(\mathbf{A}) < n$, součin $\mathbf{AB}$ je proto také singulární matice. Z rovnosti $\det \mathbf{A} = 0$ tak plyne $\det(\mathbf{AB}) = 0$ a dokazovaná rovnost $\det(\mathbf{AB}) = \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{B}$ tak platí v případě, že $\mathbf{A}$ je singulární matice.

Pokud je $\mathbf{A}$ regulární matice, můžeme ji podle podle Tvrzení 3.12 vyjádřit jako součin elementárních matic $\mathbf{A} = \mathbf{E}_k \cdots \mathbf{E}_1$. Potom platí

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{AB}) &= \det(\mathbf{E}_k \cdots \mathbf{E}_1 \mathbf{B}) = \det \mathbf{E}_k \cdots \det \mathbf{E}_1 \cdot \det \mathbf{B} = \\ &= \det(\mathbf{E}_k \cdots \mathbf{E}_1) \cdot \det \mathbf{B} = \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{B}. \end{aligned}$$

□

Nyní se budeme věnovat základní metodě výpočtu determinantů – *rozvoji determinantu podle řádku* případně *podle sloupce*.

Definice 9.16 *Je-li* $\mathbf{A} = (a_{ij})$ *čtvercová matice řádu* n*, pak pro* $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ *označujeme* $\mathbf{M}_{ij}$ *čtvercovou matici řádu* $n-1$*, kterou dostaneme z* $\mathbf{A}$ *vynecháním* i*-tého řádku a* j*-tého sloupce. Nazýváme ji* minor *matice* $\mathbf{A}$ *odpovídající místu* (i, j)*. Číslo* $m_{ij} = (-1)^{i+j} \det \mathbf{M}_{ij}$ *nazýváme* kofaktor *matice* $\mathbf{A}$ *určený místem* (i, j)*. Matici* $\mathbf{M} = (m_{ij})$ *nazýváme* kofaktorová matice *určená maticí* $\mathbf{A}$ *a transponovanou matici* $\mathbf{M}^T$ *nazýváme* adjungovaná matice *k matici* $\mathbf{A}$*. Adjungovanou matici k matici* $\mathbf{A}$ *budeme označovat* adj $\mathbf{A}$.

Věta 9.17 *Pro každou čtvercovou matici* $\mathbf{A} = (a_{ij})$ *řádu* n *a každé* $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ *platí*

- $\det \mathbf{A} = a_{i1}m_{i1} + a_{i2}m_{i2} + \cdots + a_{in}m_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}m_{ik}$,
- $\det \mathbf{A} = a_{1j}m_{1j} + a_{2j}m_{2j} + \cdots + a_{nj}m_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}m_{kj}$.

Důkaz. Dokážeme první z obou tvrzení o rozvoji determinantu podle i-tého řádku. Druhé tvrzení o rozvoji determinantu podle j-tého sloupce pak vyplyne z rozvoje podle j-tého řádku a z Tvrzení 9.10.

Začneme tím, že se podíváme na všechny součiny v součtu definujícím $\det \mathbf{A}$, které obsahují činitele a_{nn}. Tyto součiny jsou určené permutacemi $p \in S_n$, pro které platí $p(n) = n$. Každý takový součin má tvar

$$\operatorname{sgn} p \cdot a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{n-1p_{n-1}} a_{nn}.$$

Součet všech těchto součinů se potom rovná

$$\sum_{p(n)=n} \operatorname{sgn} p \cdot a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{n-1p_{n-1}} a_{nn} = a_{nn} \cdot \sum_{p(n)=n} \operatorname{sgn} p \cdot a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{n-1p_{n-1}}.$$

Pokud každou permutaci $p \in S_n$, pro kterou platí $p(n) = n$, zúžíme na množinu $\{1, 2, \ldots, n-1\}$, dostaneme permutaci $q \in S_{n-1}$. Permutace q působí na množině, která má o jeden prvek méně, a sama má také o jeden cyklus méně, než permutace p. Proto $\operatorname{sgn} q = \operatorname{sgn} p$. Každou permutaci $q \in S_{n-1}$ můžeme naopak jednoznačně rozšířit do permutace $p \in S_n$ tak, že dodefinujeme $p(n) = n$. Každý člen $\operatorname{sgn} p \cdot a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{n-1p_{n-1}}$ v druhém součtu v poslední rovnosti se proto rovná $\operatorname{sgn} q \cdot a_{1q_1} a_{2q_2} \cdots a_{n-1q_{n-1}}$, kde q je zúžení permutace p na množinu $\{1, 2, \ldots, n-1\}$. Druhá suma v poslední rovnosti se proto rovná

$$\sum_{q \in S_{n-1}} \operatorname{sgn} q \cdot a_{1q_1} a_{2q_2} \cdots a_{n-1q_{n-1}} = \det \mathbf{M}_{nn},$$

součet všech součinů v $\det \mathbf{A}$ obsahujících prvek a_{nn} se tak rovná součinu $a_{nn} \cdot \det \mathbf{M}_{nn}$.

Nyní se podíváme, jak vypadají všechny součiny v $\det \mathbf{A}$ obsahující prvek a_{ij}. K tomu účelu postupně zaměníme i-tý řádek matice $\mathbf{A}$ s $(i+1)$-ním řádkem, potom s $(i+2)$-hým řádkem, atd. až s n-tým řádkem. Dostaneme tak matici, jejíž n-tý řádek se rovná i-tému řádku matice $\mathbf{A}$ a pořadí ostatních řádků se nezměnilo. Speciálně, prvek na místě (n, j) nové matice se rovná a_{ij}.

Dále pokračujeme tak, že postupně prohazujeme j-tý sloupec s $(j+1)$-ním sloupcem, pak s $(j+2)$-hým sloupcem, a tak dále až nakonec s n-tým sloupcem. Dostaneme tak nakonec matici $\mathbf{B} = (b_{ij})$, pro kterou platí $b_{nn} = a_{ij}$, a dále minor $\mathbf{N}_{nn}$ matice $\mathbf{B}$ odpovídající místu (n, n) se rovná minoru $\mathbf{M}_{ij}$ matice $\mathbf{A}$ odpovídajícímu místu (i, j). Součet všech součinů v $\det \mathbf{B}$ obsahujících prvek b_{nn} se podle předchozích dvou odstavců proto rovná $b_{nn} \cdot \det \mathbf{N}_{nn} = a_{ij} \cdot \det \mathbf{M}_{ij}$.

Matici $\mathbf{B}$ jsme dostali z matice $\mathbf{A}$ pomocí $n - i + 1$ elementárních řádkových úprav prvního druhu a dále pomocí $n - j + 1$ elementárních sloupcových úprav prvního druhu. Každá z těchto úprav mění znaménko $\det \mathbf{A}$ podle Věty 9.12 a Tvrzení 9.10, platí proto

$$\det \mathbf{B} = (-1)^{2n-i-j-2} \det \mathbf{A} = (-1)^{i+j} \det \mathbf{A}.$$

Protože $\det \mathbf{A} = (-1)^{i+j} \det \mathbf{B}$, součet všech součinů v $\det \mathbf{A}$ obsahujících prvek a_{ij} se proto rovná součtu všech součinů v $\det \mathbf{B}$ obsahujících prvek $b_{nn} = a_{ij}$ s koeficientem $(-1)^{i+j}$. Podle předchozího odstavce se tak součet všech součinů v $\det \mathbf{A}$ obsahujících a_{ij} rovná

$$(-1)^{i+j} b_{nn} \cdot \det \mathbf{N}_{nn} = a_{ij} \cdot (-1)^{i+j} \det \mathbf{M}_{ij} = a_{ij} m_{ij},$$

kde m_{ij} je podle Definice 9.10 kofaktor matice $\mathbf{A}$ určený místem (i,j).

Protože v každém součinu v součtu definujícím $\det \mathbf{A}$ se vyskytuje právě jeden prvek z i-tého řádku matice $\mathbf{A}$, platí

$$\det \mathbf{A} = a_{i1}m_{i1} + a_{i2}m_{i2} + \cdots + a_{in}m_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}m_{ik} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} \det \mathbf{M}_{ik}.$$

□

Úloha 9.3 *Spočítejte determinant Vandermondovy matice a rozhodněte, kdy je Vandermondova matice regulární.*

Řešení. Označíme

$$V_{t_0,t_1,\ldots,t_n} = \begin{vmatrix} 1 & t_0 & t_0^2 & \cdots & t_0^n \\ 1 & t_1 & t_1^2 & \cdots & t_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & t_n & t_n^2 & \cdots & t_n^n \end{vmatrix}$$

determinant Vandermondovy matice řádu n určené prvky $t_0, t_1, \ldots, t_n \in \mathbf{T}$. Pokud se dva z prvků $t_0, t_1, \ldots, t_n$ rovnají, má Vandermondova matice dva stejné řádky a její determinant se proto rovná 0 podle Tvrzení 9.11. Budeme proto nadále předpokládat, že všechny prvky $t_0, t_1, \ldots, t_n$ jsou navzájem různé.

Napřed odečteme první řádek od všech ostatních. Determinant se podle Věty 9.12 nezmění, dostaneme tak

$$V_{t_0,t_1,\ldots,t_n} = \begin{vmatrix} 1 & t_0 & t_0^2 & \cdots & t_0^n \\ 0 & t_1 - t_0 & t_1^2 - t_0^2 & \cdots & t_1^n - t_0^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & t_n - t_0 & t_n^2 - t_0^2 & \cdots & t_n^n - t_0^n \end{vmatrix}.$$

Nyní determinant rozvineme podle prvního sloupce a dostaneme vyjádření

$$V_{t_0,t_1,\ldots,t_n} = \begin{vmatrix} t_1 - t_0 & t_1^2 - t_0^2 & \cdots & t_1^n - t_0^n \\ t_2 - t_0 & t_2^2 - t_0^2 & \cdots & t_2^n - t_0^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_n - t_0 & t_n^2 - t_0^2 & \cdots & t_n^n - t_0^n \end{vmatrix}.$$

Dále použijeme známý algebraický rozklad

$$t_i^j - t_0^j = (t_i - t_0)(t_i^{j-1} + t_i^{j-2}t_0 + \cdots t_i t_0^{j-2} + t_0^{j-1}) = (t_i - t_0)c_{ij},$$

kde jsme pro jednoduchost označili

$$c_{ij} = t_i^{j-1} + t_i^{j-2}t_0 + \cdots t_i t_0^{j-2} + t_0^{j-1} = \sum_{k=0}^{j-1} t_i^k t_0^{j-1-k}.$$

Speciálně platí $c_{i1} = 1$ pro libovolné $i = 1, \ldots, n$. S použitím tohoto označení dostáváme

$$V_{t_0,t_1,\ldots,t_n} = \begin{vmatrix} (t_1 - t_0)c_{11} & (t_1 - t_0)c_{12} & \cdots & (t_1 - t_0)c_{1n} \\ (t_2 - t_0)c_{21} & (t_2 - t_0)c_{22} & \cdots & (t_2 - t_0)c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (t_n - t_0)c_{n1} & (t_n - t_0)c_{n2} & \cdots & (t_n - t_0)c_{nn} \end{vmatrix}.$$

Z i-tého řádku můžeme vytknout $t_i - t_0$ pro každé $i = 1, \ldots, n$ a dosadit $c_{i1} = 1$, proto

$$V_{t_0,t_1,\ldots,t_n} = \prod_{i=1}^{n}(t_i - t_0) \begin{vmatrix} 1 & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ 1 & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix}.$$

Nyní $c_{i2} = t_i + t_0$ pro každé $i = 1, \ldots, n$. Pokud tedy odečteme od druhého sloupce t_0-násobek prvního sloupce, dostaneme

$$V_{t_0,t_1,\ldots,t_n} = \prod_{i=1}^{n}(t_i - t_0) \begin{vmatrix} 1 & t_1 & c_{13} & \cdots & c_{1n} \\ 1 & t_2 & c_{23} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & t_n & c_{n3} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix}.$$

Podobně $c_{i3} = t_i^2 - t_i t_0 + t_0^2$ pro každé $i = 1, \ldots, n$. Odečteme tedy od třetího sloupce t_0^2-násobek prvního sloupce a t_0-násobek druhého sloupce. Potom

$$V_{t_0,t_1,\ldots,t_n} = \prod_{i=1}^{n}(t_i - t_0) \begin{vmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & c_{14} & \cdots & c_{1n} \\ 1 & t_2 & t_2^2 & c_{24} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 1 & t_n & t_n^2 & c_{n4} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix}.$$

Postupně tak dostaneme

$$V_{t_0,t_1,\ldots,t_n} = \prod_{i=1}^{n}(t_i - t_0)\cdot V_{t_1,\ldots,t_n}$$

Poslední výraz je rekurentní formule, pomocí které již vypočítáme hodnotu $V_{t_0,t_1,\ldots,t_n}$ Vandermonodova determinantu řádu $n+1$. Začneme hodnotami pro malá n.

$$V_{t_0} = 1, \qquad V_{t_0,t_1} = t_1 - t_0, \qquad V_{t_0,t_1,t_2} = (t_2-t_0)(t_2-t_1)(t_1-t_0).$$

Pokud induktivně předpokládáme, že

$$V_{t_0,t_1,\ldots,t_{n-1}} = \prod_{\substack{i>j\\ i,j=0,\ldots,n-1}} (t_i - t_j),$$

potom pomocí již dokázané rekurentní formule dostaneme

$$\begin{aligned} V_{t_0,t_1,\ldots,t_n} &= \left(\prod_{i=1}^{n}(t_i-t_0)\right) V_{t_1,\ldots,t_n} = \prod_{i=1}^{n}(t_i-t_0) \prod_{\substack{i>j\\ i,j=1,\ldots,n}} (t_i-t_j) = \\ &= \prod_{\substack{i>j\\ i,j=0,\ldots,n}} (t_i-t_j). \end{aligned}$$

Tím je hodnota Vandermondova determinantu dokázána pomocí matematické indukce. Všimněte si, že rovnost

$$V_{t_0,t_1,\ldots,t_n} = \prod_{\substack{i>j\\ i,j=0,\ldots,n}} (t_i - t_j)$$

platí i v případě, kdy se dva z prvků $t_0, t_1, \ldots, t_n \in \mathbf{T}$ rovnají. Vandermondova matice je tak regulární právě když jsou prvky $t_0, t_1, \ldots, t_n \in \mathbf{T}$ navzájem různé. $\square$

Tvrzení 9.18 *Je-li* $\mathbf{A}$ *regulární matice, pak*

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \cdot \operatorname{adj} \mathbf{A}.$$

Důkaz. Adjungovaná matice $\operatorname{adj} A = (n_{ij})$, kde $n_{ij} = m_{ji}$, minor matice $\mathbf{A}$ určený místem (j,i). V součinu $\mathbf{A}\cdot\operatorname{adj}\mathbf{A}$ se prvek na místě (i,i) na hlavní diagonále rovná součtu

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}n_{ki} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}m_{ik} = \det \mathbf{A}$$

podle Věty 9.17. Prvek na místě (i, j) mimo hlavní diagonálu v součinu $\mathbf{A} \cdot \operatorname{adj} \mathbf{A}$, tj. pro $i \neq j$, se rovná

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} n_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} m_{jk}.$$

Poslední součet se rovná rozvoji determinantu podle i-tého řádku v matici, kterou dostaneme z matice $\mathbf{A}$ nahrazením j-tého řádku $\mathbf{A}_{j*}$ řádkem $\mathbf{A}_{i*}$. Minory m_{jk} pro $k = 1, \ldots, n$ se tak nezmění a nová matice má dva stejné řádky. Její determinant se proto rovná 0 podle Tvrzení 9.11. Proto platí rovněž

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} m_{jk} = 0.$$

Součin $\mathbf{A} \cdot \operatorname{adj} \mathbf{A}$ má proto nenulové prvky pouze na hlavní diagonále, a ty se všechny rovnají $\det \mathbf{A}$. Platí tak $\mathbf{A} \cdot \operatorname{adj} \mathbf{A} = \det \mathbf{A} \cdot \mathbf{I}_n$, neboli

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \cdot \operatorname{adj} \mathbf{A}.$$

□

A nakonec vzoreček pro řešení soustavy lineárních rovnic s regulární maticí. Tomuto vzorečku se říká *Cramerovo pravidlo.*

Tvrzení 9.19 *Je-li $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ soustava n lineárních rovnic o n neznámých s regulární maticí $\mathbf{A}$, pak pro $j = 1, 2, \ldots, n$ platí*

$$x_j = \frac{\det \mathbf{A}_j}{\det \mathbf{A}},$$

kde $\mathbf{A}_i = [\mathbf{A}_{*1}|\cdots|\mathbf{A}_{*j-1}|\mathbf{b}|\mathbf{A}_{*j+1}|\cdots|\mathbf{A}_{*n}]$ je matice, kterou dostaneme z matice $\mathbf{A}$ nahrazením i-tého sloupce sloupcem pravých stran $\mathbf{b}$.

Důkaz. Soustava má jediné řešení $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$. Dosadíme za inverzní matici $\mathbf{A}^{-1}$ její vyjádření podle předchozí Věty 9.18

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \cdot \operatorname{adj} \mathbf{A}.$$

Dostaneme tak rovnost

$$\mathbf{x} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \cdot \operatorname{adj} \mathbf{A} \cdot \mathbf{b}.$$

Pro j-tou souřadnici řešení $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$ pak platí

$$x_j = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \cdot [\operatorname{adj} \mathbf{A}]_{j*}\mathbf{b} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \cdot \sum_{k=1}^{n} m_{kj} b_k,$$

kde b_k je k-tá souřadnice vektoru $\mathbf{b}$ pravých stran. Součet

$$\sum_{k=1}^{n} b_k m_{kj}$$

je rozvojem podle j-tého sloupce determinantu matice $\mathbf{A}_j$, kterou dostaneme z matice $\mathbf{A}$ nahrazením sloupce $\mathbf{A}_{*j}$ vektorem pravých stran $\mathbf{b}$. $\square$