Kapitola 3

Počítání s maticemi

Matice stejného typu můžeme sčítat a násobit reálným číslem podobně jako vektory téže dimenze.

Definice 3.1 *Jsou-li* $\mathbf{A} = (a_{ij})$ *a* $\mathbf{B} = (b_{ij})$ *dvě matice stejného typu* $m \times n$, *pak definujeme jejich* součet *jako matici* $\mathbf{A} + \mathbf{B} = (c_{ij})$, *kde* $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ *pro libovolné indexy* $i = 1, 2, \ldots, m$ *a* $j = 1, 2, \ldots, n$.

Součin matice $\mathbf{A}$ *a čísla* α *definujeme jako matici* $\alpha\mathbf{A} = (d_{ij})$ *typu* $m \times n$, *kde* $d_{ij} = \alpha a_{ij}$ *pro libovolné indexy* i, j.

Zavedeme si také označení $\mathbf{0}_{m\times n}$ pro *nulovou matici* typu $m \times n$. Ta má všechny prvky rovné 0. Je-li typ nulové matice zřejmý ze souvislostí, budeme ji značit pouze $\mathbf{0}$. Pro libovolnou matici $\mathbf{A} = (a_{ij})$ typu $m \times n$ označujeme symbolem $-\mathbf{A} = (-1)\mathbf{A} = (-a_{ij})$ *opačnou matici* k matici $\mathbf{A}$.

Cvičení 3.1 *Matice* $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ *jsou stejného typu* $m \times n$, α, β *jsou čísla. Dokažte následující vlastnosti sčítání matic a násobení matic číslem.*

1. $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$,
2. $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$,
3. $\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{A}$,
4. $\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = \mathbf{0}$,
5. $(\alpha\beta)\mathbf{A} = \alpha(\beta\mathbf{A})$,
6. $\alpha(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \alpha\mathbf{A} + \alpha\mathbf{B}$,
7. $(\alpha + \beta)\mathbf{A} = \alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{A}$,

8. $1\mathbf{A} = \mathbf{A}$.

Následující definice je zobecněním vztahu mezi sloupcovým a řádkovým zápisem vektorů.

Definice 3.2 Transponovaná matice *k matici* $\mathbf{A}$ *typu* $m \times n$ *je matice* $\mathbf{A}^T = (b_{ij})$ *typu* $n \times m$, *kde* $b_{ij} = a_{ji}$ *pro libovolné indexy* $i = 1, 2, \ldots, m$ *a* $j = 1, 2, \ldots, n$.

Například

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 8 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \\ 4 & 8 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Cvičení 3.2 *Dokažte, že pro libovolné matice* $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ *stejného typu platí*

- $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$,
- $(\alpha\mathbf{A})^T = \alpha\mathbf{A}^T$,
- $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$.

Dále zavedeme názvy pro několik speciálních typů matic. Je-li $\mathbf{A} = (a_{ij})$ čtvercová matice řádu n, pak říkáme, že prvky a_{ii} pro $i = 1, 2, \ldots, n$ leží na *hlavní diagonále* matice $\mathbf{A}$. Ostatní prvky a_{ij}, kde $i \neq j$, leží mimo hlavní diagonálu.

Definice 3.3 *Symbolem* $\mathbf{I}_n$ *budeme označovat čtvercovou matici* (a_{ij}) *řádu* n, *která má na hlavní diagonále samé prvky* 1 *a mimo hlavní diagonálu samé prvky* 0*:*

$$\mathbf{I}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Tuto matici budeme nazývat jednotková matice *řádu* n.

Čtvercová matice $\mathbf{B} = (b_{ij})$ *se nazývá* symetrická *matice, jestliže platí* $b_{ij} = b_{ji}$ *pro libovolné indexy* i, j, *tj. jestliže platí* $\mathbf{B}^T = \mathbf{B}$.

Čtvercová matice $\mathbf{B} = (b_{ij})$ *se nazývá* kososymetrická *matice, jestliže platí* $b_{ij} = -b_{ji}$ *pro libovolné indexy* i, j, *tj. platí-li* $\mathbf{B}^T = -\mathbf{B}$.

Základní definicí této kapitoly je definice součinu matic.

Definice 3.4 *Je-li* $\mathbf{A} = (a_{ij})$ *matice typu* $m \times n$ *a* $\mathbf{B} = (b_{jk})$ *matice typu* $n \times p$, *pak definujeme* součin *matic* $\mathbf{AB} = (c_{ik})$ *jako matici typu* $m \times p$, *kde*

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}.$$

Podle této definice můžeme násobit pouze takové dvojice matic, u kterých se počet sloupců první matice rovná počtu řádků druhé matice. Stejně jako v případě součtu matic tak ani součin matic není definován pro libovolné dvě matice.

Prvek na místě (i, k) součinu $\mathbf{AB}$ se rovná standardnímu *skalárnímu součinu* i-tého řádku matice $\mathbf{A}$ s j-tým sloupcem matice $\mathbf{B}$. Neformální vyjádření pro způsob výpočtu součinu matic říká, že matice násobíme způsobem "řádek×sloupec".

Cvičení 3.3 *Spočítejte součin několika dvojic matic. Spočítejte oba součiny* $\mathbf{AB}$ *a* $\mathbf{BA}$ *pro nějaké dvě čtvercové matice stejného řádu. Je násobení matic komutativní, tj. platí* $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ *pro libovolné dvě matice* $\mathbf{A}$ *typu* $m \times n$ *a* $\mathbf{B}$ *typu* $n \times m$*? Platí to pro libovolné dvě čtvercové matice řádu* n*?*

Soustavu m lineárních rovnic o n neznámých

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2, \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m.
\end{aligned}$$

tak nyní můžeme vyjádřit pomocí součinu matic ve tvaru

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b},$$

kde $\mathbf{A} = (a_{ij})$ je matice soustavy, $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_m)^T$ je sloupcový vektor pravých stran a $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$ je sloupcový vektor neznámých.

Cvičení 3.4 *Je-li* $\mathbf{A}$ *matice typu* $m \times n$, *pak platí*

$$\mathbf{I}_m\mathbf{A} = \mathbf{A} = \mathbf{AI}_n.$$

Dokažte.

Jakkoliv vypadá definice součinu matic na první pohled uměle, ve skutečnosti je přirozená a lze ji odůvodnit, skládáme-li zobrazení ve dvoudimenzionálním aritmetickém reálném vektorovém prostoru.

Úloha 3.1 *Označme symbolem f zobrazení, které je na prostoru $\mathbf{R}^2$ definované předpisem*

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix},$$

kde a, b, c, d jsou reálná čísla. Podobně označíme $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ zobrazení definované předpisem

$$g\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ax+By \\ Cx+Dy \end{pmatrix},$$

kde A, B, C, D jsou také reálná čísla. Popište, jak vypadá složené zobrazení $g \circ f$.

Řešení. Všimněte si, že předpis pro zobrazení f můžeme pomocí násobení matic vyjádřit následovně:

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Lze říct, že

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

je *matice zobrazení f*. Podobně rovnost

$$g\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

ukazuje, že matici

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

můžeme považovat za matici zobrazení g.

Pokusíme se najít podobné maticové vyjádření pro složené zobrazení $g \circ f$. Platí

$$(g \circ f)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = gf\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = g\begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix} =$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} A(ax+by)+B(cx+dy) \\ C(ax+by)+D(cx+dy) \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} (Aa+Bc)x+(Ab+Bd)y \\ (Ca+Dc)x+(Ay+Bd)y \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} Aa+Bc & Ab+Bd \\ Ca+Dc & Cb+Dd \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \\
&= \left(\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Výpočet ukazuje, že matice složeného zobrazení $g \circ f$ se rovná součinu $\mathbf{BA}$ matic zobrazení g a f (v tomto pořadí). $\Box$

Následující cvičení udává, kolik aritmetických operací je třeba provést pro výpočet součinu matic.

Cvičení 3.5 *Jsou-li* $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ *dvě čtvercové matice řádu* n*, pak pro výpočet součinu* $\mathbf{AB}$ *potřebujeme nejvýše*

$$
\begin{array}{cl}
n^3 & \text{násobení/dělení, a} \\
n^3 - n^2 & \text{sčítání/odčítání.}
\end{array}
$$

Násobení a sčítání matic mají některé vlastnosti společné s násobením a sčítáním čísel.

Tvrzení 3.5 *Jsou-li* $\mathbf{A} = (a_{ij})$, $\mathbf{B} = (b_{kl})$ *a* $\mathbf{C} = (c_{uv})$ *matice, pak platí*

- $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$,
- $(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}$,
- $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$

za předpokladu, že všechny součty a součiny matic v příslušné rovnosti jsou definovány.

Důkaz. Označíme-li m počet řádků a n počet sloupců matice $\mathbf{A}$, pak obě matice $\mathbf{B}, \mathbf{C}$ musí mít n řádků, protože součiny $\mathbf{AB}$ a $\mathbf{AC}$ jsou definovány. Označíme-li p počet sloupců matice $\mathbf{B}$, pak matice $\mathbf{C}$ musí mít také p sloupců, protože součet $\mathbf{B} + \mathbf{C}$ je definovaný. Obě matice $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C})$ a $\mathbf{AB} + \mathbf{AC}$ jsou proto typu $m \times p$. Ukážeme, že pro každé $i = 1, 2, \dots m$ a každé $k = 1, 2, \dots, p$ jsou čísla na stejném místě (i, k) v obou maticích $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C})$ a $\mathbf{AB} + \mathbf{AC}$ stejná.

Pro každé $j = 1, 2, \ldots, n$ se číslo na místě (j, k) v součtu $\mathbf{B} + \mathbf{C}$ rovná $b_{jk} + c_{jk}$. Prvek na místě (i, k) v součinu $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C})$ se proto rovná

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(b_{jk} + c_{jk}) = \sum_{j=1}^{n}(a_{ij}b_{jk} + a_{ij}c_{jk}).$$

Prvek na místě (i, k) v součinu $\mathbf{AB}$ se rovná

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}$$

a prvek na místě (i, k) v součinu $\mathbf{AC}$ se rovná

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_{jk}.$$

Proto je prvek na místě (i, k) v součtu $\mathbf{AB} + \mathbf{AC}$ rovný

$$\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}b_{jk} + a_{ij}c_{jk}).$$

Prvky na stejných místech v maticích $\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C})$ a $\mathbf{AB}+\mathbf{AC}$ jsou shodné, což dokazuje první rovnost.

Všimněte si, že právě dokázaná distributivita násobení matic vzhledem k jejich sčítání je bezprostředním důsledkem distributivity násobení reálných čísel vzhledem k jejich sčítání.

Pokud jste si udělali celé Cvičení 3.3 tak víte, že násobení matic není komutativní. Druhá rovnost v Tvrzení 3.5 tak není důsledkem právě dokázané rovnosti a je nutné ji dokázat zvlášť. Dokažte si ji sami jako další cvičení.

V případě asociativity násobení matic označme m počet řádků matice $\mathbf{A}$ a n počet sloupců $\mathbf{A}$. Matice $\mathbf{A}$ je tedy typu $m \times n$. Protože součin $\mathbf{AB}$ matic $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ je definovaný, musí být počet řádků matice $\mathbf{B}$ rovný n. Je-li počet sloupců matice $\mathbf{B}$ rovný p, tj. je-li matice $\mathbf{B}$ typu $n \times p$, pak z existence součinu $\mathbf{BC}$ plyne, že počet řádků matice $\mathbf{C}$ se také rovná p. Matice $\mathbf{C}$ je tedy typu $p \times q$, kde q označuje počet sloupců $\mathbf{C}$.

Součin $\mathbf{AB}$ má potom typ $m \times p$, jeho prvky si označíme

$$d_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}.$$

Prvek na místě (i,l) v součinu $(\mathbf{AB})\mathbf{C}$ se tak rovná

$$\sum_{k=1}^{p} d_{ik}c_{kl} = \sum_{k=1}^{p}(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk})c_{kl} = \sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}b_{jk})c_{kl} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} a_{ij}b_{jk}c_{kl}.$$

Poslední rovnost vyplývá z komutativity sčítání a asociativity násobení reálných čísel.

Matice $\mathbf{BC} = (e_{jl})$ je typu $n \times q$. Prvek e_{jl} má podle definice násobení matic vyjádření

$$e_{jl} = \sum_{k=1}^{p} b_{jk}c_{kl}.$$

Prvek na místě (i,l) v součinu $\mathbf{A}(\mathbf{BC})$ se tak rovná

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}e_{jl} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\sum_{k=1}^{p} b_{jk}c_{kl} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} a_{ij}(b_{jk}c_{kl}) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} a_{ij}b_{jk}c_{kl}.$$

Tím je důkaz asociativity násobení dokončen. □

Další dvě cvičení se týkají transponovaných matic.

Cvičení 3.6 *Matice* $\mathbf{A}$ *má typ* $m \times n$ *a matice* $\mathbf{B}$ *má typ* $n \times p$. *Dokažte, že platí*

- $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$.

Změna pořadí matic v součinu $\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$ je nutná kvůli tomu, aby je vůbec bylo možné násobit.

Cvičení 3.7 *Dokažte, že pro každou matici* $\mathbf{A}$ *jsou součiny* $\mathbf{AA}^T$ *a* $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ *symetrické matice. Musíte počítat jednotlivé prvky v těchto maticích?*

Dříve, než se začneme zabývat strukturou součinu matic, uvedeme ještě jednu definici.

Definice 3.6 *Jsou-li* $\mathbf{a}$ *a* $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_k$ *vektory stejné dimenze* n, *pak říkáme, že vektor* $\mathbf{a}$ *je* lineární kombinací *vektorů* $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_k$, *jestliže*

$$\mathbf{a} = t_1\mathbf{b}_1 + t_2\mathbf{b}_2 + \cdots + t_k\mathbf{b}_k$$

pro nějaká čísla $t_1, t_2, \dots, t_k$. *Těmto číslům říkáme* koeficienty lineární kombinace. *Skutečnost, že vektor* $\mathbf{a}$ *je lineární kombinací vektorů* $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_k$, *vyjadřujeme také slovy, že vektor* $\mathbf{a}$ *je* lineárně závislý *na vektorech* $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_k$.

Vyřešit soustavu lineárních rovnic $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ znamená najít (všechna) vyjádření sloupce pravých stran jako lineární kombinace sloupců matice $\mathbf{A}$.

Tvrzení 3.7 *Jsou-li* $\mathbf{A} = (a_{ij})$ *matice typu* $m \times n$ *a* $\mathbf{B} = (b_{jk})$ *matice typu* $n \times p$*, pak platí*

- $[\mathbf{AB}]_{i*} = \mathbf{A}_{i*}\mathbf{B} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\mathbf{B}_{j*}$ *pro libovolné* $i = 1, 2, \ldots, m$*,*
- $[\mathbf{AB}]_{*k} = \mathbf{AB}_{*k} = \sum_{j=1}^{n} b_{jk}\mathbf{A}_{*j}$ *pro libovolné* $k = 1, 2, \ldots, p$*.*

První rovnost pro i-tý řádek součinu $\mathbf{AB}$ říká, že se rovná součinu i-tého řádku matice $\mathbf{A}$ s maticí $\mathbf{B}$. Druhá rovnost pak říká, že je lineární kombinací řádků matice $\mathbf{B}$ s koeficienty v i-tém řádku matice $\mathbf{A}$. Podobně k-tý sloupec v součinu $\mathbf{AB}$ se rovná součinu matice $\mathbf{A}$ s k-tým sloupcem matice $\mathbf{B}$. Rovná se také lineární kombinaci sloupců matice $\mathbf{A}$ s koeficienty v k-tém sloupci matice $\mathbf{B}$.

Důkaz. Dokážeme pouze vyjádření sloupců v součinu. Důkaz pro řádky je analogický.

Prvek na místě (i, k) v součinu $\mathbf{AB}$, tj. i-tá souřadnice sloupcového vektoru $[\mathbf{AB}]_{*k}$, se rovná

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}.$$

Podobně i-tá souřadnice sloupcového vektoru $\mathbf{AB}_{*k}$ se rovná

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}.$$

Nakonec i-tá souřadnice lineární kombinace $b_{1k}\mathbf{A}_{*1} + b_{2k}\mathbf{A}_{*2} + \cdots + b_{nk}\mathbf{A}_{*n}$ se rovná

$$\sum_{j=1}^{n} b_{jk} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}.$$

Všechna tři čísla jsou stejná, proto se tři uvedená vyjádření pro k-tý sloupec součinu $\mathbf{AB}$ rovnají. □

Inverzní matice

Definice 3.8 *Jsou-li* $\mathbf{A}$ *a* $\mathbf{B}$ *dvě čtvercové matice stejného řádu* n*, pak říkáme, že* $\mathbf{B}$ *je* inverzní matice *k matici* $\mathbf{A}$*, jestliže platí*

$$\mathbf{AB} = \mathbf{I}_n.$$

Pokud existuje inverzní matice k matici $\mathbf{A}$*, označujeme ji* $\mathbf{A}^{-1}$*. Čtvercová matice* $\mathbf{A}$ *se nazývá* regulární*, jestliže existuje inverzní matice* $\mathbf{A}^{-1}$*. V opačném případě se nazývá* singulární*.*

Inverzní matice tedy může existovat pouze ke čtvercové matici. Jak zjistíme, jestli k dané čtvercové matici $\mathbf{A} = (a_{ij})$ existuje inverzní matice $\mathbf{A}^{-1}$? A pokud existuje, jak ji spočítáme? Těmito otázkami se budeme nyní zabývat.

Označíme symbolem $\mathbf{e}_k$ k-tý sloupec jednotkové matice $\mathbf{I}_n$ řádu n. Vektor $\mathbf{e}_k$ má všechny souřadnice rovné 0 s výjimkou k-té souřadnice, která se rovná 1.

Pokud inverzní matice $\mathbf{A}^{-1} = (b_{jk})$ k matici $\mathbf{A}$ existuje, musí její k-tý sloupec $\mathbf{A}^{-1}_{*k} = (b_{1k}, b_{2k}, \ldots, b_{nk})^T$ podle Tvrzení 3.7 splňovat rovnosti

$$\mathbf{e}_k = [\mathbf{I}_n]_{*k} = [\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}]_{*k} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}_{*k} = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{A}_{*j} b_{jk}.$$

To znamená, že k-tý sloupec $\mathbf{A}^{-1}_{*k}$ inverzní matice $\mathbf{A}^{-1}$ je řešením soustavy n lineárních rovnic o n neznámých $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{e}_k$. Abychom vypočítal celou inverzní matici $\mathbf{A}^{-1}$i, musíme vyřešit n soustav lineárních rovnic

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{e}_k \quad \text{pro} \quad k = 1, \ldots, n.$$

Protože mají soustavy stejnou matici $\mathbf{A}$, můžeme je řešit všechny současně pomocí elementárních řádkových úprav matice

$$[\mathbf{A}|\mathbf{I}_n] = [\mathbf{A}|\mathbf{e}_1|\mathbf{e}_2|\cdots|\mathbf{e}_n]$$

typu $n \times (2n)$.

Tuto matici převedeme pomocí elementárních řádkových úprav do řádkově odstupňovaného typu $[\mathbf{E}|\mathbf{B}]$. Matici $\mathbf{E}$ jsme tedy dostali pomocí elementárních řádkových úprav z matice $\mathbf{A}$ a podobně jsme dostali matici $\mathbf{B}$ pomocí elementárních řádkových úprav z jednotkové matice $\mathbf{I}_n$. Protože jsou všechny elementární řádkové úpravy vratné, dostaneme také jednotkovou matici $\mathbf{I}_n$ zpět z matice $\mathbf{B}$ pomocí elementárních řádkových úprav. Matice $\mathbf{I}_n$ je v řádkově odstupňovaném typu (dokonce v redukovaném řádkově odstupňovaném typu) a neobsahuje žádný nulový řádek. Matice $\mathbf{B}$ má proto hodnost $\operatorname{rank}(\mathbf{B}) = n$. Speciálně proto matice $\mathbf{B}$ neobsahuje žádný nulový řádek.

Matice $\mathbf{B}$ tak obsahuje nějaký nenulový prvek c v posledním řádku. Nechť je v k-tém sloupci. Pomocí elementárních řádkových úprav dostaneme z matice $[\mathbf{A}|\mathbf{e}_k]$ — rozšířené matice soustavy $\mathbf{Ax} = \mathbf{e}_k$, jejímž řešením je k-tý sloupec inverzní matice $\mathbf{A}^{-1}$ — matici $[\mathbf{E}|\mathbf{c}]$, kde prvek v posledním řádku posledního sloupce $\mathbf{c}$ je $c \neq 0$. Pokud inverzní matice $\mathbf{A}^{-1}$ existuje, musí být soustava $\mathbf{Ax} = \mathbf{e}_k$ řešitelná. Matice $\mathbf{E}$ tak nemůže obsahovat žádný nulový řádek. Protože je v řádkově odstupňovaném typu a dostali jsme ji z $\mathbf{A}$ pomocí elementárních řádkových úprav, znamená to, že hodnost $\operatorname{rank}(\mathbf{A})$ matice $\mathbf{A}$ se rovná n.

Dokázali jsme tak, že pokud inverzní matice $\mathbf{A}^{-1}$ existuje, musí platit $\operatorname{rank}(\mathbf{A}) = n$. Naopak, pokud $\operatorname{rank}(\mathbf{A}) = n$, má každá soustava $\mathbf{Ax} = \mathbf{e}_k$ pro $k = 1, \ldots, n$ (jednoznačné) řešení podle Věty 2.7. Inverzní matice $\mathbf{A}^{-1}$ proto existuje. Tím jsme dokázali část následující věty.

Věta 3.9 *Předpokládáme, že $\mathbf{A}$ je čtvercová matice řádu n. Potom je ekvivalentní*

1. *inverzní matice $\mathbf{A}^{-1}$ existuje, tj. matice $\mathbf{A}$ je regulární,*
2. $\operatorname{rank}(\mathbf{A}) = n$,
3. *Gaussova-Jordanova eliminace převede matici $\mathbf{A}$ do matice $\mathbf{I}_n$,*
4. *homogenní soustava $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ má pouze triviální řešení $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.*

Důkaz. Ekvivalenci $1 \Leftrightarrow 2$ jsme dokázali už před Větou 3.9.

$2 \Rightarrow 3$. Je-li hodnost $r(\mathbf{A}) = n$, obsahuje každá matice $\mathbf{E}$ v řádkově odstupňovaném typu, kterou dostaneme z $\mathbf{A}$ pomocí elementárních řádkových úprav z matice $\mathbf{A}$, celkem n pivotů, všechny sloupce jsou tedy bázové. Protože má n řádků, jsou také všechny řádky nenulové. Použijeme-li Gaussovu-Jordanovu eliminaci, jsou všechny pivoty v $\mathbf{E}$ rovné 1 a ostatní prvky matice $\mathbf{E}$ se rovnají 0. Matice $\mathbf{E}$ se proto rovná jednotkové matici $\mathbf{I}_n$.

$3 \Rightarrow 4$. Pokud Gaussova-Jordanova eliminace převádí matici $\mathbf{A}$ do jednotkové matice $\mathbf{I}_n$, převádí matici $[\mathbf{A}|\mathbf{0}]$ — rozšířenou matici soustavy $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ — do matice $[\mathbf{I}_n|\mathbf{0}]$. Soustava $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ má proto pouze triviální řešení $x_i = 0$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$.

$4 \Rightarrow 2$. Má-li homogenní soustava $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ pouze triviální řešení, je $\operatorname{rank}(\mathbf{A}) = n$ podle Věty 2.5.

Tím je ekvivalence všech čtyř výroků dokázána. □

Z úvah před Větou 3.9 také přímo dostaneme algoritmus pro výpočet inverzní matice ke čtvercové matici $\mathbf{A}$ řádu n, pokud existuje, tj. pokud $\operatorname{rank}(\mathbf{A}) = n$.

- Gaussovou-Jordanovou eliminací převedeme matici $[\mathbf{A}|\mathbf{I}_n]$ do matice $[\mathbf{I}_n|\mathbf{B}]$. Potom $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{B}$.

V tom případě je totiž k-tý sloupec matice $\mathbf{B}$ řešením soustavy $\mathbf{Ax} = \mathbf{e}_k$ pro $k = 1, 2, \ldots, n$. Podle Tvrzení 3.7 tak platí

$$[\mathbf{AB}]_{*k} = \mathbf{AB}_{*k} = \mathbf{e}_k,$$

což znamená

$$\mathbf{AB} = \mathbf{I}_n.$$

Cvičení 3.8 *Spočítejte inverzní matice k několika regulárním maticím. Napište program pro výpočet inverzní matice.*

Spočítáme ještě, kolik operací vyžaduje výpočet inverzní matice algoritmem založeným na Gaussově-Jordanově eliminaci.

Tvrzení 3.10 *Pro výpočet inverzní matice* $\mathbf{A}^{-1}$ *k regulární matici* $\mathbf{A}$ *řádu* n *Gaussovou-Jordanovou eliminací použitou na matici* $[\mathbf{A}|\mathbf{I}_n]$ *je třeba nejvýše*

$$\begin{array}{rl} n^3 & \text{násobení/dělení, a} \\ n^3 - 2n^2 + n & \text{sčítání/odčítání.} \end{array}$$

Důkaz. Podobně jako v důkazu Tvrzení 2.10 spočítáme, že první průběh hlavního cyklu Gaussovy-Jordanovy eliminace vyžaduje

$$\begin{array}{rl} n + (n-1)n = n^2 & \text{násobení/dělení, a} \\ (n-1)(n-1) = n^2 - 2n + 1 & \text{sčítání/odčítání.} \end{array}$$

Nižší počet sčítání/odčítání vyplývá z toho, že všechny prvky v prvním sloupci matice $\mathbf{I}_n$ pod prvním řádkem se rovnají 0. Stejný počet operací je třeba při všech n průbězích hlavního cyklu Gaussovy-Jordanovy eliminace. Odtud ihned vyplývá celkový počet operací. □

Dokážeme si ještě následující užitečné tvrzení.

Tvrzení 3.11 *Jsou-li* $\mathbf{A}$ *a* $\mathbf{B}$ *dvě čtvercové matice stejného řádu* n*, pak platí*

$$\mathbf{AB} = \mathbf{I}_n \ \text{ právě když } \ \mathbf{BA} = \mathbf{I}_n.$$

Důkaz. Je-li $\mathbf{AB} = \mathbf{I}_n$, pak pro libovolný nenulový vektor $\mathbf{x}$ dimenze n platí

$$\mathbf{A}(\mathbf{Bx}) = (\mathbf{AB})\mathbf{x} = \mathbf{I}_n\mathbf{x} = \mathbf{x} \neq \mathbf{0}.$$

Musí proto platit $\mathbf{Bx} \neq \mathbf{0}$. Homogenní soustava $\mathbf{Bx} = \mathbf{0}$ tak má pouze triviální řešení. Podle Věty 2.5 platí $\operatorname{rank}(\mathbf{B}) = n$ a podle Věty 3.9 je matice $\mathbf{B}$ regulární. Rovnost $\mathbf{AB} = \mathbf{I}_n$ můžeme proto vynásobit zprava maticí $\mathbf{B}^{-1}$ inverzní k $\mathbf{B}$. Dostaneme

$$\mathbf{A} = \mathbf{AI}_n = \mathbf{A}(\mathbf{BB}^{-1}) = (\mathbf{AB})\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{I}_n\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{B}^{-1}.$$

Proto $\mathbf{BA} = \mathbf{BB}^{-1} = \mathbf{I}_n$.

Opačnou implikaci dokážeme naprosto stejně, pouze zaměníme matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$. □

Poslední tvrzení nám dovoluje "snadno" vyřešit soustavu $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, pokud je matice soustavy $\mathbf{A}$ regulární. Stačí soustavu vynásobit zleva inverzní maticí $\mathbf{A}^{-1}$. Dostaneme

$$\mathbf{x} = \mathbf{I}_n\mathbf{x} = (\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{Ax}) = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}.$$

Soustava má proto (jediné) řešení $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$.

Pohled na Tvrzení 3.10 a Tvrzení 2.8 ukazuje, proč je toto vyjádření řešení soustavy $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ výhodné pouze pro teoretické zkoumání, nikoliv pro praktický výpočet řešení této soustavy. Výpočet součinu $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$ vyžaduje

$$\begin{array}{rl} n^2 & \text{násobení/dělení, a} \\ n(n-1) & \text{sčítání/odčítání.} \end{array}$$

Celkem tak výpočet inverzní matice $\mathbf{A}^{-1}$ Gaussovou-Jordanovou metodou a součinu $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$ potřebuje

$$\begin{array}{rl} n^3 + n^2 & \text{násobení/dělení, a} \\ n^3 - n^2 & \text{sčítání/odčítání.} \end{array}$$

Tento výpočet tak vyžaduje zhruba trojnásobný počet operací a tedy trojnásobné množství času než přímý výpočet řešení pomocí Gaussovy eliminace a zpětné substituce.

Je také zajímavé všimnout si, že výpočet inverzní matice k regulární matici řádu n potřebuje zhruba stejně operací jako výpočet součinu dvou čtvercových matic řádu n. Na první pohled se zdá být výpočet inverzní matice mnohem náročnější.

Následující cvičení shrnuje základní vlastnosti inverzních matic. Snadno je dokážete za použití poznatků z této kapitoly.

Cvičení 3.9 *Dokažte, že pro regulární matice* $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ *stejného řádu* n *platí*

- $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$,
- *součin* $\mathbf{AB}$ *je také regulární matice,*
- $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$,
- $(\mathbf{A}^{-1})^T = (\mathbf{A}^T)^{-1}$.

Z druhého tvrzení ihned indukcí podle k snadno dokážete, že součin $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\cdots\mathbf{A}_k$ je regulární matice, jsou-li všechny matice $\mathbf{A}_i$ regulární a stejného řadu n. V tom případě

$$(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\cdots\mathbf{A}_k)^{-1} = \mathbf{A}_k^{-1}\cdots\mathbf{A}_2^{-1}\mathbf{A}_1^{-1}.$$

Čtvrté tvrzení pak znamená, že transponovaná matice k regulární matici je opět regulární, a že inverzní matici k $\mathbf{A}^T$ dostaneme jako transponovanou matici k $\mathbf{A}^{-1}$.

Dokážeme si ještě jednoznačnost inverzní matice k regulární matici.

Tvrzení 3.12 *Pokud inverzní matice k matici* $\mathbf{A}$ *existuje, pak je určena jednoznačně.*

Důkaz. Pokud inverzní matice k matici $\mathbf{A}$ existuje, musí být matice $\mathbf{A}$ čtvercová. Označme n její řád. Jsou-li čtvercové matice $\mathbf{B}$ a $\mathbf{C}$ řádu n inverzní k matici $\mathbf{A}$, platí $\mathbf{AB} = \mathbf{I}_n = \mathbf{AC}$ podle definice 3.8. Podle tvrzení 3.11 musí rovněž platit $\mathbf{BA} = \mathbf{I}_n = \mathbf{CA}$. Potom

$$\mathbf{B} = \mathbf{BI}_n = \mathbf{B}(\mathbf{AC}) = (\mathbf{BA})\mathbf{C} = \mathbf{I}_n\mathbf{C} = \mathbf{C}.$$

□

Následující obtížnější cvičení vám ukáže, jak dobře jste část o počítání s maticemi zvládli. První část říká, jak ze znalosti inverzní matice $\mathbf{A}^{-1}$ rychle spočítat inverzní matici k matici, kterou dostaneme z dané regulární matice $\mathbf{A}$ změnou jednoho prvku.

Cvičení 3.10 *Předpokládáme, že* $\mathbf{A} = (a_{ij})$ *je regulární matice řádu* n, e_i *pro* $i = 1, 2, \ldots, n$ *je* i*-tý sloupcový vektor jednotkové matice* $\mathbf{I}_n$ *a* $\alpha \in \mathbf{R}$. *Dokažte, že platí*

- *součin* $\alpha\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j^T$ *je čtvercová matice, která má všechny prvky nulové s výjimkou prvku na místě* (i, j)*, který se rovná číslu* α*,*

- *je-li* $\mathbf{B} = \mathbf{A} + \alpha \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j^T$*, tj.* $\mathbf{B}$ *se liší od* $\mathbf{A}$ *pouze v prvku na místě* (i, j)*, ke kterému jsme přičetli číslo* α*, a označíme-li dále* $\mathbf{A}^{-1} = (b_{ij})$*, pak*

$$\mathbf{B}^{-1} = (\mathbf{A} + \alpha \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j^T)^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \alpha \frac{[\mathbf{A}^{-1}]_{*i} [\mathbf{A}^{-1}]_{*j}}{1 + \alpha b_{ji}},$$

  pokud je číslo ve jmenovateli nenulové (jde o speciální případ tzv. Shermanovy-Morrisonovy formule),

- *jsou-li* $\mathbf{c}, \mathbf{d}$ *sloupcové vektory dimenze* n *takové, že číslo* $1 + \mathbf{d}^T \mathbf{c} \neq 0$*, pak*

$$(\mathbf{I}_n + \mathbf{c}\mathbf{d}^T)^{-1} = \mathbf{I}_n - \frac{\mathbf{c}\mathbf{d}^T}{1 + \mathbf{d}^T \mathbf{c}},$$

- *je-li* $1 + \mathbf{d}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{c} \neq 0$*, pak platí*

$$(\mathbf{A} + \mathbf{c}\mathbf{d}^T)^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \frac{\mathbf{A}^{-1} \mathbf{c} \mathbf{d}^T \mathbf{A}^{-1}}{1 + \mathbf{d}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{c}}$$

  (obecná Shermanova-Morrisonova formule),

- *jsou-li* $\mathbf{C}, \mathbf{D}$ *matice typu* $n \times k$ *takové, že inverzní matice k matici* $\mathbf{I}^k + \mathbf{D}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{C}$ *existuje, potom*

$$(\mathbf{A} + \mathbf{C}\mathbf{D}^T)^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{C} (\mathbf{I}^k + \mathbf{D}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{C})^{-1} \mathbf{D}^T \mathbf{A}^{-1}$$

  (tzv. Shermanova-Morrisonova-Woodburyho formule).

Elementární matice

V Tvrzení 3.7 jsme ukázali, že každý řádek součinu $\mathbf{AB}$ je lineární kombinací řádků matice $\mathbf{B}$. Nyní si ukážeme, že můžeme efekt elementární řádkové úpravy matice $\mathbf{B}$ docílit také tím, že matici $\mathbf{B}$ vynásobíme zleva vhodnou regulární maticí.

Elementární matice 1. druhu je čtvercová matice $\mathbf{E}_{ij} = (e_{uv})$ řádu m, kde $e_{ij} = e_{ji} = 1$ pro nějaké indexy $i \neq j$, dále $e_{kk} = 1$ pro všechna $k \neq i, j$. Všechny ostatní prvky matice $\mathbf{E}_{ij}$ se rovnají 0.

Podívejme se, jak vypadají řádky v součinu matic $\mathbf{E}_{ij}\mathbf{B}$, kde $\mathbf{B}$ je libovolná matice typu $m \times n$. V i-tém řádku matice E_{ij} je jediný nenulový prvek a to na místě (i, j). Podle první části Tvrzení 3.7 se i-tý řádek součinu $\mathbf{E}_{ij}\mathbf{B}$ rovná

$$[\mathbf{E}_{ij}]_{i*} \mathbf{B} = \sum_{k=1}^{m} e_{ik} \mathbf{B}_{k*}.$$

Protože v i-tém řádku matice $\mathbf{E}_{ij}$ je jediný nenulový prvek $e_{ij} = 1$, rovná se i-tý řádek součinu $\mathbf{E}_{ij}\mathbf{B}$ j-tému řádku $\mathbf{B}_{j*}$ matice $\mathbf{B}$.

Podobně ukážeme, že se j-tý řádek součinu $\mathbf{E}_{ij}\mathbf{B}$ rovná i-tému řádku matice $\mathbf{B}$. Pokud je $k \neq i, j$, je v k-tém řádku matice $\mathbf{E}_{ij}$ jediný nenulový prvek $e_{kk} = 1$ na hlavní diagonále. Proto se k-tý řádek součinu $\mathbf{E}_{ij}\mathbf{B}$ rovná k-tému řádku $\mathbf{B}_{k*}$ matice $\mathbf{B}$. Součin $\mathbf{E}_{ij}\mathbf{B}$ tak dostaneme z matice $\mathbf{B}$ první elementární řádkovou úpravou prohazující i-tý a j-tý řádek matice $\mathbf{B}$.

Elementární matice 2. druhu je čtvercová matice $\mathbf{E}_i(t) = (e_{uv})$ řádu m, která má nenulové prvky pouze na hlavní diagonále, prvek $e_{ii} = t \neq 0$, a prvky $e_{kk} = 1$ pro $k \neq i$. Podobně jako v případě elementární matice 1. druhu snadno ověříme, že součin $\mathbf{E}_i(t)\mathbf{B}$ dostaneme z matice $\mathbf{B}$ tak, že vynásobíme i-tý řádek číslem t, tedy druhou elementární řádkovou úpravou.

Je-li $i \neq j$, pak *elementární matice 3. druhu* je čtvercová matice $\mathbf{E}_{ji}(t) = (e_{uv})$ řádu m, která má na hlavní diagonále prvky rovné 1, a mimo hlavní diagonálu je jediný (případně) nenulový prvek t na místě (j, i). V součinu $\mathbf{E}_{ji}(t)\mathbf{B}$ se potom j-tý řádek rovná lineární kombinaci $t\mathbf{E}_{i*} + \mathbf{E}_{j*}$, tj. součtu t-násobku i-tého řádku s j-tým řádkem matice $\mathbf{B}$. Všechny ostatní řádky matice $\mathbf{E}_{ji}(t)\mathbf{B}$ se rovnají příslušným řádkům matice $\mathbf{B}$. Součin $\mathbf{E}_{ji}(t)\mathbf{B}$ tak dostaneme z matice $\mathbf{B}$ třetí elementární řádkovou úpravou.

Tvrzení 3.13 *Platí, že*

1. *elementární matice všech tří druhů jsou regulární,*
2. *inverzní matice k elementární matici je také elementární matice,*
3. *čtvercová matice* $\mathbf{P}$ *řádu* m *je regulární právě když ji lze vyjádřit jako součin elementárních matic,*
4. *matici* $\mathbf{A}$ *typu* $m \times n$ *dostaneme z matice* $\mathbf{B}$ *téhož typu posloupností elementárních řádkových úprav právě když* $\mathbf{A} = \mathbf{PB}$ *pro nějakou regulární matici řádu* m.

Důkaz. 1. Pokud v elementární matici 1. druhu $\mathbf{E}_{ij}$ prohodíme i-tý a j-tý řádek, dostaneme jednotkovou matici $\mathbf{I}_m$. Matice $\mathbf{E}_{ij}$ má proto hodnost m a podle Věty 3.9 je regulární.

Podobně také z elementární matice 2. druhu $\mathbf{E}_i(t)$ dostaneme jednotkovou matici $\mathbf{I}_m$ elementární řádkovou úpravou, při které vynásobíme i-tý řádek číslem $t^{-1} \neq 0$. Matice $\mathbf{E}_i(t)$ je proto také regulární.

A nakonec, z matice $\mathbf{E}_{ji}(t)$ dostaneme jednotkovou matici $\mathbf{I}_m$ tak, že od j-tého řádku odečteme t-násobek i-tého řádku.

2. Přímým výpočtem ověříme, že $\mathbf{E}_{ij}^{-1} = \mathbf{E}_{ij}$, $\mathbf{E}_i(t)^{-1} = \mathbf{E}_i(t^{-1})$ a $\mathbf{E}_{ji}(t)^{-1} = \mathbf{E}_{ji}(-t)$.

3. Součin elementárních matic je regulární podle Cvičení 3.9, protože každá elementární matice je regulární podle první části tohoto tvrzení.

Je-li naopak matice $\mathbf{P}$ regulární, má podle Věty 3.9 hodnost m. Pomocí elementárních řádkových úprav ji proto můžeme převést do jednotkové matice $\mathbf{I}_m$. To znamená, že existují elementární matice $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \ldots, \mathbf{E}_k$ takové, že

$$\mathbf{E}_k \cdots \mathbf{E}_2\mathbf{E}_1\mathbf{P} = \mathbf{I}_m.$$

Protože je každá elementární matice regulární, postupným násobením poslední rovnosti inverzními maticemi $\mathbf{E}_l^{-1}$ dostaneme rovnost

$$\mathbf{P} = \mathbf{E}_1^{-1}\mathbf{E}_2^{-1} \cdots \mathbf{E}_k^{-1}\mathbf{I}_m = \mathbf{E}_1^{-1}\mathbf{E}_2^{-1} \cdots \mathbf{E}_k^{-1}.$$

Inverzní matice k libovolné elementární matici je opět elementární podle druhé části tohoto tvrzení, poslední rovnost je tak vyjádřením regulární matice $\mathbf{P}$ ve typu součinu elementárních matic.

4. Pokud dostaneme matici $\mathbf{A}$ z matice $\mathbf{B}$ pomocí posloupnosti elementárních úprav, platí

$$\mathbf{A} = \mathbf{E}_k \cdots \mathbf{E}_2\mathbf{E}_1\mathbf{B}.$$

pro nějaké elementární matice $\mathbf{E}_1, \ldots, \mathbf{E}_k$. Podle druhé části tohoto tvrzení je matice $\mathbf{P} = \mathbf{E}_k \cdots \mathbf{E}_2\mathbf{E}_1$ regulární.

Naopak, je-li $\mathbf{A} = \mathbf{PB}$ pro nějakou regulární matici $\mathbf{P}$, vyjádříme podle třetí části tohoto tvrzení matici $\mathbf{P}$ jako součin elementárních matic $\mathbf{P} = \mathbf{F}_l \cdots \mathbf{F}_1$. Potom

$$\mathbf{A} = \mathbf{PB} = \mathbf{F}_l \cdots \mathbf{F}_1\mathbf{B}.$$

Matici $\mathbf{A}$ tak dostaneme z matice $\mathbf{B}$ posloupností elementárních řádkových úprav. $\square$