# Kapitola 2

# Gaussova eliminace

Název druhé kapitoly je současně názvem nejčastěji používané metody (algoritmu) pro řešení soustav lineárních rovnic. Gaussova eliminační metoda pro řešení soustavy lineárních rovnic sestává ze dvou kroků:

- převedení rozšířené matice soustavy pomocí elementárních řádkových úprav do *řádkově odstupňovaného tvaru* pomocí *Gaussovy eliminace*,
- nalezení všech řešení soustavy pomocí *zpětné substituce*.

Oba kroky si nyní podrobně rozebereme. Začneme definicí (řádkově) odstupňovaného tvaru.

**Definice 2.1** *Matice* $\mathbf{E} = (e_{ij})$ *tvaru* $m \times n$ *je v* (řádkově) odstupňovaném tvaru, *jestliže splňuje dvě následující podmínky:*

1. *existuje číslo* $r$, $0 \leq r \leq m$ *takové, že řádkové vektory* $\mathbf{E}_{1*}, \ldots, \mathbf{E}_{r*}$ *jsou nenulové a řádkové vektory* $\mathbf{E}_{r+1*}, \ldots, \mathbf{E}_{m*}$ *matice* $\mathbf{E}$ *jsou nulové,*
2. *jestliže pro každé* $i = 1, \ldots, r$ *označíme* $j(i) = \min\{j \in \{1, 2, \ldots, n\} : a_{ij} \neq 0\}$, *pak platí* $e_{kl} = 0$ *pro každé* $k = i + 1, \ldots, m$ *a současně* $l = 1, \ldots, j(i)$.

*První nenulový prvek v každém řádku nazýváme* pivot.

První podmínka říká, že u matice v odstupňovaném tvaru jsou všechny nulové řádky v dolní části matice. Z druhé podmínky vyplývá, že matice v odstupňovaném tvaru má tolik pivotů, kolik má nenulových řádků. V každém nenulovém řádku je právě jeden pivot. Pro jejich umístění v matici $\mathbf{E}$ v odstupňovaném tvaru platí $j(1) < j(2) < \cdots < j(r)$.

**Cvičení 2.1** *Rozhodněte, které z následujících matic jsou a které nejsou v odstupňovaném tvaru:*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

*Označte pivoty v těch maticích, které jsou v odstupňovaném tvaru.*

Gaussova eliminace — algoritmus pro převedení libovolné matice do odstupňovaného tvaru pomocí elementárních řádkových úprav — spočívá v několikerém opakování jednoho a téhož cyklu. Ukážeme si jeden průběh cyklu. Nechť je dána matice $\mathbf{A} = (a_{kl})$ tvaru $m \times n$. Předpokládáme, že cyklus Gaussovy eliminace již proběhl $(i-1)$-krát pro nějaké $i = 1, 2, \dots, m$ a z matice $\mathbf{A}$ jsme dostali matici $\mathbf{B} = (b_{kl})$. Tento předpoklad také připouští možnost $i - 1 = 0$, tj. že výpočet pomocí Gaussovy eliminace začíná s maticí $\mathbf{B} = \mathbf{A}$. Cyklus sestává z následujících kroků:

1. prohlížíme sloupce matice $\mathbf{B}$ zleva a najdeme první sloupec, který obsahuje nenulový prvek v $i$-tém řádku nebo v nějakém řádku pod $i$-tým řádkem; pokud takový sloupec neexistuje, pokračujeme posledním krokem,

2. je-li první takový sloupec $\mathbf{B}_{*j}$, označíme si místo $(i, j)$ jako místo pro $i$-tý pivot,

3. je-li prvek $b_{ij}$ na místě $(i, j)$ rovný 0, zaměníme pomocí první elementární řádkové úpravy $i$-tý řádek s libovolným řádkem pod $i$-tým řádkem, ve kterém je prvek v $j$-tém sloupci nenulový; v opačném případě pokračujeme hned následujícím krokem,

4. pokud je na místě $(i, j)$ nenulové číslo, přičteme ke všem ostatním řádkům pod $i$-tým řádkem vhodné násobky $i$-tého řádku tak, abychom vynulovali všechny prvky ve sloupci $\mathbf{B}_{*j}$, které se nacházejí pod pivotem na místě $(i, j)$ (tj. opakovaně používáme třetí elementární úpravu),

5. pokud jsou všechny prvky v $i$-tém řádku matice $\mathbf{B}$ a ve všech řádcích pod ním nulové, algoritmus končí.

Průběh celého algoritmu si ukážeme v následující úloze.

**Úloha 2.1** *Převeďte následující matici do odstupňovaného tvaru pomocí Gaussovy eliminace:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 8 & -1 \\ 2 & 4 & 0 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

**Řešení.** Čísla na místech pro pivoty jsou vyznačena tučně:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 8 & -1 \\ 2 & 4 & 0 & 4 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -\mathbf{2} & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & 5 \end{pmatrix} \sim$$
$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -\mathbf{2} & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -\mathbf{2} & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

Ověřit, že po skončení Gaussovy eliminace dostaneme matici v odstupňovaném tvaru, není obtížné. Především si všimněme, že pokud v $i$-tém průběhu cyklu nepřeskočíme druhý krok, zůstane po vykonání třetího a čtvrtého kroku na místě $(i,j)$ nenulový prvek. Proběhne-li celý $i$-tý cyklus, prvních $i$ řádků nové matice je nenulových.

Pokud v prvním kroku $i$-tého cyklu žádný nenulový prvek nenajdeme, znamená to, že $i$-tý řádek a všechny řádky pod ním jsou nulové. Řádky nad $i$-tým řádkem jsou naopak nenulové. Po skončení Gaussovy eliminace proto matice splňuje první podmínku z definice 2.1.

V opačném případě najdeme v prvním kroku $i$-tého cyklu nějaký nenulový prvek a ve druhém kroku najdeme místo $(i,j)$ pro $i$-tý pivot. To znamená, že všechny prvky matice $\mathbf{B}$, které jsou v prvních $j-1$ sloupcích a současně v $i$-tém řádku $\mathbf{B}_{i*}$ nebo v nějakém řádku pod ním, jsou nulové. Po proběhnutí třetího a čtvrtého kroku bude na místě $(i,j)$ nenulový prvek a všechny prvky pod ním v $j$-tém sloupci budou také nulové. První nenulový prvek v $i$-tém řádku tak bude na místě $(i,j)$ a všechny prvky v prvních

$j$ sloupcích a pod $i$-tým řádkem budou nulové. Nová matice tak bude splňovat druhou podmínku definice 2.1 pro $i$-tý řádek. Po skončení Gaussovy eliminace proto bude celá matice splňovat také druhou podmínku definice odstupňovaného tvaru.

**Cvičení 2.2** *Napište program pro Gaussovu eliminaci.*

Později si dokážeme následující důležité tvrzení.

**Tvrzení 2.2** *Je-li* $\mathbf{A}$ *libovolná matice a je-li* $\mathbf{E}$ *nějaká matice v odstupňovaném tvaru, kterou dostaneme z* $\mathbf{A}$ *pomocí elementárních řádkových úprav, pak jsou místa pro pivoty v matici* $\mathbf{E}$ *určena maticí* $\mathbf{A}$ *jednoznačně.*

Pivoty samotné, stejně jako celá matice $\mathbf{E}$, nejsou maticí $\mathbf{A}$ určené jednoznačně.

**Cvičení 2.3** *Najděte matici* $\mathbf{A}$*, kterou lze různými posloupnostmi elementárních řádkových úprav převést do matic v odstupňovaném tvaru, které mají na stejných místech různé pivoty.*

Následující definice zavádí mimo jiné důležitý pojem hodnosti matice.

**Definice 2.3** *Je-li* $\mathbf{A}$ *libovolná matice, pak počet pivotů (tj. počet nenulových řádků) v libovolné matici v odstupňovaném tvaru, kterou dostaneme z* $\mathbf{A}$ *pomocí elementárních řádkových úprav, nazýváme* hodnost *matice* $\mathbf{A}$*. Hodnost matice* $\mathbf{A}$ *budeme označovat* $\operatorname{rank}(\mathbf{A})$*.*

*Sloupce matice* $\mathbf{A}$*, ve kterých leží místo pro nějaký pivot, nazýváme* bázové sloupce *matice* $\mathbf{A}$*.*

Hodnost $\operatorname{rank}(\mathbf{A})$ se tak rovná také počtu bázových sloupců matice $\mathbf{A}$. Všimněte si, že smysluplnost definice hodnosti matice závisí na zatím nedokázaném tvrzení 2.2.

**Cvičení 2.4** *Určete hodnost matic ze cvičení 2.1. .*

Nyní se budeme zabývat otázkou, kdy soustava lineárních rovnic nemá žádné řešení, kdy je *neřešitelná*. Máme-li soustavu $m$ lineárních rovnic o $n$ neznámých

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2, \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m,
\end{aligned} \tag{2.1}$$

označíme $\mathbf{A} = (a_{ij})$ matici této soustavy a $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_m)^T$ sloupcový vektor pravých stran. Rozšířenou matici této soustavy budeme zapisovat také jako $(\mathbf{A}|\mathbf{b})$.

Řešení soustavy rovnic $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ je snadné, pokud je matice soustavy $\mathbf{A}$ v odstupňovaném tvaru. Je-li $r = \operatorname{rank}(\mathbf{A})$ a $b_j \neq 0$ pro nějaké $j = r+1, \ldots, m$, pak soustava $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ nemá řešení. To proto, že $j$-tá rovnice této soustavy má tvar

$$0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = b_j.$$

Protože $b_j \neq 0$, žádná čísla $x_1, \ldots, x_n$ této rovnici nevyhovují a proto je i celá soustava $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ neřešitelná.

V případě, že $b_{r+1} = \cdots = b_m = 0$, najdeme všechna řešení soustavy tak, že neznámé odpovídající sloupcům neobsahujícím pivot zvolíme libovolně a zbývajících $r$ neznámých jednoznačně dopočítáme. Tomuto dopočítávání se říká *zpětná substituce.*

Pokud matice soustavy $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ není v odstupňovaném tvaru, napřed pomocí Gaussovy eliminace převedeme rozšířenou matici soustavy $(\mathbf{A}|\mathbf{b})$ do odstupňovaného tvaru $(\mathbf{E}|\mathbf{c})$ a teprve poté použijeme zpětnou substituci.

Tento obecný postup budeme ilustrovat na několika příkladech. Začneme případem, kdy platí $b_i = 0$ pro všechny indexy $i = 1, \ldots, m$. Takovou soustavu nazýváme *homogenní* soustava lineárních rovnic. Otázka řešitelnosti homogenních soustav je triviální. Soustava

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0, \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned} \tag{2.2}$$

má vždy aspoň jedno řešení $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$. Nazýváme jej *triviální řešení.* Homogenní soustava může mít ještě další řešení, jak ukazuje následující úloha.

**Úloha 2.2** *Najděte všechna řešení soustavy*

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 0, \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 &= 0, \\ 3x_1 + 6x_2 + x_3 + 4x_4 &= 0. \end{aligned}$$

**Řešení.** Rozšířenou matici soustavy

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

převedeme Gaussovou eliminací do odstupňovaného tvaru

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Původní soustava je tedy ekvivalentní soustavě

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 0, \\ -3x_3 - 3x_4 &= 0. \end{aligned}$$

Hodnoty neznámých $x_2$ a $x_4$ zvolíme libovolně a pak dopočítáme hodnoty neznámých $x_1$ a $x_3$ z posledních dvou rovností. Z druhé rovnice dostaneme

$$x_3 = -x_4$$

a po dosazení za $x_3$ do první rovnice

$$\begin{aligned} x_1 &= -2x_2 - 2x_3 - 3x_4 = -2x_2 - 2(-x_4) - 3x_4 \\ &= -2x_2 - x_4. \end{aligned}$$

Řešení soustavy je následující:
Neznámé $x_2$ a $x_4$ můžeme zvolit libovolně a dále

$$\begin{aligned} x_1 &= -2x_2 - x_4, \\ x_3 &= -x_4. \end{aligned}$$

Řešení můžeme také vyjádřit pomocí sloupcových vektorů

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_2 - x_4 \\ x_2 \\ -x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Označíme-li $\mathbf{h}_1 = (-2, 1, 0, 0)^T$ a $\mathbf{h}_2 = (-1, 0, -1, 1)^T$, můžeme obecné řešení soustavy vyjádřit ve tvaru

$$\mathbf{x} = x_2\mathbf{h}_1 + x_4\mathbf{h}_2,$$

kde $x_2$ a $x_4$ jsou libovolná reálná čísla. $\square$

Poslední vyjádření množiny všech řešení soustavy připomíná parametrické vyjádření přímky nebo roviny. Zvolíme-li hodnoty parametrů $x_2 = 1$ a $x_4 = 0$, dostaneme, že vektor $\mathbf{h}_1$ je řešením soustavy. Podobně také $\mathbf{h}_2$ je řešením soustavy.

**Cvičení 2.5** *Najděte všechna řešení několika homogenních soustav lineárních rovnic. Můžete dostat různá parametrická vyjádření množiny všech řešení nějaké soustavy pokud rozšířenou matici této soustavy převedete pomocí elementárních řádkových úprav do různých matic v odstupňovaném tvaru?*

Postup, který jsme použili při řešení Úlohy 2.2, můžeme snadno zobecnit na řešení libovolné homogenní soustavy lineárních rovnic (2.2). Rozšířenou matici soustavy $(\mathbf{A}|\mathbf{0})$ převedeme pomocí Gaussovy eliminace do odstupňovaného tvaru $(\mathbf{E}|\mathbf{0})$. Neznámé, jejichž koeficienty leží v bázových sloupcích matice $(\mathbf{A}|\mathbf{0})$, nazveme *bázové neznámé*. Ostatní neznámé, jejichž koeficienty neleží v bázových sloupcích, nazveme *volné neznámé*.

Počet bázových neznámých se rovná počtu bázových sloupců matice $(\mathbf{A}|\mathbf{0})$, tj. počtu míst pro pivoty v této matici, tj. počtu nenulových řádků v matici $(\mathbf{E}|\mathbf{0})$. Podle Definice 2.3 se tak počet bázových neznámých rovná hodnosti $r = r(\mathbf{A}|\mathbf{0}) = \operatorname{rank}(\mathbf{A})$. Počet volných neznámých se proto rovná $n - r$.

Volné neznámé označíme $x_{f_1}, x_{f_2}, \ldots, x_{f_{n-r}}$. Jejich hodnoty můžeme zvolit libovolně. Pak dopočítáme hodnoty bázových neznámých $x_{j(1)}, \ldots, x_{j(r)}$ následovně. V matici $\mathbf{E}$ je poslední nenulový řádek $\mathbf{E}_{r*}$. V rovnici, která odpovídá tomuto řádku, je nenulový koeficient u jediné bázové neznámé $x_{j(r)}$. Z této rovnice můžeme proto vyjádřit neznámou $x_{j(r)}$ pomocí volných neznámých.

Předpokládejme, že jsme už našli vyjádření všech bázových neznámých $x_{j(r)}, \ldots, x_{j(i+1)}$ pomocí volných neznámých. V rovnici odpovídající $i$-tému řádku matice $\mathbf{E}$ je určitě nenulový koeficient u bázové neznámé $x_{j(i)}$. Z bázových neznámých mohou mít nenulové koeficienty pouze $x_{j(i+1)}, \ldots, x_{j(r)}$. Tyto neznámé už umíme vyjádřit pomocí volných neznámých. Po dosazení těchto vyjádření do rovnice odpovídající $i$-tému řádku matice $(\mathbf{E}|\mathbf{0})$ vyjádříme také bázovou neznámou $x_{j(i)}$ pomocí volných neznámých.

Tímto způsobem postupně vyjádříme všechny bázové neznámé pomocí volných neznámých. Napíšeme-li tato vyjádření do sloupce včetně volných neznámých, najdeme podobně jako při řešení Úlohy 2.2 *obecné řešení* soustavy (2.2) ve tvaru

$$\mathbf{x} = x_{f_1}\mathbf{h}_1 + x_{f_2}\mathbf{h}_2 + \cdots + x_{f_{n-r}}\mathbf{h}_{n-r},$$

kde $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \ldots, \mathbf{h}_{n-r}$ jsou vhodná konkrétní řešení této soustavy a $x_{f_1}, \ldots,$ $x_{f_{n-r}}$ jsou libovolná reálná čísla. Dokázali jsme tak první část následující věty.

**Věta 2.4** *Obecné řešení homogenní soustavy lineárních rovnic*

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0, \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

*lze vyjádřit ve tvaru*

$$\mathbf{x} = x_{f_1}\mathbf{h}_1 + x_{f_2}\mathbf{h}_2 + \cdots + x_{f_{n-r}}\mathbf{h}_{n-r},$$

*kde* $r = \operatorname{rank}(\mathbf{A})$ *je hodnost matice soustavy* $\mathbf{A} = (a_{ij})$*,* $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \ldots, \mathbf{h}_{n-r}$ *jsou vhodná konkrétní řešení této soustavy, a* $x_{f_1}, \ldots, x_{f_{n-r}}$ *jsou libovolná reálná čísla.*

*Soustava má pouze triviální řešení právě když* $\operatorname{rank}(\mathbf{A}) = n$.

**Důkaz.** Zbývá dokázat ekvivalenci z druhého odstavce. Soustava má pouze triviální řešení právě když není žádná neznámá volná. To je právě když jsou všechny sloupce matice $\mathbf{A}$ bázové. Z Definice 2.3 plyne, že všechny sloupce matice $\mathbf{A}$ jsou bázové právě když $\operatorname{rank}(\mathbf{A}) = n$. $\square$

Řešení soustavy s obecnou pravou stranou probíhá analogicky.

**Úloha 2.3** *Najděte všechna řešení soustavy*

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 4, \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 &= 5, \\ 3x_1 + 6x_2 + x_3 + 4x_4 &= 7. \end{aligned}$$

**Řešení.** Rozšířenou matici soustavy

$$(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 5 \\ 3 & 6 & 1 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

převedeme Gaussovou eliminací do odstupňovaného tvaru

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (\mathbf{E}|\mathbf{c}).$$

Původní soustava je tedy ekvivalentní soustavě

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 4, \\ -\,3x_3 - 3x_4 &= -3. \end{aligned}$$

Hodnoty neznámých $x_2$ a $x_4$ můžeme zvolit libovolně a pak dopočítáme hodnoty neznámých $x_1$ a $x_3$ z posledních dvou rovností. Z druhé rovnice dostaneme

$$x_3 = 1 - x_4$$

a po dosazení za $x_3$ do první rovnice

$$x_1 = 2 - 2x_2 - x_4.$$

Řešení soustavy je následující:
hodnoty neznámých $x_2$ a $x_4$ zvolíme libovolně a dále

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 - 2x_2 - x_4, \\ x_3 &= 1 - x_4. \end{aligned}$$

Vyjádříme-li řešení pomocí sloupcových vektorů, dostaneme

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 2x_2 - x_4 \\ x_2 \\ 1 - x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Označíme-li $\mathbf{p} = (2, 0, 1, 0)^T$, $\mathbf{h}_1 = (-2, 1, 0, 0)^T$ a $\mathbf{h}_2 = (-1, 0, -1, 1)^T$, můžeme obecné řešení soustavy vyjádřit ve tvaru

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + x_2\mathbf{h}_1 + x_4\mathbf{h}_2,$$

kde $x_2$ a $x_4$ jsou libovolná reálná čísla. □

Všimněte si, že vektor $\mathbf{p}$ je jedním konkrétním řešením soustavy, zvolíme-li hodnoty volných neznámých $x_2 = x_4 = 0$. Srovnáme-li řešení Úlohy 2.3 s řešením Úlohy 2.2, vidíme že obecné řešení nehomogenní soustavy dostaneme jako součet jednoho konkrétního řešení $\mathbf{p}$ této soustavy a obecného řešení $x_2\mathbf{h}_1 + x_4\mathbf{h}_2$ příslušné homogenní soustavy

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 0, \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 &= 0, \\ 3x_1 + 6x_2 + x_3 + 4x_4 &= 0. \end{aligned}$$

Tato vlastnost není žádnou specialitou soustavy řešené v Úloze 2.3. Dokážeme si to za chvilku.

Postup pro řešení obecné soustavy (2.1) je analogický postupu pro řešení homogenní soustavy (2.2).

- Pomocí Gaussovy eliminace převedeme matici $(\mathbf{A}|\mathbf{b})$ do odstupňovaného tvaru $(\mathbf{E}|\mathbf{c})$.

Je-li sloupec pravých stran $\mathbf{c}$ bázovým sloupcem matice $(\mathbf{E}|\mathbf{c})$, je soustava (2.1) neřešitelná. Pokud není bázovým sloupcem matice $(\mathbf{E}|\mathbf{c})$, pokračujeme následujícími kroky.

- Identifikujeme bázové a volné neznámé podle toho, jsou-li sloupcové vektory jejich koeficientů bázové sloupce matice $(\mathbf{E}|\mathbf{c})$.
- Pomocí zpětné substituce vyjádříme bázové neznámé pomocí volných neznámých.
- Vyjádříme *obecné řešení* ve tvaru

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + x_{f_1}\mathbf{h}_1 + x_{f_2}\mathbf{h}_2 + \cdots + x_{f_{n-r}}\mathbf{h}_{n-r},$$

  kde $\mathbf{p}$ je vhodné konkrétní řešení soustavy (2.1), $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \ldots, \mathbf{h}_{n-r}$ jsou vhodné sloupcové vektory dimenze $m$, $x_{f_1}, \ldots, x_{f_{n-r}}$ jsou libovolná reálná čísla a $r = \operatorname{rank}(\mathbf{A})$.

Pokud tedy sloupec pravých stran rozšířené matice $(\mathbf{A}|\mathbf{b})$ soustavy (2.1) není bázový sloupec této matice, je soustava řešitelná.

**Věta 2.5** *Soustava (2.1) $m$ lineárních rovnic o $n$ neznámých je řešitelná právě když sloupec pravých stran není bázovým sloupcem rozšířené matice* $(\mathbf{A}|\mathbf{b})$ *této soustavy.* $\square$

Dokážeme ještě následující větu.

**Věta 2.6** *Obecné řešení* $\mathbf{x} = \mathbf{p} + x_{f_1}\mathbf{h}_1 + x_{f_2}\mathbf{h}_2 + \cdots + x_{f_{n-r}}\mathbf{h}_{n-r}$ *řešitelné soustavy (2.1) dostaneme tak, že k jednomu konkrétnímu řešení* $\mathbf{p}$ *této soustavy přičteme obecné řešení*

$$x_{f_1}\mathbf{h}_1 + x_{f_2}\mathbf{h}_2 + \cdots + x_{f_{n-r}}\mathbf{h}_{n-r}$$

*příslušné homogenní soustavy (2.2).*

*Soustava má jednoznačně určené řešení právě když* $\operatorname{rank}(\mathbf{A}) = n$, *kde* $\mathbf{A}$ *je matice soustavy.*

**Důkaz.** Označíme $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)^T$ konkrétní řešení soustavy (2.1). Pro každé $j = 1, 2, \dots, m$ proto platí

$$a_{j1}p_1 + a_{j2}p_2 + \cdots + a_{jn}p_n = b_j.$$

Dále označíme $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)^T$ libovolný vektor z aritmetického reálného prostoru $\mathbf{R}^n$. Je-li vektor $\mathbf{p} + \mathbf{q} = (p_1 + q_1, \dots, p_n + q_n)^T$ také řešení soustavy (2.1), musí platit pro každé $j = 1, 2, \dots, m$

$$a_{j1}(p_1 + q_1) + a_{j2}(p_2 + q_2) + \cdots + a_{jn}(p_n + q_n) = b_j.$$

Odtud plyne

$$\begin{aligned} b_j &= a_{j1}(p_1 + q_1) + a_{j2}(p_2 + q_2) + \cdots + a_{jn}(p_n + q_n) = \\ &= (a_{j1}p_1 + a_{j2}p_2 + \cdots + a_{jn}p_n) + (a_{j1}q_1 + a_{j2}q_2 + \cdots + a_{jn}q_n) = \\ &= b_j + a_{j1}q_1 + a_{j2}q_2 + \cdots + a_{jn}q_n. \end{aligned}$$

Proto

$$a_{j1}q_1 + a_{j2}q_2 + \cdots + a_{jn}q_n = 0$$

pro každé $j = 1, 2, \dots, m$. Vektor $\mathbf{q}$ je tedy řešením homogenní soustavy (2.2).

Je-li naopak vektor $\mathbf{r} = (r_1, r_2, \dots, r_n)^T$ řešením homogenní soustavy (2.2), platí

$$a_{j1}r_1 + a_{j2}r_2 + \cdots + a_{jn}r_n = 0$$

pro každé $j = 1, 2, \dots, m$. Potom

$$\begin{aligned} b_j &= (a_{j1}p_1 + a_{j2}p_2 + \cdots + a_{jn}p_n) + (a_{j1}r_1 + a_{j2}r_2 + \cdots + a_{jn}r_n) \\ &= a_{j1}(p_1 + r_1) + a_{j2}(p_2 + r_2) + \cdots + a_{jn}(p_n + r_n). \end{aligned}$$

Vektor $\mathbf{p} + \mathbf{r}$ je tedy řešením soustavy (2.1).

Právě jsme dokázali, že řešitelná soustava (2.1) má jednoznačně určené řešení právě když příslušná homogenní soustava (2.2) má pouze triviální řešení. Podle Věty 2.4 má příslušná homogenní soustava pouze triviální řešení právě když je hodnost matice soustavy $\operatorname{rank}(\mathbf{A}) = n$. $\square$

### Efektivita Gaussovy eliminace

Jak efektivní je algoritmus pro řešení soustavy lineárních rovnic založený na Gaussově eliminaci a zpětné substituci? Efektivitu algoritmu můžeme měřit různými způsoby. Kolik operační paměti je k němu potřeba? Jak dlouho trvá výpočet? Odpověď na první otázku rozhoduje o tom, jak velké úlohy můžeme vůbec řešit na počítači s danou velikostí operační paměti.

Odpověď na druhou otázku závisí především na rychlosti procesoru. Ta se prudce zvyšuje. Odhad efektivity algoritmu by neměl záviset na tom, jak se vyvíjí hardware, na kterém algoritmus realizujeme. Mnohem vhodnější je spočítat kolik základních operací musí algoritmus vykonat. Zrychlení procesoru znamená zkrácení doby, která je třeba pro realizaci jednotlivých základních operací, nemění ale jejich počet. Gaussova eliminace používá sčítání, odčítání, násobení a dělení. Kromě toho při prohazování řádků matice musí procesor přepsat adresy, kde data uchovává. Doba potřebná pro přepisování adres je zanedbatelná v porovnání s dobou, která je třeba pro provedení základních aritmetických operací. Algoritmy pro základní aritmetické operace jsou většinou shodné s těmi algoritmy, které jsme se učili na prvním stupni základní školy. Doba potřebná pro násobení/dělení je tak podstatně větší než doba potřebná pro sčítání/odčítání. Proto si spočítáme zvlášť, kolikrát je nutné při řešení soustavy lineárních rovnic násobit/dělit, a kolikrát je třeba sčítat/odčítat.

Začneme řešením soustavy $n$ lineárních rovnic o $n$ neznámých, jejíž matice má hodnost $n$. Lze totiž ukázat, že takové soustavy vyžadují nejvíce operací mezi všemi soustavami, které mají nejvýše $n$ rovnic a nejvýše $n$ neznámých (zkuste si rozmyslet proč).

**Tvrzení 2.7** *Řešení soustavy $n$ lineárních rovnic o $n$ neznámých, jejíž matice má hodnost $n$, Gaussovou eliminací a zpětnou substitucí vyžaduje nejvýše*

$$\begin{array}{ll} \frac{1}{3}n^3 + n^2 - \frac{1}{3}n & \text{násobení/dělení, a} \\ \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{5}{6}n & \text{sčítání/odčítání.} \end{array}$$

**Důkaz.** Označme matici soustavy $\mathbf{A} = (a_{ij})$. Je to čtvercová matice řádu $n$ a podle předpokladu je její hodnost $n$. Označme dále vektor pravých stran $\mathbf{b}$. Spočítáme, kolik jakých operací je třeba vykonat při prvním průběhu hlavního cyklu Gaussovy eliminace. Všechny prvky prvního řádku rozšířené matice soustavy $(\mathbf{A}|\mathbf{b})$ s výjimkou prvku $a_{11}$ musíme vynásobit číslem $a_{21}/a_{11}$. Výpočet tohoto prvku vyžaduje jedno dělení a násobení celého prvního řádku s výjimkou prvku $a_{11}$ vyžaduje dalších $n$ násobení. Odečtení $(a_{21}/a_{11})$-násobku prvního řádku od druhého vyžaduje $n$ odečítání. Řádky sice mají $n + 1$ prvků, jejich první čísla ale nemusíme odečítat. Koeficient $a_{21}/a_{11}$ jsme zvolili tak, abychom dostali na místě $(2, 1)$ nulu. Celkem tedy pro úpravu druhého řádku potřebujeme

$$\begin{array}{rl} n+1 & \text{násobení/dělení, a} \\ n & \text{sčítání/odčítání.} \end{array}$$

Tímto způsobem musíme upravit všech $n-1$ řádků pod prvním řádkem rozšířené matice soustavy $(\mathbf{A}|\mathbf{b})$. Celkem tedy první průběh cyklu Gaussovy eliminace vyžaduje

$$\begin{array}{rl} (n-1)(n+1) = n^2-1 & \text{násobení/dělení, a} \\ (n-1)n = n^2-n & \text{sčítání/odčítání.} \end{array}$$

Při druhém průběhu hlavního cyklu Gaussovy eliminace se nemusíme zabývat prvky v prvním řádku a prvním sloupci. Druhý průběh tedy vyžaduje

$$\begin{array}{rl} (n-2)n = (n-1)^2-1 & \text{násobení/dělení, a} \\ (n-2)(n-1) = (n-1)^2-(n-1) & \text{sčítání/odčítání.} \end{array}$$

Celá Gaussova eliminace tak vyžaduje

$$\begin{array}{rcll} \displaystyle\sum_{i=1}^{n}(i^2-1) & = & \frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2-\frac{5}{6}n & \text{násobení/dělení, a} \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n}(i^2-i) & = & \frac{1}{3}n^3-\frac{1}{3}n & \text{sčítání/odčítání.} \end{array}$$

Protože má matice $\mathbf{A}$ hodnost $n$, dostaneme po skončení Gaussovy eliminace matici

$$\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1n} & e_1 \\ 0 & d_{22} & \cdots & d_{2n} & e_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{nn} & e_n \end{pmatrix},$$

ve které jsou všechny pivoty $d_{ii} \neq 0$.

Formulka pro výpočet neznámé $x_i$ zpětnou substitucí je

$$x_i = \frac{1}{d_{ii}}(e_i - d_{i,i+1}x_{i+1} - d_{i,i+2}x_{i+2} - \cdots - d_{in}x_n)$$

pro $i = 1, 2, \ldots, n$. Výpočet neznámé $x_i$ tak vyžaduje

$$\begin{array}{rl} n-i+1 & \text{násobení/dělení, a} \\ n-i & \text{sčítání/odčítání.} \end{array}$$

Celkem tedy zpětná substituce vyžaduje

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(n-i+1) &= \sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n \quad \text{násobení/dělení, a}\\ \sum_{i=1}^{n}(n-i) &= \sum_{i=0}^{n-1} i = \frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n \quad \text{sčítání/odčítání.}\end{aligned}$$

Gaussova eliminace spolu se zpětnou substitucí tak vyžaduje celkem

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2-\frac{5}{6}n+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n &= \frac{1}{3}n^3+n^2-\frac{1}{3}n \quad \text{násobení/dělení, a}\\ \frac{1}{3}n^3-\frac{1}{3}n+\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n &= \frac{1}{3}n^3-\frac{1}{2}n^2-\frac{5}{6}n \quad \text{sčítání/odčítání.}\end{aligned}$$

□

Gaussova eliminace spolu se zpětnou substitucí je natolik jednoduchý algoritmus, že jsme mohli spočítat přesně maximální nutný počet aritmetických operací pro celý algoritmus. U složitějších algoritmů to není tak jednoduché. V takovém případě se zajímá o *asymptotický odhad* počtu nutných operací. Pokud je $n$ hodně velké, tak členy menšího řádu v celkovém počtu operací nehrají žádnou roli. Pro celkový počet operací má zásadní význam pouze člen s největší mocninou $n$. V případě řešení soustavy lineárních rovnic se čtvercovou maticí je $n$ řád matice. Obecně $n$ označuje vhodně měřenou "velikost" úlohy.

**Cvičení 2.6** *Dokažte všechny formulky pro sumy v předchozím důkazu matematickou indukcí podle $n$.*

### Spolehlivost Gaussovy eliminace

Gaussova eliminace spolu se zpětnou substitucí najde správně všechna řešení dané soustavy lineárních rovnic. Problém nastává v okamžiku, kdy reálná čísla vyjadřujeme pomocí *plovoucí desetinné čárky*, tj. ve tvaru

$$\pm 0,d_1d_2\cdots d_t\times\beta^{\epsilon},$$

kde *základ* $\beta$, *exponent* $\epsilon$ a *cifry* $0\le d_i<\beta$ pro $i=1,2,\ldots,t$ jsou celá čísla. Takovou reprezentaci reálných čísel používá naprostá většina programovacích jazyků. Obvyklý dekadický zápis dostaneme volbou $\beta=10$. Binární zápis dostaneme, pokud $\beta=2$. 64-bitový procesor přirozeně používá základ

$\beta = 2^{64}$. Číslo $t$ nazýváme *přesnost* nebo také *počet platných cifer*. Problém je, že čísla v tomto vyjádření nejsou uzavřená na základní aritmetické operace. Součin nebo podíl dvou takových čísel může vyžadovat více platných cifer. V takovém případě je výsledek zaokrouhlen na $t$ platných cifer. Aritmetika čísel vyjádřených pomocí plovoucí desetinné čárky *není* exaktní. Výsledky základních aritmetických operací jsou zatížené *zaokrouhlovacími chybami.* Tyto chyby se v průběhu delšího výpočtu akumulují a důsledkem může být, že konečný výsledek se velmi liší od správného výsledku, který dostaneme používáme-li *exaktní aritmetiku.*

Efekt zaokrouhlovacích chyb si ukážeme na řešení soustavy

$$\begin{aligned} 47x + 28y &= 19, \\ 89x + 53y &= 36. \end{aligned}$$

Gaussova eliminace následovaná zpětnou substitucí vede při použití exaktní aritmetiky k výsledku

$$x = 1 \quad \text{a} \quad y = -1.$$

Zkusíme provést zcela stejný postup s přesností na tři platné cifry. První problém nastane hned při pokusu převést rozšířenou matici soustavy

$$\begin{pmatrix} 47 & 28 & 19 \\ 89 & 53 & 36 \end{pmatrix}$$

do odstupňovaného tvaru. První řádek matice musíme napřed vynásobit číslem $89/47 \doteq 1,893617021\ldots$, což po zaokrouhlení na tři platná místa znamená, že první řádek matice násobíme číslem $1,89$. Protože $1,89 \cdot 47 = 88,83 \doteq 88,8$, dále $1,89 \cdot 28 = 52,92 \doteq 52,9$, a nakonec $1,89 \cdot 19 = 35,91 \doteq 35,9$, dostaneme při zaokrouhlování výsledku každé aritmetické operace na tři platné cifry po prvním cyklu Gaussovy eliminace matici

$$\begin{pmatrix} 47 & 28 & 19 \\ 0,2 & 0,1 & 0,1 \end{pmatrix}.$$

Pokud tedy nepoužíváme exaktní aritmetiku, může se stát, že se nám nepodaří převést matici do odstupňovaného tvaru. Potom ale nelze použít zpětnou substituci.

Jedinou možností, jak tento problém obejít, je prostě napsat do matice číslo 0, pokud nějakou operaci provádíme s cílem vynulovat příslušný prvek matice. Čili Gaussova eliminace prováděná s přesností na tři platné cifry vede k matici

$$\begin{pmatrix} 47 & 28 & 19 \\ 0 & 0,1 & 0,1 \end{pmatrix}.$$

Zpětnou substitucí pak dostaneme řešení

$$y = 1 \ \text{ a } \ x = -0,191.$$

Problém zaokrouhlovacích chyb můžeme v některých případech odstranit *parciální pivotací.* Ta spočívá v tom, že na místo pro pivot vždy převedeme pomocí první elementární řádkové úpravy *největší* číslo v absolutní hodnotě, které lze prohozením příslušného řádku s nějakým řádkem pod ním na toto místo dostat.

Parciální pivotace ale nepomůže vždy. Exaktní řešení soustavy

$$\begin{aligned} -10x + 10^5 y &= 10^5, \\ x + y &= 2 \end{aligned}$$

je

$$x = \frac{10000}{10001} \ \text{ a } \ y = \frac{10002}{10001}.$$

Nyní počítáme řešení s platností na tři platné cifry. Protože $|-10| > 1$, není parciální pivotace nutná. Gaussova eliminace vede k matici

$$\begin{pmatrix} -10 & 10^5 & 10^5 \\ 0 & 10^4 & 10^4 \end{pmatrix}.$$

Zpětná substituce pak vede k řešení

$$x = 0 \ \text{ a } \ y = 1.$$

Problém s touto soustavou spočívá ve skutečnosti, že první rovnice obsahuje koeficienty, které jsou mnohem větší než koeficienty v druhé rovnici. Lze jej odstranit tím, že první rovnici vydělíme číslem $10^5$, aby e maximální koeficient v této rovnici rovnal 1. Dostaneme tak soustavu

$$\begin{aligned} -10^{-4}x + y' &= 1, \\ x + 10^{-3}y' &= 2. \end{aligned}$$

Tato soustava bez použití parciální pivotace vede při zaokrouhlování na tři platná místa k řešení $x = 0$ a $y = 1$, stále k řešení velmi nevyhovujícímu. Parciální pivotace ale vede k přehození pořadí obou rovnic, tj. k řešení soustavy

$$\begin{aligned} x + 10^{-3}y' &= 2, \\ -10^{-4}x + y' &= 1 \end{aligned}$$

a u té vede Gaussova eliminace a zpětná substituce při zaokrouhlování na tři desetinná místa k řešení $x = 1$ a $y = 1$, které se shoduje s exaktním řešením zaokrouhleným na tři desetinná místa. Přesnější řešení nelze při zaokrouhlování na tři desetinná místa získat.

Žádná obecně použitelná metoda pro vyloučení zaokrouhlovacích chyb ale neexistuje.

Problém zaokrouhlovacích chyb zdánlivě vyřeší systémy, které používají exaktní aritmetiku. Jejich problém ale spočívá v mnohem menší rychlosti výpočtů. Je-li nutné řešit soustavu s obrovským počtem rovnic a neznámých, může se stát, že exaktní aritmetika je prakticky nepoužitelná.

Při praktickém řešení soustav lineárních rovnic se lze setkat ještě s problémem jiného druhu. Exaktní řešení soustavy

$$\begin{aligned} 0,835x + 0,667y &= 0,168, \\ 0,333x + 0,266y &= 0,067 \end{aligned}$$

je

$$x = 1 \text{ a } y = -1.$$

Změníme-li nepatrně pravou stranu druhé rovnice na $0,066$, dostaneme soustavu

$$\begin{aligned} 0,835x + 0,667y &= 0,168, \\ 0,333x + 0,266y &= 0,066, \end{aligned}$$

která má exaktní řešení

$$x = -666 \text{ a } y = 834.$$

O soustavách, u kterých nepatrná změna koeficientů způsobí velkou změnu řešení, říkáme že jsou to *špatně podmíněné soustavy.* Geometrická příčina tohoto jevu je v našem konkrétním případě následující. Každá rovnice určuje přímku v rovině. Jejich průsečík je řešením soustavy. Směrnice obou přímek jsou téměř stejné. Nepatrný posun jedné z přímek tak způsobí velký posun jejich průsečíku.

Pokud jsou koeficienty soustavy výsledkem nějakého měření, neznáme je nikdy s absolutní přesností. Každý měřící přístroj má nějakou toleranci. Řešení špatně podmíněné soustavy je nepřijatelně závislé na přesnosti odečtu výsledků měření, která určují koeficienty soustavy. Na takové řešení je lépe se nespoléhat. Nutné je upravit fyzikální model, který k soustavě vedl tak, abychom po úpravě dostali úlohu, která není špatně podmíněná. Exaktní aritmetika v tomto případě nemůže pomoci.

Špatně podmíněné soustavy mají ještě jeden rys, který je dobré si uvědomit. Zkusme do soustavy

$$\begin{aligned} 0,835x + 0,667y &= 0,168, \\ 0,333x + 0,266y &= 0,067 \end{aligned}$$

dosadit $x = -666$ a $y = 834$. Dostaneme

$$\begin{aligned} 0,835 \cdot (-666) + 0,667 \cdot 834 - 0,168 &= 0, \\ 0,333 \cdot (-666) + 0,266 \cdot 834 - 0,067 &= -0,001. \end{aligned}$$

Zdá se, že čísla $x = -666$ a $y = 834$ soustavě "téměř" vyhovují. Ve skutečnosti se ale velmi liší od exaktního řešení $x = 1$ a $y = -1$.

**Gaussova-Jordanova eliminace**

Gaussova-Jordanova eliminace je upravená Gaussova eliminace, která převádí danou matici do *redukovaného* odstupňovaného tvaru.

**Definice 2.8** *Matice* $\mathbf{E}$ *tvaru* $m \times n$ *je v* redukovaném odstupňovaném tvaru*, jestliže*

1. *je v odstupňovaném tvaru,*
2. *první nenulový prvek v každém řádku (tj. každý pivot) se rovná* 1*,*
3. *všechny prvky nad každým pivotem (v témže sloupci) jsou rovné* 0*.*

Algoritmus pro Gaussovu-Jordanovu eliminaci získáme úpravou čtvrtého kroku algoritmu pro Gaussovu eliminaci. Ten provedeme v následující podobě:

4. pokud je na místě $(i, j)$ nenulové číslo $b_{ij}$, vynásobíme $i$-tý řádek číslem $b_{ij}^{-1}$ a poté přičteme ke všem ostatním řádkům různým od $i$-tého řádku vhodné násobky tohoto řádku tak, abychom vynulovali všechny prvky ve sloupci $\mathbf{B}_{*j}$, různé od pivotu na místě $(i, j)$.

Gaussova-Jordanova eliminace je náročnější na výpočet než Gaussova eliminace. O kolik náročnější nám říká následující tvrzení.

**Tvrzení 2.9** *ešení soustavy* $n$ *lineárních rovnic o* $n$ *neznámých, jejíž matice má hodnost* $n$*, Gaussovou-Jordanovou eliminací a zpětnou substitucí vyžaduje nejvýše*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{2}n^2 &\quad \text{násobení/dělení, a} \\ \frac{1}{2}n^3 - \frac{1}{2}n &\quad \text{sčítání/odčítání.} \end{aligned}$$

**Důkaz.** Důkaz je podobný důkazu Tvrzení 2.7, proto budeme postupovat rychleji. Matici soustavy označíme $\mathbf{A} = (a_{ij})$. Při prvním průběhu hlavního cyklu Gaussovy-Jordanovy eliminace potřebujeme $n$ násobení/dělení při násobení prvního řádku číslem $a_{11}^{-1}$. Vynulování prvku na místě $(2,1)$ vyžaduje dalších $n$ násobení/dělení a $n$ sčítání/odčítání. To musíme udělat se všemi $n-1$ řádky pod prvním řádkem. Celkem tedy první průběh hlavního cyklu vyžaduje

$$\begin{aligned} n + (n-1)n &\quad \text{násobení/dělení, a} \\ (n-1)n &\quad \text{sčítání/odčítání.} \end{aligned}$$

Abychom při druhém průběhu hlavního cyklu dostali číslo 1 na místě $(2,2)$, musíme použít $n-1$ násobení/dělení. Vynulování všech prvků ve druhém sloupci s výjimkou čísla 1 na místě $(2,2)$ vyžaduje dalších $(n-1)(n-1)$ násobení/dělení a $(n-1)(n-1)$ sčítání/odčítání. Celkem tedy Gaussova-Jordanova eliminace vyžaduje

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n}(i + (n-1)i) = \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{2}n^2 &\quad \text{násobení/dělení, a} \\ \sum_{i=1}^{n}(n-1)i = \frac{1}{2}n^3 - \frac{1}{2}n &\quad \text{sčítání/odčítání.} \end{aligned}$$

□

Po skončení Gaussovy-Jordanovy eliminace dostaneme matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & e_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & e_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & e_n \end{pmatrix},$$

ze které přímo vyčteme řešení $x_i = e_i$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$. Zpětnou substituci není nutné v tomto případě provádět. Počet operací nutných pro Gaussovu-Jordanovu eliminaci tak stačí pro řešení soustavy $n$ lineárních rovnic o $n$ neznámých s maticí hodnosti $n$. Srovnání Tvrzení 2.7 s Tvrzením 2.9 ukazuje, že řešení soustavy Gaussovou-Jordanovou eliminací vyžaduje zhruba o 50% operací více, než výpočet Gaussovou eliminací následovaný zpětnou substitucí. Proč tedy vůbec o Gaussově-Jordanově eliminaci mluvit? Důvod spočívá v tom, že Gaussova-Jordanova metoda se více hodí pro jiné úlohy než je řešení soustav lineárních rovnic. Dále má určité teoretické výhody, protože platí následující tvrzení, které si stejně jako tvrzení 2.2 dokážeme později.

**Tvrzení 2.10** *Pokud převedeme matici* $\mathbf{A}$ *pomocí elementárních řádkových úprav do redukovaného odstupňovaného tvaru, dostaneme jednoznačně určenou matici* $\mathbf{E_A}$.

Výsledkem Gaussovy-Jordanovy eliminace použité na nějakou matici $\mathbf{A}$ je tedy jednoznačně určená matice $\mathbf{E_A}$. Narozdíl od výsledku Gaussovy eliminace, ve kterém jsou podle Tvrzení 2.2 jednoznačně určená pouze místa pro pivoty.