

Kapitola 12

Kvadratické formy

Definice 12.1 Kvadratická forma v n proměnných s koeficienty z tělesa \mathbf{T} je výraz tvaru

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n a_{ij} x_i x_j,$$

kde koeficienty $a_{ij} \in \mathbf{T}$.

Kvadratická forma v n proměnných je tak polynom n proměnných s koeficienty z tělesa \mathbf{T} , jehož všechny monočleny jsou stupně 2. Například polynom

$$f(x_1, x_2) = 13x_1^2 + 10x_1x_2 + 13x_2^2$$

je kvadratická forma ve dvou proměnných.

Je-li charakteristika tělesa \mathbf{T} různá od 2, můžeme kvadratickou formu vyjádřit pomocí násobení matic. Označíme $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ vektor proměnných a $\mathbf{B} = (b_{ij})$ čtvercovou matici řádu n , kde $b_{ii} = a_{ii}$ pro $i = 1, \dots, n$ a $b_{ij} = a_{ij}/2$ pro dvojice $i < j \in \{1, 2, \dots, n\}$ a $b_{ji} = a_{ij}/2$ pro dvojice $i < j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Potom součin $\mathbf{x}^T \mathbf{B} \mathbf{x}$ je kvadratická forma v n proměnných. Koeficient u x_i^2 se rovná $b_{ii} = a_{ii}$ pro $i = 1, 2, \dots, n$. Koeficient u $x_i x_j$ pro $i < j$ se rovná $b_{ij} + b_{ji} = a_{ij}$. Platí proto

$$\mathbf{x}^T \mathbf{B} \mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n a_{ij} x_i x_j = f(x_1, \dots, x_n).$$

Matici \mathbf{B} nazýváme *matice kvadratické formy* $f(x_1, \dots, x_n)$. Tato matice je symetrická. Kvadratická forma $f(x_1, x_2) = 13x_1^2 + 10x_1x_2 + 13x_2^2$ má tedy matici

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 13 & 5 \\ 5 & 13 \end{pmatrix}.$$

Pokud je kvadratická forma navíc reálná, je její matice \mathbf{B} podle Cvičení 10.3 normální a podle Věty 10.21 je unitárně diagonalizovatelná. Existují tedy ortogonální matice \mathbf{P} a diagonální matice $\mathbf{D} = (d_{ij})$, pro které platí $\mathbf{B} = \mathbf{PDP}^T$. Jsou-li všechna vlastní čísla $\lambda_i \in \sigma(\mathbf{B})$ (tj. všechny prvky na hlavní diagonále matice \mathbf{D}) nezáporná, můžeme je odmocnit a definovat matici $\sqrt{\mathbf{D}}$ jako matici, která má na místě (i, i) prvek $\sqrt{d_{ii}}$. Potom platí

$$\mathbf{B} = \mathbf{PDP}^T = P\sqrt{\mathbf{D}}\sqrt{\mathbf{D}}P^T = \mathbf{C}^T\mathbf{C}, \quad \text{kde } \mathbf{C} = \sqrt{\mathbf{D}}P^T.$$

Jsou-li navíc všechna vlastní čísla matice \mathbf{B} kladná, pak je matice \mathbf{C} regulární.

Jestliže naopak můžeme reálnou symetrickou matici \mathbf{B} vyjádřit ve tvaru $\mathbf{B} = \mathbf{C}^T\mathbf{C}$, pak pro každé vlastní číslo λ matice \mathbf{B} a jemu odpovídající vlastní vektor $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ platí

$$\lambda = \frac{\mathbf{x}^T\mathbf{B}\mathbf{x}}{\mathbf{x}^T\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}^T\mathbf{C}^T\mathbf{C}\mathbf{x}}{\mathbf{x}^T\mathbf{x}} = \frac{\|\mathbf{C}\mathbf{x}\|^2}{\|\mathbf{x}\|^2} \geq 0.$$

Je-li navíc matice \mathbf{C} (a tedy i \mathbf{B}) regulární, pak $\mathcal{N}(\mathbf{B}) = \{\mathbf{0}\}$, tj. $\mathbf{B}(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$ a $\lambda > 0$. Dokázali jsme tak následující tvrzení.

Tvrzení 12.2 *Reálná symetrická matice \mathbf{B} má všechna vlastní čísla nezáporná právě když ji lze vyjádřit ve tvaru součinu $\mathbf{B} = \mathbf{C}^T\mathbf{C}$, kde \mathbf{C} je také čtvercová matice řádu n . Reálná symetrická matice \mathbf{B} má všechna vlastní čísla kladná, právě když ve vyjádření $\mathbf{B} = \mathbf{C}^T\mathbf{C}$ je matice \mathbf{C} regulární.*

Definice 12.3 *Reálná kvadratická forma $f(x_1, \dots, x_n) = \mathbf{x}^T\mathbf{B}\mathbf{x}$ se nazývá pozitivně semidefinitní, jestliže*

$$f(x_1, \dots, x_n) \geq 0$$

pro libovolná reálná čísla $x_1, \dots, x_n \in \mathbf{R}$. Pozitivně semidefinitní forma se nazývá pozitivně definitní pokud platí $f(x_1, \dots, x_n) = \mathbf{x}^T\mathbf{B}\mathbf{x} = 0$ právě když $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Tvrzení 12.4 *Je-li $f(x_1, \dots, x_n)$ reálná kvadratická forma v n proměnných a $\mathbf{B} = (b_{ij})$ její matice, která má hodnost r , pak je ekvivalentní*

1. $f(x_1, \dots, x_n)$ je pozitivně semidefinitní,
2. všechny vlastní hodnoty matice \mathbf{B} jsou nezáporné,
3. $\mathbf{B} = \mathbf{C}^T\mathbf{C}$ pro nějakou matici \mathbf{C} hodnosti r .

Pro komplexní kvadratické formy platí stejné tvrzení, pouze transponovanou maticí \mathbf{C}^T je nutné nahradit komplexně transponovanou maticí \mathbf{C}^* .

Důkaz. $1 \Rightarrow 2$. Z vlastnosti 1. plyne $\mathbf{x}^T \mathbf{B} \mathbf{x} \geq 0$ pro každý vektor $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^{n \times 1}$. Speciálně to platí pro vlastní vektor \mathbf{x} matice \mathbf{B} odpovídající vlastnímu číslu $\lambda \in \sigma(\mathbf{B})$. Pro tento vlastní vektor platí

$$\lambda = \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{B} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{x}} = \frac{\|\mathbf{C} \mathbf{x}\|^2}{\|\mathbf{x}\|^2} \geq 0.$$

$2 \Rightarrow 3$. Protože matice \mathbf{B} je symetrická, tedy normální, proto unitárně ortogonalizovatelná, existují ortogonální matice \mathbf{P} a diagonální matice \mathbf{D} , pro které platí $\mathbf{B} = \mathbf{P} \mathbf{D} \mathbf{P}^T$. Na hlavní diagonále matice \mathbf{D} jsou vlastní čísla λ_i , $i = 1, 2, \dots, n$, matice \mathbf{B} , která jsou podle podmínky 2. nezáporná. Podobně jako v úvodu této kapitoly označíme $\mathbf{F} = \sqrt{\mathbf{D}}$ matici, která má na hlavní diagonále čísla $\sqrt{\lambda_i}$. Potom $\mathbf{B} = \mathbf{P} \mathbf{D} \mathbf{P}^T = \mathbf{P} \mathbf{F} \mathbf{F} \mathbf{P}^T = (\mathbf{F} \mathbf{P}^T)(\mathbf{F} \mathbf{P}^T) = \mathbf{C}^T \mathbf{C}$, kde $\mathbf{C} = \mathbf{F} \mathbf{P}^T$. Protože $r(\mathbf{B}) = r$, je také $r(\mathbf{D}) = r$. Proto má \mathbf{D} na hlavní diagonále právě r nenulových prvků. Proto také $\mathbf{F} = \sqrt{\mathbf{D}}$ má na hlavní diagonále právě r nenulových prvků, tj. $r(\mathbf{F}) = r$. Odtud vyplývá rovněž $r(\mathbf{C}) = r$, neboť součin nějaké matice s regulární maticí nemění hodnotu této matice.

$3 \Rightarrow 1$. Jestliže $\mathbf{B} = \mathbf{C}^T \mathbf{C}$ pro nějakou matici \mathbf{C} , pak pro každý vektor $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^{n \times 1}$ platí

$$\mathbf{x}^T \mathbf{B} \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{C}^T \mathbf{C} \mathbf{x} = (\mathbf{C} \mathbf{x})^T (\mathbf{C} \mathbf{x}) = \|\mathbf{C} \mathbf{x}\|^2 \geq 0.$$

□

Diagonalizace kvadratické formy

O kvadratické formě $f(x_1, \dots, x_n) = \mathbf{x}^T \mathbf{D} \mathbf{x}$ říkáme, že je v *diagonálním tvaru*, pokud je $\mathbf{D} = (d_{ij})$ diagonální matice. V tom případě

$$f(x_1, \dots, x_n) = \mathbf{x}^T \mathbf{D} \mathbf{x} = \sum_{i=1}^n d_{ii} x_i^2.$$

Je-li nyní $f(x_1, \dots, x_n) = \mathbf{x}^T \mathbf{B} \mathbf{x}$ libovolná reálná kvadratická forma v n proměnných, pak je matice \mathbf{B} reálná symetrická matice. Najdeme ortogonální matici \mathbf{P} a diagonální matici \mathbf{D} , pro které platí $\mathbf{B} = \mathbf{P} \mathbf{D} \mathbf{P}^T$. Označíme $\mathbf{y} = \mathbf{P}^T \mathbf{x}$, tj. $\mathbf{x} = \mathbf{P} \mathbf{y}$. Potom platí

$$f(x_1, \dots, x_n) = \mathbf{x}^T \mathbf{B} \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{D} \mathbf{P}^T \mathbf{x} = \mathbf{y}^T \mathbf{D} \mathbf{y} = \sum_{i=1}^n d_{ii} y_i^2.$$

Poslední výpočet ukazuje, že pokud nahradíme souřadnice (x_1, \dots, x_n) každého vektoru $(x_1, \dots, x_n)^T \in \mathcal{R}^{n \times 1}$, které jsou souřadnicemi vzhledem ke standardní bázi, jeho souřadnicemi (y_1, \dots, y_n) vzhledem k bázi $\mathbf{P}_{*1}, \dots, \mathbf{P}_{*n}$, pak je kvadratická forma $f(y_1, \dots, y_n)$ v diagonálním tvaru. Tato diagonalizace rovněž ukazuje, že vlastnosti kvadratické formy $f(x_1, \dots, x_n) = \mathbf{x}^T \mathbf{B} \mathbf{x}$ závisí pouze na vlastních číslech matice \mathbf{B} – reálné symetrické matice této formy.

Příklad 12.5 Najděte bázi prostoru \mathcal{R}^2 , vzhledem ke které je kvadratická forma

$$f(x_1, x_2) = 13x_1^2 + 10x_1x_2 + 13x_2^2$$

v diagonálním tvaru.

Řešení. Matice kvadratické formy $f(x_1, x_2) = 13x_1^2 + 10x_1x_2 + 13x_2^2$ se rovná

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 13 & 5 \\ 5 & 13 \end{pmatrix}.$$

Charakteristická rovnice této matice

$$(13 - \lambda)(13 - \lambda) - 25 = (13 - \lambda - 5)(13 - \lambda + 5) = (8 - \lambda)(18 - \lambda) = 0$$

má tedy kořeny $\lambda_1 = 8$ a $\lambda_2 = 18$.

Vlastní vektory příslušné vlastnímu číslu $\lambda_1 = 8$ jsou řešením homogenní soustavy rovnic s maticí

$$\begin{pmatrix} 13 - \lambda_1 & 5 \\ 5 & 13 - \lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

Její řešení jsou tvaru $(a, -a)$ pro $a \in \mathbf{R}$, zvolíme vlastní vektor, který má délku 1, například $(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$.

Vlastní vektory příslušné vlastnímu číslu $\lambda_2 = 18$ najdeme jako řešení homogenní soustavy rovnic s maticí

$$\begin{pmatrix} 13 - \lambda_2 & 5 \\ 5 & 13 - \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 5 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}.$$

Řešením této soustavy jsou všechny vektory tvaru (a, a) pro $a \in \mathbf{R}$. Zvolíme vlastní vektor, který má délku 1, např. $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$.

Pro matici

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

potom platí

$$\mathbf{P}^T \mathbf{B} \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 18 \end{pmatrix}.$$

Hledanou bázi prostoru \mathcal{R}^2 je proto báze $(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)^T, (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)^T$. Má-li vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T \in \mathcal{R}^2$ vzhledem k této bázi souřadnice (y_1, y_2) , pak

$$f(y_1, y_2) = 8y_1^2 + 18y_2^2.$$

□

Cvičení 12.1 *Převeďte několik kvadratických forem ve dvou nebo ve třech proměnných do diagonálního tvaru. Najděte příslušné báze prostorů \mathcal{R}^2 a \mathcal{R}^3 .*

Rovnice elipsy a hyperboly v rovině mají tvar

$$f(x_1, x_2) = c,$$

kde $a \in \mathbf{R}$. Například

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1$$

je rovnice elipsy, zatímco

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 1$$

je rovnice hyperboly. Tyto rovnice odpovídají situaci, kdy souřadné osy v rovině jsou ve směru hlavní a vedlejší poloosy příslušné elipsy nebo hyperboly.

Tak například kvadratická forma $f(x_1, x_2) = 13x_1^2 + 10x_1x_2 + 13x_2^2$, kterou jsme se několikrát zabývali v této kapitole, určuje elipsu nebo hyperbolu, pokud ji položíme rovnou nějakému reálnému číslu, například

$$13x_1^2 + 10x_1x_2 + 13x_2^2 = 72.$$

Vzhledem k bázi $(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)^T, (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)^T$ má stejná kvadratická forma vyjádření

$$8y_1^2 + 18y_2^2 = 72,$$

tj.

$$\frac{y_1^2}{9} + \frac{y_2^2}{4} = 1.$$

Jde tedy o rovnici elipsy, hlavní poloosa má délku 3 je ve směru vektoru $(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)^T$, zatímco vedlejší poloosa má délku 2 a je ve směru vektoru $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)^T$.

Cvičení 12.2 Položte několik reálných kvadratických forem o dvou proměnných rovných nějaké konstantě a zjistěte, zdali příslušná rovnice vyjadřuje elipsu, hyperbolu nebo je množina řešení prázdná. Pokud jde o elipsu nebo hyperbolu, určete směr hlavních poloos a jejich délky.

Ke zjištění, zdali z dané kvadratické formy dostaneme rovnici elipsy nebo hyperboly, nemusíme hledat vlastní vektory matice \mathbf{B} této formy. Nejdříve si vyjasníme, jak se změní matice kvadratické formy v n proměnných, pokud změníme bázi v prostoru $\mathcal{R}^{n \times 1}$.

Tvrzení 12.6 Předpokládáme, že $f(x_1, \dots, x_n)$ je reálná kvadratická forma v n proměnných a \mathbf{B} její matice. Je-li \mathbf{P} regulární matice řádu n a $\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{y}$ pro libovolný vektor $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)^T \in \mathcal{R}^{n \times 1}$, pak matice téže kvadratické formy f vzhledem k bázi $\mathbf{P}_{*1}, \dots, \mathbf{P}_{*n}$ se rovná $\mathbf{P}^T \mathbf{B} \mathbf{P}$.

Důkaz. Platí

$$f(x_1, \dots, x_n) = \mathbf{x}^T \mathbf{B} \mathbf{x} = \mathbf{y}^T \mathbf{P}^T \mathbf{B} \mathbf{P} \mathbf{y},$$

matice formy $f(x_1, \dots, x_n)$ vzhledem k bázi $\mathbf{P}_{*1}, \dots, \mathbf{P}_{*n}$ se proto rovná $\mathbf{P}^T \mathbf{B} \mathbf{P}$. \square

Všimněte si, že matice $\mathbf{P} = (a_{ij})$ je matice přechodu od standardní báze $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ k bázi $\mathbf{P}_{*1}, \dots, \mathbf{P}_{*n}$. Skutečně,

$$\mathbf{P}_{*j} = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj})^T = \sum_{i=1}^n a_{ij} \mathbf{e}_i,$$

matice \mathbf{P} je tak maticí identického zobrazení na prostoru $\mathcal{R}^{n \times 1}$ vzhledem k bázím $\mathbf{P}_{*1}, \dots, \mathbf{P}_{*n}$ a standardní bázi $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$. Tuto matici podle Definice 7.12 nazýváme matice přechodu od báze $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ k bázi $\mathbf{P}_{*1}, \dots, \mathbf{P}_{*n}$.

Poslední tvrzení tak říká, jak dostat postupně matici kvadratické formy vzhledem k jiným bázím, pokud nepožadujeme, aby nová báze byla ortonormální. Regulární matici \mathbf{P} vyjádříme jako součin elementárních matic $\mathbf{P} = \mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2 \cdots \mathbf{E}_k$. Potom

$$\mathbf{P}^T \mathbf{B} \mathbf{P} = \mathbf{E}_k^T \cdots \mathbf{E}_2^T \mathbf{E}_1^T \mathbf{B} \mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2 \cdots \mathbf{E}_k.$$

Součin $\mathbf{E}^T \mathbf{B} \mathbf{E}$, kde \mathbf{E} je nějaká elementární matice, dostaneme z matice \mathbf{B} tak, že provedeme *stejnou* elementární řádkovou a sloupcovou úpravu matice \mathbf{B} . Hledáme-li vyjádření kvadratické formy v diagonálním tvaru, můžeme proto postupovat tak, že postupně děláme stejné elementární řádkové a sloupcové úpravy matice příslušné kvadratické formy.

Protože pro každou kvadratickou formu $f(x_1, \dots, x_n)$ s maticí \mathbf{B} existuje ortogonální (a tedy nutně regulární) matice \mathbf{P} , pro kterou platí $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{P} = \mathbf{P}^T\mathbf{B}\mathbf{P}$, platí následující tvrzení.

Tvrzení 12.7 Pro každou reálnou kvadratickou formu $f(x_1, \dots, x_n)$ v n proměnných s maticí \mathbf{B} existuje báze $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ prostoru $\mathcal{R}^{n \times 1}$, vzhledem ke které má kvadratická forma $f(x_1, \dots, x_n)$ diagonální matici $\mathbf{D} = (d_{ij})$, tj. platí

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n d_{ii}y_i^2,$$

kde (y_1, \dots, y_n) jsou souřadnice vektoru $(x_1, \dots, x_n)^T$ vzhledem k nové bázi $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$.

Protože při diagonalizaci popsané v předchozím tvrzení, můžeme používat libovolné regulární matice, můžeme dokázat následující důsledek.

Důsledek 12.8 Pro každou reálnou kvadratickou formu $f(x_1, \dots, x_n)$ v n proměnných s maticí \mathbf{B} existuje báze $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ prostoru $\mathcal{R}^{n \times 1}$, vzhledem ke které má kvadratická forma $f(x_1, \dots, x_n)$ diagonální matici $\mathbf{E} = (e_{ij})$, kde $e_{ii} = \pm 1$ nebo $e_{ii} = 0$ pro libovolné $i = 1, \dots, n$.

Důkaz. Pokud je $\mathbf{C} = (c_{ij})$ regulární diagonální matice a $\mathbf{D} = (d_{ij})$ je diagonální matice ze znění Tvrzení 12.7, pak platí, že prvek na místě (i, i) v součinu $\mathbf{C}^T\mathbf{D}\mathbf{C}$ se rovná $c_{ii}^2 d_{ii}$. Stačí proto zvolit

$$c_{ii} = \frac{1}{\sqrt{|d_{ii}|}},$$

pokud $d_{ii} \neq 0$ a

$$c_{ii} = 1,$$

pokud $d_{ii} = 0$. Potom matice $\mathbf{E} = \mathbf{C}^T\mathbf{D}\mathbf{C}$ má požadované vlastnosti. \square

V Tvrzení 12.7 a Důsledku 12.8 používáme k diagonalizaci (symetrické) matice \mathbf{B} kvadratické formy obecné regulární matice, nikoliv pouze ortogonální matice, jako ve Větě 11.21. V případě unitární diagonalizace jsou prvky na hlavní diagonále diagonální matice \mathbf{D} vlastní čísla matice \mathbf{B} a jsou tedy jednoznačně určené (až na pořadí) maticí \mathbf{B} . Tvrzení 12.7 a Důsledek 12.8 naopak ukazují, že při diagonalizaci matic kvadratických forem nejsou prvky na hlavní diagonále určeny jednoznačně. Následující *Věta o setrvačnosti kvadratických forem* dokazuje, že pokud požadujeme, aby na hlavní diagonále diagonální matice kvadratické formy byla pouze čísla 0, 1 a -1 , jsou tyto prvky určeny, až na pořadí, jednoznačně.

Věta 12.9 Předpokládáme, že kvadratická forma $f(x_1, \dots, x_n)$ v n proměnných má matici \mathbf{B} hodnosti r . Pokud má vzhledem k bázi $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ diagonální tvar

$$f(x_1, \dots, x_n) = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_p^2 - a_{p+1}^2 - \dots - a_{p+q}^2,$$

kde

$$\sum_{i=1}^n x_i \mathbf{e}_i = \mathbf{x} = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{u}_i,$$

a vzhledem k bázi $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ diagonální tvar

$$f(x_1, \dots, x_n) = b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_s^2 - b_{s+1}^2 - \dots - b_{s+t}^2,$$

kde

$$\sum_{i=1}^n x_i \mathbf{e}_i = \mathbf{x} = \sum_{i=1}^n b_i \mathbf{v}_i,$$

pak $p = s$ a $q = t$.

Důkaz. Především platí, že $p + q = r(\mathbf{B}) = s + t$. Předpokládejme, že $r > s$. Podprostor (lineární obal)

$$\mathcal{P} = \mathcal{L}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p)$$

má dimenzi p a podprostor

$$\mathcal{Q} = \mathcal{L}(\mathbf{v}_{s+1}, \dots, \mathbf{v}_n)$$

má dimenzi $n - s$. Protože $p + n - s > n$, platí podle Tvzení 6.22

$$\dim(\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}) = \dim \mathcal{P} + \dim \mathcal{Q} - \dim(\mathcal{P} + \mathcal{Q}) = p + (n - s) - n > 0.$$

Existuje tedy vektor $\mathbf{x} \in \mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$. Pro tento vektor máme trojí vyjádření

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^p a_i \mathbf{u}_i = \sum_{j=s+1}^n b_j \mathbf{v}_j = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{e}_i.$$

Potom platí, že

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^p a_i^2 > 0$$

a současně

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=s+1}^n -b_j^2 \leq 0.$$

Tento spor ukazuje, že ve skutečnosti musí platit $p \leq s$. Zaměníme-li báze $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ a $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$, dostaneme také opačnou nerovnost $s \leq p$. Proto $p = s$ a tedy také $q = t$. \square

Geometrický význam singulárních hodnot

Ukážeme si také slíbený geometrický význam singulárních hodnot reálné čtvercové matice \mathbf{A} řádu n . Připomeňme si, že singulární hodnoty takové matice \mathbf{A} jsou hodnoty na hlavní diagonále diagonální matice $\mathbf{D}_{r \times r}$ v rozkladu

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \begin{pmatrix} \mathbf{D}_{r \times r} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \mathbf{V}^T,$$

kde \mathbf{U} a \mathbf{V} jsou ortogonální matice řádu n a $\mathbf{D}_{r \times r}$ je diagonální matice řádu $r = \text{rank}(\mathbf{A})$. Viz Věta 10.25. Protože je bloková matice v tomto rozkladu rovněž čtvercová, můžeme rozklad psát prostě $\mathbf{A} = \mathbf{UDV}^T$, kde \mathbf{D} je čtvercová diagonální matice řádu n . Budeme pro jednoduchost navíc předpokládat, že matice \mathbf{A} má plnou hodnotu, tj. že $\text{rank}(\mathbf{A}) = n$. V tom případě jsou všechny prvky na hlavní diagonále matice \mathbf{D} kladná reálná čísla, označovali jsme je σ_i , $i = 1, 2, \dots, n$. Z rovnosti $\mathbf{A} = \mathbf{UDV}^T$ vyplývá rovněž $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{VD}^{-1}\mathbf{U}^T$. Můžeme také předpokládat, že

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n > 0.$$

Podíváme se, jak matice \mathbf{A} zobrazí jednotkovou sféru v prostoru $\mathbf{R}^{n \times 1}$, tj. množinu

$$\mathcal{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^{n \times 1} : \|\mathbf{x}\| = 1\}.$$

V jejím obrazu leží vektory tvaru $\mathbf{y} = \mathbf{Ax}$ pro $\mathbf{x} \in \mathcal{S}$. Označíme si $\mathbf{w} = \mathbf{U}^T \mathbf{y}$. Potom platí

$$\begin{aligned} 1 &= \|\mathbf{x}\|^2 = \|\mathbf{A}^{-1} \mathbf{Ax}\|^2 = \|\mathbf{A}^{-1} \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{VD}^{-1} \mathbf{U}^T \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{D}^{-1} \mathbf{U}^T \mathbf{y}\|^2 = \\ &= \|\mathbf{D}^{-1} \mathbf{w}\|^2 = \frac{w_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{w_2^2}{\sigma_2^2} + \dots + \frac{w_n^2}{\sigma_n^2}. \end{aligned}$$

V tomto výpočtu $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n)^T$ jsou souřadnice vektoru \mathbf{w} vzhledem ke standardní bázi.

Vektory $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n)^T$, které vyhovují rovnici

$$1 = \frac{w_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{w_2^2}{\sigma_2^2} + \dots + \frac{w_n^2}{\sigma_n^2},$$

tvoří *zobecněný elipsoid*. Poslední výpočet tak říká, že množina všech vektorů

$$\mathbf{U}^T \mathbf{A}(\mathcal{S}) = \{\mathbf{U}^T \mathbf{A}\mathbf{x} : \|\mathbf{x}\| = 1\}$$

tvoří zobecněný elipsoid, jehož k -tá poloosa je ve směru vektoru \mathbf{e}_k standardní báze a má délku σ_k . Protože \mathbf{U} je ortogonální matice, součin s \mathbf{U}^T nemění délku vektorů $\mathbf{A}\mathbf{x}$, pouze jejich orientaci. To znamená, že také množina bodů $\mathbf{A}(\mathcal{S}) = \{\mathbf{A}\mathbf{x} : \|\mathbf{x}\| = 1\}$ je rovněž zobecněný elipsoid, jehož k -tá poloosa má délku σ_k . Protože zobrazení určené maticí \mathbf{U} zobrazuje zobecněný elipsoid $\mathbf{U}^T \mathbf{A}(\mathcal{S})$ do zobecněného elipsoidu $\mathbf{A}(\mathcal{S})$ a zachovává délky vektorů, jsou hlavní poloosy elipsoidu $\mathbf{A}(\mathcal{S})$ ve směru vektorů $\mathbf{U}\mathbf{e}_k = \mathbf{U}_{*k}$. Sloupce matice \mathbf{U} jsou tak směry poloos elipsoidu $\mathbf{A}(\mathcal{S})$.

Kromě toho platí $\mathbf{A}\mathbf{V} = \mathbf{U}\mathbf{D}$, tj. $\mathbf{A}\mathbf{V}_{*k} = \sigma_k \mathbf{U}_{*k}$. To znamená, že sloupce matice \mathbf{V} určují body na jednotkové sféře \mathcal{S} , které se zobrazují do koncových bodů poloos zobecněného elipsoidu $\mathbf{A}(\mathcal{S})$.