

Kapitola 1

Lineární rovnice a jejich soustavy

Úloha 1.1 Najděte kvadratickou funkci $ax^2 + bx + c = y$, jejíž graf prochází body $(0, 3)$, $(1, 2)$ a $(2, 3)$.

Řešení. Tři uvedené body musí vyhovovat rovnici $y = ax^2 + bx + c$. Musí proto platit

$$a \cdot 0 + b \cdot 0 + c = 3,$$

$$a \cdot 1 + b \cdot 1 + c = 2,$$

$$a \cdot 4 + b \cdot 2 + c = 3.$$

Neznámé koeficienty a, b, c tak najdeme jako řešení soustavy tří lineárních rovnic o třech neznámých

$$0 \cdot a + 0 \cdot b + 1 \cdot c = 3,$$

$$1 \cdot a + 1 \cdot b + 1 \cdot c = 2,$$

$$4 \cdot a + 2 \cdot b + 1 \cdot c = 3.$$

První rovnice určuje koeficient $c = 3$ a po dosazení do zbývajících dvou rovnic dostaneme

$$1a + 1b = -1,$$

$$4a + 2b = 0.$$

Odečtením čtyřnásobku druhé rovnice od třetí dostaneme

$$-2b = 4,$$

tj. $b = -2$ a dosazením do druhé rovnice najdeme $a = 1$. Hledaná kvadratická funkce se rovná

$$y = x^2 - 2x + 3.$$

□

Rovnice, které jsme řešili, se nazývají *lineární*, protože obsahují pouze první mocniny neznámých a neobsahují ani žádný součin neznámých. Rovnice $2x^2 = 3$, $x + \frac{1}{y} = 2$ nebo $x + xy = 5z$ *nejsou* lineární.

Při řešení jiných úloh sestavíme soustavu rovnic, která na první pohled není lineární. Při jejím řešení ale nakonec k soustavě lineárních rovnic dospějeme.

Úloha 1.2 Najděte střed kružnice, která prochází body (x_1, y_1) , (x_2, y_2) a (x_3, y_3) .

Řešení. Obecná rovnice kružnice v kartézských souřadnicích je

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = c^2,$$

kde (a, b) jsou souřadnice středu kružnice a $c > 0$ je její poloměr. Dosadíme-li do této rovnice souřadnice bodů (x_1, y_1) , (x_2, y_2) a (x_3, y_3) , dostaneme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} (x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 &= c^2, \\ (x_2 - a)^2 + (y_2 - b)^2 &= c^2, \\ (x_3 - a)^2 + (y_3 - b)^2 &= c^2. \end{aligned}$$

Po roznásobení dostaneme pro neznámé a, b, c rovnice

$$\begin{aligned} x_1^2 - 2x_1a + a^2 + y_1^2 - 2y_1b + b^2 &= c^2, \\ x_2^2 - 2x_2a + a^2 + y_2^2 - 2y_2b + b^2 &= c^2, \\ x_3^2 - 2x_3a + a^2 + y_3^2 - 2y_3b + b^2 &= c^2. \end{aligned}$$

Toto není soustava lineárních rovnic, nicméně výpočet souřadnic (a, b) středu hledané kružnice můžeme převést na řešení soustavy dvou lineárních rovnic o dvou neznámých tím, že postupně odečteme druhou rovnici od první a potom třetí rovnici od druhé. Dostaneme tak soustavu

$$\begin{aligned} x_1^2 - x_2^2 - 2(x_1 - x_2)a + y_1^2 - y_2^2 - 2(y_1 - y_2)b &= 0, \\ x_2^2 - x_3^2 - 2(x_2 - x_3)a + y_2^2 - y_3^2 - 2(y_2 - y_3)b &= 0, \\ x_3^2 - 2x_3a + a^2 + y_3^2 - 2y_3b + b^2 &= c^2. \end{aligned}$$

První dvě rovnice tvoří soustavu dvou lineárních rovnic o dvou neznámých a, b . Jejím řešením najdeme souřadnice (a, b) středu hledané kružnice. \square

Úlohu 1.2 můžeme také řešit geometricky. Pokud jsou všechny tři body (x_1, y_1) , (x_2, y_2) a (x_3, y_3) různé, sestrojíme napřed osu úsečky spojující první dva body, a poté osu úsečky spojující druhý a třetí bod. Pokud se tyto osy protnou, jejich průsečík je středem hledané kružnice a úloha má v tomto případě jediné řešení. To nastane právě když tři dané body neleží na jedné přímce. Pokud leží na jedné přímce (a jsou navzájem různé), osy se neprotnou a úloha nemá žádné řešení. Pokud se aspoň dva body rovnají, má úloha nekonečně mnoho řešení.

Intuitivně ale cítíme, že úloha má “méně” řešení, pokud se rovnají pouze dva z daných bodů a třetí je od nich různý, než když jsou si všechny tři body rovné. V prvním případě středy hledaných kružnic leží na ose úsečky spojující dvojici různých daných bodů a každý bod této přímky určuje právě jednu kružnici, která je řešením naší úlohy. V případě rovnosti všech tří bodů je každý bod roviny různý od daného bodu středem právě jedné kružnice řešící naší úlohu. Pokud bod považujeme za *degenerovanou* kružnici s poloměrem 0, pak je *každý* bod roviny středem právě jedné kružnice, která je řešením úlohy. Můžeme tak říct, že v případě rovnosti dvou daných bodů má množina všech řešení úlohy dimenzi 1, v případě rovnosti všech tří bodů má dimenzi 2. Pokud jsou všechny tři body navzájem různé, má množina všech řešení úlohy buď dimenzi 0 (neleží-li body na přímce) nebo je úloha neřešitelná (pokud na přímce leží).

Těmto geometrickým úvahám by také mělo odpovídat algebraické řešení úlohy. Soustava

$$\begin{aligned}x_1^2 - x_2^2 - 2(x_1 - x_2)a + y_1^2 - y_2^2 - 2(y_1 - y_2)b &= 0, \\x_2^2 - x_3^2 - 2(x_2 - x_3)a + y_2^2 - y_3^2 - 2(y_2 - y_3)b &= 0,\end{aligned}$$

jejíž řešení udává souřadnice (a, b) středu hledané kružnice, by měla mít buď jedno řešení, nebo žádné, nebo nekonečně mnoho. Má-li jich nekonečně mnoho, pak v jednom případě tvoří množina všech řešení přímku v rovině, ve druhém celou rovinu.

Cvičení 1.1 *Ověřte si to konkrétní volbou bodů $(x_1, y_1) = (1, 2)$, $(x_2, y_2) = (2, 3)$ a $(x_3, y_3) = (-1, 1)$. Zkuste rovněž body $(x_1, y_1) = (0, 1)$, $(x_2, y_2) = (1, 0)$ a $(x_3, y_3) = (-1, 2)$.*

Co se stane, máme-li najít kružnici, která prochází různými body (x_1, y_1) , $(x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ pro $n > 3$? Každá trojice různých bodů určí jednoznačně nějakou kružnici, která tyto tři body obsahuje. Pro různé výběry tří bodů mohou být tyto kružnice různé a v naprosté většině případů také skutečně různé budou. Existuje ale jednoznačně určená kružnice, která je v jistém dobře definovaném smyslu “nejblíže” k zadaným bodům. Úlohu, jak tuto kružnici najít, řešili astronomové na počátku 19. století. Dne 1. ledna 1801 objevil astronom Giuseppe Piazzi v souhvězdí Býka “novou hvězdu”. Další pozorování ukázala, že se “hvězda” pohybuje, a byla proto považována za nově objevenou planetu. V polovině února Piazzi onemocněl a později ji už znovu nenašel, nová “planeta” se skryla za sluncem a na podzim téhož roku se ji už nepodařilo na obloze znovu nalézt.

Astronomové se snažili z naměřených poloh vypočítat kružnici, po které se “planeta” měla podle jejich předpokladů pohybovat. Nepodařilo se jim ji ale na noční obloze znovu objevit. Slavný německý matematik Carl Friedrich Gauss (1777-1855) zkusil vypočítat eliptickou dráhu, která naměřeným polohám “planety” nejlépe odpovídala. K jejímu výpočtu vytvořil metodu *nejmenších čtverců*. Na základě svých výpočtů určil v prosinci 1801 polohu ztracené “planety” a předpověděl její další pohyb. “Planeta”, ve skutečnosti planetka Ceres, byla na Gaussem předpovězeném místě skutečně znovuobjevena. O metodě nejmenších čtverců si více řekneme později.

Jedna lineární rovnice o dvou neznámých

$$ax + by = c$$

je rovnicí přímky v rovině za předpokladu, že oba koeficienty a, b nejsou současně rovné 0. Znamená to, že množina všech řešení této rovnice, tj. množina všech uspořádaných dvojic reálných čísel, které této rovnici vyhovují, tvoří přímku v rovině. Z této rovnice ale bezprostředně nepoznáme, jakými body přímka všech řešení prochází. Tutéž přímku můžeme také vyjádřit parametricky ve tvaru

$$\{\mathbf{u} + t\mathbf{v} : t \in \mathbf{R}\},$$

kde $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ a $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ jsou vhodné (dvoudimenzionální) vektory a \mathbf{R} označuje množinu všech reálných čísel. Vektor \mathbf{u} určuje jeden bod přímky (při volbě parametru $t = 0$) a vektor \mathbf{v} určuje směr této přímky.

Cvičení 1.2 Najděte pro nějaká konkrétní čísla a, b, c , např. pro $a = 2$, $b = 3$ a $c = -1$, parametrické vyjádření přímky určené rovnicí $ax + by = c$.

Podobně lineární rovnice o třech neznámých

$$ax + by + cz = d$$

je rovnicí roviny v prostoru, pokud nejsou všechny tři koeficienty a, b, c současně rovné 0. To znamená, že množina všech uspořádaných trojic reálných čísel (x, y, z) , které vyhovují poslední rovnici, tvoří rovinu v třídimenzionálním prostoru. Každá rovina má také parametrické vyjádření ve tvaru

$$\{\mathbf{u} + r\mathbf{v} + s\mathbf{w} : r, s \in \mathbf{R}\},$$

kde $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ a $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$ jsou vhodné (třídimenzionální) vektory.

Cvičení 1.3 Najděte pro nějaká konkrétní čísla a, b, c, d , např. pro $a = 2$, $b = -1$, $c = 3$, $d = -2$, parametrické vyjádření roviny popsané rovnicí $ax + by + cz = d$.

Cvičení 1.4 Jsou-li

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2, \end{aligned}$$

rovnice dvou rovin v prostoru, najděte podmínku, jakou musí splňovat koeficienty a_1, b_1, c_1, d_1 a a_2, b_2, c_2, d_2 , aby roviny byly různé. Jakou podmínku musí navíc splňovat, aby obě roviny nebyly rovnoběžné? Pokud koeficienty splňují obě tyto podmínky, množina bodů (x, y, z) , které vyhovují oběma rovnicím současně, tvoří přímku v třídimenzionálním prostoru, která je průnikem obou rovin. Zkuste najít parametrické vyjádření této přímky ve tvaru

$$\{\mathbf{u} + t\mathbf{v} : t \in \mathbf{R}\},$$

kde $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ a $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ jsou vhodné (třídimenzionální) vektory.

Pro parametrická vyjádření přímek a rovin potřebujeme umět počítat s vektory. Musíme je umět sčítat a násobit reálným číslem.

Definice 1.1 Reálný vektor dimenze n je uspořádaná n -tice reálných čísel (x_1, x_2, \dots, x_n) . Pro $i = 1, 2, \dots, n$ číslo x_i nazýváme i -tá souřadnice vektoru \mathbf{x} . Vektor $(0, 0, \dots, 0)$ nazýváme nulový vektor dimenze n a označujeme jej symbolem $\mathbf{0}$. Vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ je nenulový, pokud pro aspoň jednu souřadnici vektoru \mathbf{x} platí $x_i \neq 0$.

Jsou-li (x_1, x_2, \dots, x_n) a (y_1, y_2, \dots, y_n) dva reálné vektory dimenze n , pak jejich součtem rozumíme vektor

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n).$$

Je-li $a \in \mathbf{R}$ reálné číslo, pak součinem čísla a a vektoru (x_1, x_2, \dots, x_n) rozumíme vektor

$$a \cdot (x_1, x_2, \dots, x_n) = (ax_1, ax_2, \dots, ax_n).$$

Množinu všech reálných vektorů dimenze n spolu s právě definovanými operacemi sčítání vektorů a násobení vektoru reálným číslem nazýváme aritmetický reálný vektorový prostor dimenze n . Označovat jej budeme \mathbf{R}^n .

Součet dvou reálných vektorů dimenze n je tedy opět reálný vektor dimenze n . Podobně součin reálného čísla a reálného vektoru dimenze n je opět reálný vektor dimenze n . Všimněte si, že jsme definovali pouze součin reálného čísla s reálným vektorem, nikoliv součin dvou reálných vektorů.

Příklad 1.2 Součet vektorů $\mathbf{a} = (1, 2, 3, 4) \in \mathbf{R}^4$ a $\mathbf{b} = (-1, 2, -1, 3) \in \mathbf{R}^4$ je vektor

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (1 + (-1), 2 + 2, 3 + (-1), 4 + 3) = (0, 4, 2, 7).$$

Podobně součin reálného čísla 2 a vektoru \mathbf{a} se rovná vektoru

$$2 \cdot \mathbf{a} = (2 \cdot 1, 2 \cdot 2, 2 \cdot 3, 2 \cdot 4) = (2, 4, 6, 8).$$

Vektory zapisujeme buď řádkově jako v Definicí 1.1 nebo sloupcově ve tvaru

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Abychom ušetřili místo, budeme sloupcové vektory zapisovat také

$$(x_1, x_2, \dots, x_n)^T.$$

Od řádkového zápisu se liší exponentem T , kde písmeno T je zkratkou slova *transponovaný*.

Soustavou m lineárních rovnic o n neznámých s reálnými koeficienty rozumíme soustavu rovnic tvaru

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m. \end{aligned}$$

Reálná čísla a_{ij} nazýváme *koeficienty* soustavy, reálný sloupcový vektor $(b_1, b_2, \dots, b_m)^T$ dimenze m nazýváme *vektor pravých stran*. Hledané řešení soustavy je neznámý vektor $(x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbf{R}^n$. Poloha koeficientu a_{ij} je určena indexy i, j . První index i určuje rovnici, druhý index j pak neznámou, u které je koeficient a_{ij} . Koeficienty a_{ij} tvoří dvoudimenzionální systém čísel, pro který si zavedeme zvláštní název.

Definice 1.3 Reálná matice typu $m \times n$ je soubor $m \times n$ reálných čísel a_{ij} , kde index i hodnoty $i = 1, 2, \dots, m$ a index j nabývá hodnoty $j = 1, 2, \dots, n$. Matice zapisujeme takto:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Matici také budeme zapisovat stručně $\mathbf{A} = (a_{ij})$. První index u prvku a_{ij} je řádkový index, druhý index je sloupcový index. Říkáme také, že prvek a_{ij} je na místě (i, j) matice \mathbf{A} . Vektor $(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}) \in \mathbf{R}^n$ nazýváme i -tý řádkový vektor nebo jenom stručně i -tý řádek matice \mathbf{A} a budeme jej označovat \mathbf{A}_{i*} . Podobně $\mathbf{A}_{*j} = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj})^T \in \mathbf{R}^m$ je j -tý sloupcový vektor (sloupec) matice \mathbf{A} .

Pokud platí $m = n$, pak říkáme, že \mathbf{A} je čtvercová matice řádu n .

Je-li dána soustava m lineárních rovnic o n neznámých s reálnými koeficienty

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m, \end{aligned}$$

pak reálnou maticí

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

nazýváme matice soustavy a maticí

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix},$$

kde jsme přidali sloupec pravých stran, nazýváme rozšířená matice této soustavy.

Reálný sloupcový vektor dimenze n můžeme považovat také za matici typu $n \times 1$. Řádkový n -dimenzionální vektor je matice typu $1 \times n$. Až se naučíme násobit matice, budeme moci zapisovat soustavu m lineárních rovnic o n neznámých jednoduše ve tvaru

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b},$$

kde \mathbf{A} je matice této soustavy, $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ neznámý vektor a $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^m$ je vektor pravých stran.

Při řešení úlohy 1.1 a úlohy 1.2 jsme používali úpravy, které nemění množinu řešení soustavy. Takovým úpravám soustavy rovnic říkáme *ekvivalentní úpravy*. Ukazuje se, že při řešení soustav lineárních rovnic vystačíme s úpravami tří typů:

1. prohození dvou rovnic,
2. vynásobení i -té rovnice *nenulovým* reálným číslem t ,
3. přičtení t -násobku i -té rovnice k j -té rovnici, pokud $i \neq j$.

Těmto úpravám říkáme *elementární úpravy*. Elementární úpravy jsou *vratné*, tj. z nové soustavy můžeme rekonstruovat původní soustavu pomocí nějaké další elementární úpravy (jaké?). První elementární úpravu také může vytvořit vhodnou posloupností elementárních úprav druhých dvou typů.

Tvrzení 1.4 *Elementární úpravy soustavy lineárních rovnic nemění množinu všech řešení soustavy.*

Důkaz. Označíme S množinu všech vektorů $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, které jsou řešením (vyhovují všem rovnicím) soustavy

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m. \end{aligned}$$

Symbolem R označíme množinu všech vektorů $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, které jsou řešením soustavy, kterou dostaneme z původní soustavy nějakou elementární úpravou.

Probereme postupně všechny tři elementární úpravy a dokážeme, že v každém případě platí $S \subseteq R$, tj. že každé řešení původní soustavy je také řešením nové soustavy, kterou dostaneme z této soustavy nějakou elementární úpravou.

Je-li $(x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in S$, pak rovněž $(x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in R$, protože nová soustava obsahuje stejné rovnice jako původní soustava, liší se od ní pouze pořadím.

Pokud uděláme druhou elementární úpravu, pak z předpokladu, že vektor $(x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in S$ dostáváme

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i$$

a tedy také

$$ta_{i1}x_1 + ta_{i2}x_2 + \dots + ta_{in}x_n = tb_i.$$

Vektor \mathbf{x} tak vyhovuje rovněž i -té rovnici nové soustavy. Ostatní rovnice soustavy se nezměnily, vektor $(x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ je proto také řešením nové

soustavy. Tedy $(x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in R$ rovněž v případě druhé elementární úpravy.

V případě třetí elementární úpravy z předpokladu $(x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in S$ dostáváme

$$\begin{aligned} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n &= b_i, \\ a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \dots + a_{jn}x_n &= b_j, \end{aligned}$$

proto rovněž

$$\begin{aligned} t(a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n) &= tb_i, \\ a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \dots + a_{jn}x_n &= b_j. \end{aligned}$$

Sečtením obou rovností dostaneme

$$\begin{aligned} t(a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n) + (a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \dots + a_{jn}x_n) &= \\ (ta_{i1} + a_{j1})x_1 + (ta_{i2} + a_{j2})x_2 + \dots + (ta_{in} + a_{jn})x_n &= tb_i + b_j. \end{aligned}$$

Vektor $(x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ je proto také řešením j -té rovnice upravené soustavy. Ostatní rovnice nové soustavy patří rovněž do původní soustavy, proto je $(x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ řešením také těchto rovnic. I v případě třetí elementární úpravy tak platí že také $(x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in R$. Tím jsme dokázali inkluzi

$$S \subseteq R.$$

Protože původní soustavu dostaneme z nové soustavy také nějakou elementární úpravou, platí podle první části důkazu rovněž opačná inkluze

$$R \subseteq S.$$

Množiny všech řešení původní a nové soustavy se proto rovnají. \square

Cvičení 1.5 *Proč není ekvivalentní úpravou vynásobení nějaké rovnice číslem 0? Jaký je vztah mezi množinami všech řešení původní a nové soustavy v případě, že vynásobíme některou z rovnic číslem 0? Proč musíme při třetí elementární úpravě předpokládat $i \neq j$?*

Třem elementárním úpravám soustavy rovnic odpovídají *elementární řádkové úpravy* matice soustavy. Matici nové soustavy dostaneme z matice původní soustavy odpovídající úpravou matice:

1. prohozením dvou řádků matice,

2. vynásobením i -tého řádku matice *nenulovým* číslem,
3. přičtením t -násobku i -tého řádku k j -tému řádku, je-li $i \neq j$.

Podobně rozšířenou matici nové soustavy dostaneme z rozšířené matice původní soustavy pomocí odpovídající elementární řádkové úpravy. Řešení soustavy lineárních rovnic budeme hledat pomocí elementárních řádkových úprav rozšířené matice soustavy. Důsledkem tvrzení 1.4 je následující tvrzení.

Tvrzení 1.5 *Elementární řádkové úpravy rozšířené matice soustavy nemění množinu řešení soustavy.*