Kapitola 13

Kvadratické formy

Definice 13.1 Kvadratická forma *v n proměnných s koeficienty z tělesa* $\mathbf{T}$ *je výraz tvaru*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} a_{ij} x_i x_j,$$

kde koeficienty $a_{ij} \in \mathbf{T}$.

Kvadratická forma v n proměnných je tak polynom n proměnných s koeficienty z tělesa $\mathbf{T}$, jehož všechny monočleny jsou stupně 2. Například polynom

$$f(x_1, x_2) = 13x_1^2 + 10x_1x_2 + 13x_2^2$$

je kvadratická forma ve dvou proměnných.

Je-li charakteristika tělesa $\mathbf{T}$ různá od 2, můžeme kvadratickou formu vyjádřit pomocí násobení matic. Označíme $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ vektor proměnných a $\mathbf{B} = (b_{ij})$ čtvercovou matici řádu n, kde $b_{ii} = a_{ii}$ pro $i = 1, \ldots, n$ a $b_{ij} = a_{ij}/2$ pro dvojice $i < j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ a $b_{ji} = a_{ij}/2$ pro dvojice $i < j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Potom součin $\mathbf{x}^T\mathbf{B}\mathbf{x}$ je kvadratická forma v n proměnných. Koeficient u x_i^2 se rovná $b_{ii} = a_{ii}$ pro $i = 1, 2, \ldots n$. Koeficient u x_ix_j pro $i < j$ se rovná $b_{ij} + b_{ji} = a_{ij}$. Platí proto

$$\mathbf{x}^T\mathbf{B}\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} a_{ij} x_i x_j = f(x_1, \ldots, x_n).$$

Matici $\mathbf{B}$ nazýváme *matice kvadratické formy* $f(x_1, \ldots, x_n)$. Tato matice je symetrická. Kvadratická forma $f(x_1, x_2) = 13x_1^2 + 10x_1x_2 + 13x_2^2$ má tedy matici

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 13 & 5 \\ 5 & 13 \end{pmatrix}.$$

Pokud je kvadratická forma navíc reálná, je její matice $\mathbf{B}$ podle Cvičení 11.3 normální a podle Věty 11.21 je unitárně diagonalizovatelná. Existují tedy ortogonální matice $\mathbf{P}$ a diagonální matice $\mathbf{D} = (d_{ij})$, pro které platí $\mathbf{B} = \mathbf{PDP}^T$. Jsou-li všechna vlastní čísla $\lambda_i \in \sigma(\mathbf{B})$ (tj. všechny prvky na hlavní diagonále matice $\mathbf{D}$) nezáporná, můžeme je odmocnit a definovat matici $\sqrt{\mathbf{D}}$ jako matici, která má na místě (i,i) prvek $\sqrt{d_{ii}}$. Potom platí

$$\mathbf{B} = \mathbf{PDP}^T = P\sqrt{\mathbf{D}}\sqrt{\mathbf{D}}\mathbf{P}^T = \mathbf{C}^T\mathbf{C}, \quad \text{kde} \quad \mathbf{C} = \sqrt{\mathbf{D}}\mathbf{P}^T.$$

Jsou-li navíc všechna vlastní čísla matice $\mathbf{B}$ kladná, pak je matice $\mathbf{C}$ regulární.

Jestliže naopak můžeme reálnou symetrickou matici $\mathbf{B}$ vyjádřit ve tvaru $\mathbf{B} = \mathbf{C}^T\mathbf{C}$, pak pro každé vlastní číslo λ matice $\mathbf{B}$ a jemu odpovídající vlastní vektor $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ platí

$$\lambda = \frac{\mathbf{x}^T\mathbf{B}\mathbf{x}}{\mathbf{x}^T\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}^T\mathbf{C}^T\mathbf{C}\mathbf{x}}{\mathbf{x}^T\mathbf{x}} = \frac{\|\mathbf{C}\mathbf{x}\|^2}{\|\mathbf{x}^2\|} \geq 0.$$

Je-li navíc matice $\mathbf{C}$ (a tedy i $\mathbf{B}$) regulární, pak $\mathcal{N}(\mathbf{B}) = \{\mathbf{0}\}$, tj. $\mathbf{B}(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$ a $\lambda > 0$. Dokázali jsme tak následující tvrzení.

Tvrzení 13.2 *Reálná symetrická matice $\mathbf{B}$ má všechna vlastní čísla nezáporná právě když ji lze vyjádřit ve tvaru součinu $\mathbf{B} = \mathbf{C}^T\mathbf{C}$, kde $\mathbf{C}$ je také čtvercová matice řádu n. Reálná symetrická matice $\mathbf{B}$ má všechna vlastní čísla kladná, právě když ve vyjádření $\mathbf{B} = \mathbf{C}^T\mathbf{C}$ je matice $\mathbf{C}$ regulární.*

Definice 13.3 *Reálná kvadratická forma $f(x_1,\ldots,x_n) = \mathbf{x}^T\mathbf{B}\mathbf{x}$ se nazývá* pozitivně semidefinitní, *jestliže*

$$f(x_1,\ldots,x_n) \geq 0$$

pro libovolná reálná čísla $x_1,\ldots,x_n \in \mathbf{R}$. Pozitivně semidefinitní forma se nazývá pozitivně definitní *pokud platí $f(x_1,\ldots,x_n) = \mathbf{x}^T\mathbf{B}\mathbf{x} = 0$ právě když $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.*

Tvrzení 13.4 *Je-li $f(x_1,\ldots,x_n)$ reálná kvadratická forma v n proměnných a $\mathbf{B} = (b_{ij})$ její matice, která má hodnost r, pak je ekvivalentní*

1. *$f(x_1,\ldots,x_n)$ je pozitivně semidefinitní,*

2. *všechny vlastní hodnoty matice $\mathbf{B}$ jsou nezáporné,*

3. *$\mathbf{B} = \mathbf{C}^T\mathbf{C}$ pro nějakou matici $\mathbf{C}$ hodnosti r.*

Pro komplexní kvadratické formy platí stejné tvrzení, pouze transponovanou matici $\mathbf{C}^T$ je nutné nahradit komplexně transponovanou maticí $\mathbf{C}^*$.

Důkaz. 1 $\Rightarrow$ 2. Z vlastnosti 1. plyne $\mathbf{x}^T\mathbf{B}\mathbf{x} \geq 0$ pro každý vektor $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^{n\times 1}$. Speciálně to platí pro vlastní vektor $\mathbf{x}$ matice $\mathbf{B}$ odpovídající vlastnímu číslu $\lambda \in \sigma(\mathbf{B})$. Pro tento vlastní vektor platí

$$\lambda = \frac{\mathbf{x}^T\mathbf{B}\mathbf{x}}{\mathbf{x}^T\mathbf{x}} = \frac{\|\mathbf{C}\mathbf{x}\|^2}{\|\mathbf{x}\|^2} \geq 0.$$

2 $\Rightarrow$ 3. Protože matice $\mathbf{B}$ je symetrická, tedy normální, proto unitárně ortogonalizovatelná, existují ortogonální matice $\mathbf{P}$ a diagonální matice $\mathbf{D}$, pro které platí $\mathbf{B} = \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^T$. Na hlavní diagonále matice $\mathbf{D}$ jsou vlastní čísla λ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, matice $\mathbf{B}$, která jsou podle podmínky 2. nezáporná. Podobně jako v úvodu této kapitoly označíme $\mathbf{F} = \sqrt{\mathbf{D}}$ matici, která má na hlavní diagonále čísla $\sqrt{\lambda_i}$. Potom $\mathbf{B} = \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^T = \mathbf{P}\mathbf{F}\mathbf{F}\mathbf{P}^T = (\mathbf{F}\mathbf{P}^T)(\mathbf{F}\mathbf{P}^T) = \mathbf{C}^T\mathbf{C}$, kde $\mathbf{C} = \mathbf{F}\mathbf{P}^T$. Protože $r(\mathbf{B}) = r$, je také $r(\mathbf{D}) = r$. Proto má $\mathbf{D}$ na hlavní diagonále právě r nenulových prvků. Proto také $\mathbf{F} = \sqrt{\mathbf{D}}$ má na hlavní diagonále právě r nenulových prvků, tj. $r(\mathbf{F}) = r$. Odtud vyplývá rovněž $r(\mathbf{C}) = r$, neboť součin nějaké matice s regulární maticí nemění hodnost této matice.

3 $\Rightarrow$ 1. Jestliže $\mathbf{B} = \mathbf{C}^T\mathbf{C}$ pro nějakou matici $\mathbf{C}$, pak pro každý vektor $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^{n\times 1}$ platí

$$\mathbf{x}^T\mathbf{B}\mathbf{x} = \mathbf{x}^T\mathbf{C}^T\mathbf{C}\mathbf{x} = (\mathbf{C}\mathbf{x})^T(\mathbf{C}\mathbf{x}) = \|\mathbf{C}\mathbf{x}\|^2 \geq 0.$$

$\square$

Diagonalizace kvadratické formy

O kvadratické formě $f(x_1, \ldots, x_n) = \mathbf{x}^T\mathbf{D}\mathbf{x}$ říkáme, že je v *diagonálním tvaru*, pokud je $\mathbf{D} = (d_{ij})$ diagonální matice. V tom případě

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \mathbf{x}^T\mathbf{D}\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} d_{ii}x_i^2.$$

Je-li nyní $f(x_1, \ldots, x_n) = \mathbf{x}^T\mathbf{B}\mathbf{x}$ libovolná reálná kvadratická forma v n proměnných, pak je matice $\mathbf{B}$ reálná symetrická matice. Najdeme ortogonální matici $\mathbf{P}$ a diagonální matici $\mathbf{D}$, pro které platí $\mathbf{B} = \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^T$. Označíme $\mathbf{y} = \mathbf{P}^T\mathbf{x}$, tj. $\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{y}$. Potom platí

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \mathbf{x}^T\mathbf{B}\mathbf{x} = \mathbf{x}^T\mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^T\mathbf{x} = \mathbf{y}^T\mathbf{D}\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} d_{ii}y_i^2.$$

Poslední výpočet ukazuje, že pokud nahradíme souřadnice $(x_1, \ldots, x_n)$ každého vektoru $(x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathcal{R}^{n\times 1}$, které jsou souřadnicemi vzhledem ke standardní bázi, jeho souřadnicemi $(y_1, \ldots, y_n)$ vzhledem k bázi $\mathbf{P}_{*1}, \ldots,$ $\mathbf{P}_{*n}$, pak je kvadratická forma $f(y_1, \ldots, y_n)$ v diagonálním tvaru. Tato diagonalizace rovněž ukazuje, že vlastnosti kvadratické formy $f(x_1, \ldots, x_n) = \mathbf{x}^T\mathbf{B}\mathbf{x}$ závisí pouze na vlastních číslech matice $\mathbf{B}$ – reálné symetrické matice této formy.

Příklad 13.5 *Najděte bázi prostoru $\mathcal{R}^2$, vzhledem ke které je kvadratická forma*

$$f(x_1, x_2) = 13x_1^2 + 10x_1x_2 + 13x_2^2$$

v diagonálním tvaru.

Řešení. Matice kvadratické formy $f(x_1, x_2) = 13x_1^2 + 10x_1x_2 + 13x_2^2$ se rovná

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 13 & 5 \\ 5 & 13 \end{pmatrix}.$$

Charakteristická rovnice této matice

$$(13-\lambda)(13-\lambda) - 25 = (13-\lambda-5)(13-\lambda+5) = (8-\lambda)(18-\lambda) = 0$$

má tedy kořeny $\lambda_1 = 8$ a $\lambda_2 = 18$.

Vlastní vektory příslušné vlastnímu číslu $\lambda_1 = 8$ jsou řešením homogenní soustavy rovnic s maticí

$$\begin{pmatrix} 13-\lambda_1 & 5 \\ 5 & 13-\lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

Její řešení jsou tvaru $(a, -a)$ pro $a \in \mathbf{R}$, zvolíme vlastní vektor, který má délku 1, například $(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$.

Vlastní vektory příslušné vlastnímu číslu $\lambda_2 = 18$ najdeme jako řešení homogenní soustavy rovnic s maticí

$$\begin{pmatrix} 13-\lambda_2 & 5 \\ 5 & 13-\lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 5 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}.$$

Řešením této soustavy jsou všechny vektory tvaru (a, a) pro $a \in \mathbf{R}$. Zvolíme vlastní vektor, který má délku 1, např. $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$.

Pro matici

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

potom platí
$$\mathbf{P}^T\mathbf{B}\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 18 \end{pmatrix}.$$
Hledanou bází prostoru $\mathcal{R}^2$ je proto báze $(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)^T, (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)^T$. Má-li vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T \in \mathcal{R}^2$ vzhledem k této bázi souřadnice (y_1, y_2), pak
$$f(y_1, y_2) = 8y_1^2 + 18y_2^2.$$
□

Cvičení 13.1 *Převeďte několik kvadratických forem ve dvou nebo ve třech proměnných do diagonálního tvaru. Najděte příslušné báze prostorů $\mathcal{R}^2$ a $\mathcal{R}^3$.*

Rovnice elipsy a hyperboly v rovině mají tvar
$$f(x_1, x_2) = c,$$
kde $a \in \mathbf{R}$. Například
$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1$$
je rovnice elipsy, zatímco
$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 1$$
je rovnice hyperboly. Tyto rovnice odpovídají situaci, kdy souřadné osy v rovině jsou ve směru hlavní a vedlejší poloosy příslušné elipsy nebo hyperboly.

Tak například kvadratická forma $f(x_1, x_2) = 13x_1^2 + 10x_1x_2 + 13x_2^2$, kterou jsme se několikrát zabývali v této kapitole, určuje elipsu nebo hyperbolu, pokud ji položíme rovnou nějakému reálnému číslu, například
$$13x_1^2 + 10x_1x_2 + 13x_2^2 = 72.$$
Vzhledem k bázi $(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)^T, (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)^T$ má stejná kvadratická forma vyjádření
$$8y_1^2 + 18y_2^2 = 72,$$
tj.
$$\frac{y_1^2}{9} + \frac{y_2^2}{4} = 1.$$
Jde tedy o rovnici elipsy, hlavní poloosa má délku 3 je ve směru vektoru $(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)^T$, zatímco vedlejší poloosa má délku 2 a je ve směru vektoru $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)^T$.

Cvičení 13.2 *Položte několik reálných kvadratických forem o dvou proměnných rovných nějaké konstantě a zjistěte, zdali příslušná rovnice vyjadřuje elipsu, hyperbolu nebo je množina řešení prázdná. Pokud jde o elipsu nebo hyperbolu, určete směr hlavních poloos a jejich délky.*

Ke zjištění, zdali z dané kvadratické formy dostaneme rovnici elipsy nebo hyperboly, nemusíme hledat vlastní vektory matice $\mathbf{B}$ této formy. Nejdříve si vyjasníme, jak se změní matice kvadratické formy v n proměnných, pokud změníme bázi v prostoru $\mathcal{R}^{n\times 1}$.

Tvrzení 13.6 *Předpokládáme, že $f(x_1,\dots,x_n)$ je reálná kvadratická forma v n proměnných a $\mathbf{B}$ její matice. Je-li $\mathbf{P}$ regulární matice řádu n a $\mathbf{x}=\mathbf{P}\mathbf{y}$ pro libovolný vektor $\mathbf{y}=(y_1,\dots,y_n)^T\in\mathcal{R}^{n\times 1}$, pak matice téže kvadratické formy f vzhledem k bázi $\mathbf{P}_{*1},\dots,\mathbf{P}_{*n}$ se rovná $\mathbf{P}^T\mathbf{B}\mathbf{P}$.*

Důkaz. Platí

$$f(x_1,\dots,x_n)=\mathbf{x}^T\mathbf{B}\mathbf{x}=\mathbf{y}^T\mathbf{P}^T\mathbf{B}\mathbf{P}\mathbf{y},$$

matice formy $f(x_1,\dots,x_n)$ vzhledem k bázi $\mathbf{P}_{*1},\dots,\mathbf{P}_{*n}$ se proto rovná $\mathbf{P}^T\mathbf{B}\mathbf{P}$. □

Všimněte si, že matice $\mathbf{P}=(a_{ij})$ je matice přechodu od standardní báze $\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n$ k bázi $\mathbf{P}_{*1},\dots,\mathbf{P}_{*n}$. Skutečně,

$$\mathbf{P}_{*j}=(a_{1j},a_{2j},\dots,a_{nj})^T=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\mathbf{e}_i,$$

matice $\mathbf{P}$ je tak maticí identického zobrazení na prostoru $\mathcal{R}^{n\times 1}$ vzhledem k bázím $\mathbf{P}_{*1},\dots,\mathbf{P}_{*n}$ a standardní bázi $\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n$. Tuto matici podle Definice 7.12 nazýváme matice přechodu od báze $\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n$ k bázi $\mathbf{P}_{*1},\dots,\mathbf{P}_{*n}$.

Poslední tvrzení tak říká, jak dostat postupně matici kvadratické formy vzhledem k jiným bázím, pokud nepožadujeme, aby nová báze byla ortonormální. Regulární matici $\mathbf{P}$ vyjádříme jako součin elementárních matic $\mathbf{P}=\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2\cdots\mathbf{E}_k$. Potom

$$\mathbf{P}^T\mathbf{B}\mathbf{P}=\mathbf{E}_k^T\cdots\mathbf{E}_2^T\mathbf{E}_1^T\mathbf{B}\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2\cdots\mathbf{E}_k.$$

Součin $\mathbf{E}^T\mathbf{B}\mathbf{E}$, kde $\mathbf{E}$ je nějaká elementární matice, dostaneme z matice $\mathbf{B}$ tak, že provedeme *stejnou* elementární řádkovou a sloupcovou úpravu matice $\mathbf{B}$. Hledáme-li vyjádření kvadratické formy v diagonálním tvaru, můžeme proto postupovat tak, že postupně děláme stejné elementární řádkové a sloupcové úpravy matice příslušné kvadratické formy.

Protože pro každou kvadratickou formu $f(x_1, \ldots, x_n)$ s maticí $\mathbf{B}$ existuje ortogonální (a tedy nutně regulární) matice $\mathbf{P}$, pro kterou platí $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{P} = \mathbf{P}^T\mathbf{B}\mathbf{P}$, platí následující tvrzení.

Tvrzení 13.7 *Pro každou reálnou kvadratickou formnu $f(x_1, \ldots, x_n)$ v n proměnných s maticí $\mathbf{B}$ existuje báze $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ prostoru $\mathcal{R}^{n\times 1}$, vzhledem ke které má kvadratická forma $f(x_1, \ldots, x_n)$ diagonální matici $\mathbf{D} = (d_{ij})$, tj. platí*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} d_{ii} y_i^2,$$

kde $(y_1, \ldots, y_n)$ jsou souřadnice vektoru $(x_1, \ldots, x_n)^T$ vzhledem k nové bázi $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$.

Protože při diagonalizaci popsané v předchozím tvrzení, můžeme používat libovolné regulární matice, můžeme dokázat následující důsledek.

Důsledek 13.8 *Pro každou reálnou kvadratickou formnu $f(x_1, \ldots, x_n)$ v n proměnných s maticí $\mathbf{B}$ existuje báze $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ prostoru $\mathcal{R}^{n\times 1}$, vzhledem ke které má kvadratická forma $f(x_1, \ldots, x_n)$ diagonální matici $\mathbf{E} = (e_{ij})$, kde $e_{ii} = \pm 1$ nebo $e_{ii} = 0$ pro libovolné $i = 1, \ldots, n$.*

Důkaz. Pokud je $\mathbf{C} = (c_{ij})$ regulární diagonální matice a $\mathbf{D} = (d_{ij})$ je diagonální matice ze znění Tvrzení 13.7, pak platí, že prvek na místě (i, i) v součinu $\mathbf{C}^T\mathbf{D}\mathbf{C}$ se rovná $c_{ii}^2 d_{ii}$. Stačí proto zvolit

$$c_{ii} = \frac{1}{\sqrt{|d_{ii}|}},$$

pokud $d_{ii} \neq 0$ a

$$c_{ii} = 1,$$

pokud $d_{ii} = 0$. Potom matice $\mathbf{E} = \mathbf{C}^T\mathbf{D}\mathbf{C}$ má požadované vlastnosti. □

V Tvrzení 13.7 a Důsledku 13.8 používáme k diagonalizaci (symetrické) matice $\mathbf{B}$ kvadratické formy obecné regulární matice, nikoliv pouze ortogonální matice, jako ve Větě 11.21. V případě unitární diagonalizace jsou prvky na hlavní diagonále diagonální matice $\mathbf{D}$ vlastní čísla matice $\mathbf{B}$ a jsou tedy jednoznačně určené (až na pořadí) maticí $\mathbf{B}$. Tvrzení 13.7 a Důsledek 13.8 naopak ukazují, že při doagonalizaci matic kvadratických forem nejsou prvky na hlavní diagonále určené jednoznačně. Následující *Věta o setrvačnosti kvadratických forem* dokazuje, že pokud požadujeme, aby na hlavní diagonále diagonální matice kvadratické formy ležely pouze čísla $0, 1$ a -1, jsou tyto prvky určené, až na pořadí, jednoznačně.

Věta 13.9 *Předpokládáme, že kvadratická forma $f(x_1, \ldots, x_n)$ v n proměnných má matici $\mathbf{B}$ hodnosti r. Pokud má vhledem k bázi $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ diagonální tvar*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_p^2 - a_{p+1}^2 - \cdots - a_{p+q}^2,$$

kde

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{e}_i = \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{u}_i,$$

a vzhledem k bázi $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ diagonální tvar

$$f(x_1, \ldots, x_n) = b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_s^2 - b_{s+1}^2 - \cdots - b_{s+t}^2,$$

kde

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{e}_i = \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} b_i \mathbf{v}_i,$$

pak $p = s$ a $q = t$.

Důkaz. Především platí, že $p + q = r(\mathbf{B}) = s + t$. Předpokládejme, že $r > s$. Podprostor (lineární obal)

$$\mathcal{P} = \mathcal{L}(veu_1, \ldots, \mathbf{u}_p)$$

má dimenzi p a podprostor

$$\mathcal{Q} = \mathcal{L}(vev_{s+1}, \ldots, \mathbf{v}_n)$$

má dimenzi $n - s$. Protože $p + n - s > n$, platí podle Tvrzení 6.22

$$\dim(\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}) = \dim \mathcal{P} + \dim \mathcal{Q} - \dim(\mathcal{P} + \mathcal{Q}) = p + (n - s) - n > 0.$$

Existuje tedy vektor $\mathbf{x} \in \mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$. Pro tento vektor máme trojí vyjádření

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{p} a_i \mathbf{u}_i = \sum_{j=s+1}^{n} b_j \mathbf{v}_j = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{e}_i.$$

Potom platí, že

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{p} a_i^2 > 0$$

a současně

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=s+1}^{n} -b_j^2 \leq 0.$$

Tento spor ukazuje, že ve skutečnosti musí platit $p \leq s$. Zaměníme-li báze $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ a $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$, dostaneme také opačnou nerovnost $s \leq p$. Proto $p = s$ a tedy také $q = t$. $\square$

Geometrický význam singulárních hodnot

Ukážeme si také slíbený geometrický význam singulárních hodnot reálné čtvercové matice $\mathbf{A}$ řádu n. Připomeňme si, že singulární hodnoty takové matice $\mathbf{A}$ jsou hodnoty na hlavní diagonále regulární matice $\mathbf{C}$ v rozkladu

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \begin{pmatrix} \mathbf{D}_{r \times r} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \mathbf{V}^T,$$

kde $\mathbf{U}$ a $\mathbf{V}$ jsou ortogonální matice řádu n a $\mathbf{D}_{r \times r}$ je čvercová regulární matice řádu $r = r(\mathbf{A})$. Viz Věta 11.25. Protože je bloková matice v tomto rozkladu rovněž čtvercová, můžeme rozklad psát prostě $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{V}^T$, kde $\mathbf{D}$ je čtvercová diagonální matice řádu n. Budeme pro jednoduchost navíc předpokládat, že matice $\mathbf{A}$ má plnou hodnost, tj. že $r(\mathbf{A}) = n$. V tom případě jsou všechny prvky na hlavní diagonále matice $\mathbf{D}$ kladná reálná čísla, označovali jsme je σ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Z rovnosti $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{V}^T$ vyplývá rovněž $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{V}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{U}^T$. Můžeme také předpokládat, že

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_n > 0.$$

Podíváme se, jak matice $\mathbf{A}$ zobrazí jednotkovou sféru v prostoru $\mathcal{R}^{n \times 1}$, tj. množinu

$$\mathcal{S} = \{\mathbf{x} \in \mathcal{R}^{n \times 1} : \|\mathbf{x}\| = 1\}.$$

V jejím obrazu leží vektory tvaru $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ pro $\mathbf{x} \in \mathcal{S}$. Označíme si $\mathbf{w} = \mathbf{U}^T\mathbf{y}$. Potom platí

$$\begin{aligned} 1 &= \|\mathbf{x}\|^2 = \|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{x}\|^2 = \|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{V}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{U}^T\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{D}^{-1}\mathbf{U}^T\mathbf{y}\|^2 = \\ &= \|\mathbf{D}^{-1}\mathbf{w}\|^2 = \frac{w_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{w_2^2}{\sigma_2^2} + \cdots + \frac{w_n^2}{\sigma_n^2}. \end{aligned}$$

V tomto výpočtu $\mathbf{w} = (w_1, \ldots, w_n)^T$ jsou souřadnice vektoru $\mathbf{w}$ vzhledem ke standardní bázi.

Vektory $\mathbf{w} = (w_1, \ldots, w_n)^T$, které vyhovují rovnici

$$1 = \frac{w_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{w_2^2}{\sigma_2^2} + \cdots + \frac{w_n^2}{\sigma_n^2},$$

tvoří *zobecněný elipsoid*. Poslední výpočet tak říká, že množina všech vektorů

$$\mathbf{U}^T\mathbf{A}(\mathcal{S}) = \{\mathbf{U}^T\mathbf{A}\mathbf{x} : \|\mathbf{x}\| = 1\}$$

tvoří zobecněný elipsoid, jehož k-tá poloosa je ve směru vektoru $\mathbf{e}_k$ standardní báze a má délku σ_k. Protože $\mathbf{U}$ je ortogonální matice, součin s $\mathbf{U}^T$ nemění délku vektorů $\mathbf{A}\mathbf{x}$, pouze jejich orientaci. To znamená, že také množina bodů $\mathbf{A}(\mathcal{S}) = \{\mathbf{A}\mathbf{x} : \|\mathbf{x}\| = 1\}$ je rovněž zobecněný elipsoid, jehož k-tá poloosa má délku σ_k. Protože zobrazení určené maticí $\mathbf{U}$ zobrazuje zobecněný elipsoid $\mathbf{U}^T\mathbf{A}(\mathcal{S})$ do zobecněného elipsoidu $\mathbf{A}(\mathcal{S})$ a zachovává délky vektorů, jsou hlavní polosy elipsoidu $\mathbf{A}(\mathcal{S})$ ve směru vektorů $\mathbf{U}\mathbf{e}_k = \mathbf{U}_{*k}$. Sloupce matice $\mathbf{U}$ jsou tak směry poloos elipsoidu $\mathbf{A}(\mathcal{S})$.

Kromě toho platí $\mathbf{AV} = \mathbf{UD}$, tj. $\mathbf{AV}_{*k} = \sigma_k\mathbf{U}_{*k}$. To znamená, že sloupce matice $\mathbf{V}$ určují body na jednotkové sféře $\mathcal{S}$, které se zobrazují do koncových bodů poloos zobecněného elipsoidu $\mathbf{A}(\mathcal{S})$.