Lineární algebra I

Jiří Tůma

22. října 2002

Kapitola 1

Lineární rovnice a jejich soustavy

Úloha 1.1 *Najděte kvadratickou funkci* $ax^2 + bx + c = y$*, jejíž graf prochází body* $(0,3)$*,* $(1,2)$ *a* $(2,3)$*.*

Řešení. Tři uvedené body musí vyhovovat rovnici $y = ax^2 + bx + c$. Musí proto platit

$$\begin{aligned} a0 + b0 + c &= 3, \\ a1 + b1 + c &= 2, \\ a4 + b2 + c &= 3. \end{aligned}$$

Neznámé koeficienty a, b, c tak najdeme jako řešení soustavy tří lineárních rovnic o třech neznámých

$$\begin{aligned} 0a + 0b + 1c &= 3, \\ 1a + 1b + 1c &= 2, \\ 4a + 2b + 1c &= 3. \end{aligned}$$

První rovnice určuje koeficient $c = 3$ a po dosazení do zbývajících dvou rovnic dostaneme

$$\begin{aligned} 1a + 1b &= -1 \\ 4a + 2b &= 0. \end{aligned}$$

Odečtením čtyřnásobku druhé rovnice od třetí dostaneme

$$-2\,b = 4,$$

tj. $b = -2$ a dosazením do druhé rovnice najdeme poslední kořen $a = 1$. Hledaná kvadratická funkce se rovná

$$y = x^2 - 2x + 3.$$

□

Rovnice, které jsme řešili, se nazývají *lineární*, protože obsahují pouze první mocniny neznámých a neobsahují ani žádný součin neznámých. Rovnice $2x^2 = 3$, $x + \frac{1}{y} = 2$ nebo $x + xy = 5z$ *nejsou* lineární.

K řešení soustav lineárních rovnic vedou i jiné úlohy, které na první pohled lineární nejsou.

Úloha 1.2 *Najděte rovnici kružnice, která prochází body* (x_1, y_1), (x_2, y_2) *a* (x_3, y_3).

Řešení. Obecná rovnice kružnice v kartézských souřadnicích je

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = c^2,$$

kde (a, b) jsou souřadnice středu kružnice a $c > 0$ je její poloměr. Dosadíme-li do této rovnice souřadnice bodů (x_1, y_1), (x_2, y_2) a (x_3, y_3), dostaneme soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcl}(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 &=& c^2,\\ (x_2 - a)^2 + (y_2 - b)^2 &=& c^2,\\ (x_3 - a)^2 + (y_3 - b)^2 &=& c^2.\end{array}$$

Po roznásobení dostaneme pro neznámé a, b, c rovnice

$$\begin{array}{rcl}x_1^2 - 2x_1a + a^2 + y_1^2 - 2y_1b + b^2 &=& c^2,\\ x_2^2 - 2x_2a + a^2 + y_2^2 - 2y_2b + b^2 &=& c^2,\\ x_3^2 - 2x_3a + a^2 + y_3^2 - 2y_3b + b^2 &=& c^2.\end{array}$$

Toto není soustava lineárních rovnic, nicméně výpočet souřadnic (a, b) středu hledané kružnice můžeme převést na řešení soustavy dvou lineárních rovnic o dvou neznámých tím, že postupně odečteme druhou rovnici od první a potom třetí rovnici od druhé. Dostaneme tak soustavu

$$\begin{array}{rcl}x_1^2 - x_2^2 - 2(x_1 - x_2)a + y_1^2 - y_2^2 - 2(y_1 - y_2)b &=& 0,\\ x_2^2 - x_3^2 - 2(x_2 - x_3)a + y_2^2 - y_3^2 - 2(y_2 - y_3)b &=& 0,\\ x_3^2 - 2x_3a + a^2 + y_3^2 - 2y_3b + b^2 &=& c^2.\end{array}$$

První dvě rovnice tvoří soustavu dvou lineárních rovnic o dvou neznámých a, b. Jejím řešením najdeme souřadnice (a, b) středu hledané kružnice a po jejich dosazení do třetí rovnice také její poloměr c. □

Úlohu 1.2 můžeme také řešit geometricky. Jsou-li všechny tři body (x_1, y_1), (x_2, y_2) a (x_3, y_3) různé, sestrojíme napřed osu úsečky spojující první dva body, a poté osu úsečky spojující druhý a třetí bod. Pokud se tyto osy protnou, jejich průsečík je středem hledané kružnice a úloha má v tomto případě jediné řešení. To nastane právě když tři dané body neleží na jedné přímce. Pokud leží na jedné přímce (a jsou navzájem různé), osy se neprotnou a úloha nemá žádné řešení. Pokud se aspoň dva body rovnají, má úloha nekonečně mnoho řešení.

Intuitivně ale cítíme, že úloha má "méně" řešení, pokud se rovnají pouze dva z daných bodů a třetí je od nich různý, než když jsou si všechny tři body rovné. V prvním případě středy hledaných kružnic leží na ose úsečky spojující dvojici různých daných bodů a každý bod této přímky určuje právě jednu kružnici, která je řešením naší úlohy. V případě rovnosti všech tří bodů je každý bod roviny různý od daného bodu středem právě jedné kružnice řešící naši úlohu. Pokud bod považujeme za *degenerovanou* kružnici s poloměrem 0, pak je *každý* bod roviny středem právě jedné kružnice, která je řešením úlohy. Můžeme tak říct, že v případě rovnosti dvou daných bodů má množina všech řešení úlohy dimenzi 1, v případě rovnosti všech tří bodů má dimenzi 2. Pokud jsou všechny tři body navzájem různé, má množina všech řešení úlohy buď dimenzi 0 (neleží-li body na přímce) nebo je úloha neřešitelná (pokud na přímce leží).

Těmto geometrickým úvahám by také mělo odpovídat algebraické řešení úlohy. Soustava

$$\begin{aligned}
x_1^2 - x_2^2 - 2(x_1 - x_2)a + y_1^2 - y_2^2 - 2(y_1 - y_2)b &= 0, \\
x_2^2 - x_3^2 - 2(x_2 - x_3)a + y_2^2 - y_3^2 - 2(y_2 - y_3)b &= 0,
\end{aligned}$$

jejíž řešení udává souřadnice (a, b) středu hledané kružnice, by měla mít buď jedno řešení, nebo žádné, nebo nekonečně mnoho. Má-li jich nekonečně mnoho, pak v jednom případě tvoří množina všech řešení přímku v rovině, ve druhém celou rovinu.

Cvičení 1.1 *Ověřte si to konkrétní volbou bodů* (x_1, y_1), (x_2, y_2) *a* (x_3, y_3).

Co se stane, máme-li najít kružnici, která prochází různými body (x_1, y_1), $(x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ pro $n > 3$? Každá trojice různých bodů určí jednoznačně nějakou kružnici, která tyto tři body obsahuje. Pro různé výběry tří bodů mohou být tyto kružnice různé a v naprosté většině případou také skutečně různé budou. Existuje ale jednoznačně určená kružnice, která je v jistém dobře definovaném smyslu "nejblíže" k zadaným bodům. Úlohu, jak tuto kružnici najít, řešili astronomové na počátku 19. století. 1.ledna 1801 objevil astronom Giuseppe Piazi v souhvězdí Taurus "novou hvězdu". Další pozorování ukázala, že se "hvězda" pohybuje, a byla proto považována za nově objevenou planetu. V polovině února Piazi onemocněl a později ji už znovu nenašel.

Astronomové se snažili z naměřených poloh vypočítat kružnici, po které se "planeta" měla podle jejich předpokladů pohybovat. Nepodařilo se jim ji ale na noční obloze znovu objevit. Slavný německý matematik Carl Friedrich Gauss (1777-1855) zkusil vypočítat eliptickou dráhu, která naměřeným polohám "planety" nejlépe odpovídala. K jejímu výpočtu vytvořil metodu *nejmenších čtverců*. Na základě svých výpočtů určil v prosinci 1801 polohu ztracené "planety" a předpověděl její další pohyb. "Planeta", ve skutečnosti planetka Ceres, byla na Gaussem předpovězeném místě skutečně znovuobjevena. O metodě nejmenších čtverců si více řekneme později.

Jedna lineární rovnice o dvou neznámých

$$ax + by = c$$

je rovnicí přímky v rovině, pokud nejsou oba koeficienty a, b současně rovné 0. Znamená to, že množina všech řešení této rovnice, tj. množina všech uspořádaných dvojic reálných čísel, které této rovnici vyhovují, tvoří přímku v rovině. Z této rovnice ale bezprostředně nepoznáme, jakými body přímka všech řešení prochází. Tutéž přímku můžeme také vyjádřit parametricky ve tvaru

$$\{\mathbf{u} + t\mathbf{v} : t \in \mathbf{R}\},$$

kde $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ jsou vhodné dvoudimenzionální vektory a $\mathbf{R}$ označuje množinu všech reálných čísel. Vektor $\mathbf{u}$ určuje jeden bod přímky (při volbě parametru $t = 0$) a vektor $\mathbf{v}$ určuje směr této přímky.

Cvičení 1.2 *Najděte pro nějaká konkrétní čísla a, b, c parametrické vyjádření přímky určené rovnicí $ax + by = c$.*

Podobně lineární rovnice o třech neznámých

$$ax + by + cz = d$$

je rovnicí roviny v prostoru, pokud nejsou všechny tři koeficienty a, b, c současně rovné 0. To znamená, že množina všech uspořádaných trojic reálných čísel (x, y, z), které vyhovují poslední rovnici, tvoří rovinu v třídimenzionálním prostoru. Každá rovina má také parametrické vyjádření ve tvaru

$$\{\mathbf{u} + r\mathbf{v} + s\mathbf{w} : r, s \in \mathbf{R}\},$$

kde $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ jsou vhodné třídimenzionální vektory.

Cvičení 1.3 *Najděte pro nějaká konkrétní čísla a, b, c, d parametrické vyjádření roviny určené rovnicí $ax + by + cz = d$.*

Cvičení 1.4 *Jsou-li*

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2, \end{aligned}$$

rovnice dvou rovin v prostoru, najděte podmínku, jakou musí splňovat koeficienty a_1, b_1, c_1, d_1 a a_2, b_2, c_2, d_2, aby roviny byly různé. Jakou podmínku musí navíc splňovat, aby obě roviny nebyly rovnoběžné? Pokud koeficienty splňují obě tyto podmínky, množina bodů (x, y, z), které vyhovují oběma rovnicím současně, tvoří přímku v třídimenzionálním prostoru. Zkuste najít parametrické vyjádření této přímky ve tvaru

$$\{\mathbf{u} + t\mathbf{v} : t \in \mathbf{R}\},$$

kde $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ jsou vhodné třídimenzionální vektory.

Pro parametrická vyjádření přímek a rovin potřebujeme umět počítat s reálnými vektory. Musíme je umět sčítat a násobit reálným číslem.

Definice 1.1 Reálný vektor *dimenze n je uspořádaná n-tice reálných čísel $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Jsou-li $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ a $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ dva reálné vektory dimenze n, pak jejich* součtem *rozumíme vektor*

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n).$$

Součet dvou reálných vektorů dimenze n je tedy opět reálný vektor dimenze n.

Je-li $a \in \mathbf{R}$ reálné číslo, pak součinem *čísla a a vektoru $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ rozumíme vektor*

$$a(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (ax_1, ax_2, \ldots, ax_n).$$

Součin reálného čísla a vektoru dimenze n je proto opět reálný vektor dimenze n.

Množinu všech reálných vektorů dimenze n spolu s právě definovanými operacemi sčítání vektorů a násobení vektoru reálným číslem nazýváme aritmetický reálný vektorový prostor *dimenze n. Označovat jej budeme $\mathcal{R}_n$.*

Součin dvou vektorů dimenze n jsme *nedefinovali.* Vektory zapisujeme buď řádkově jako v Definici 1.1 nebo sloupcově ve tvaru

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Abychom ušetřili místo, budeme sloupcové vektory zapisovat také následovně

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n)^T.$$

Od řádkového zápisu se liší exponentem ^{T}.

Soustavou m lineárních rovnic o n neznámých s reálnými koeficienty rozumíme soustavu rovnic tvaru

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m. \end{aligned}$$

Reálná čísla a_{ij} nazýváme *koeficienty* soustavy, reálný sloupcový vektor $(b_1, b_2, \ldots, b_m)^T$ dimenze m nazýváme *vektor pravých stran.* Hledané *řešení soustavy* je neznámý vektor $(x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \in \mathcal{R}_n$. Poloha koeficientu a_{ij} je určena indexy i, j. První undex i určuje rovnici, druhý index j pak neznámou, u které je koeficient a_{ij}. Koeficienty a_{ij} tvoří dvoudimenzionální systém čísel, pro který si zavedeme zvláštní název.

Definice 1.2 Reálná matice *tvaru $m \times n$ je soubor $m \times n$ reálných čísel a_{ij}, kde $i = 1, 2, \ldots m$ a $j = 1, 2, \ldots, n$. Matice zapisujeme ve tvaru*

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Matici také budeme zapisovat stručně $\mathbf{M} = (a_{ij})$*. První index u prvku* a_{ij} *je* řádkový index*, druhý index je* sloupcový index*. Říkáme také, že prvek* a_{ij} *je na místě* (i, j) *matice* $\mathbf{M}$*. Vektor* $(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}) \in \mathcal{R}_n$ *nazýváme* i*-tý* řádkový vektor *nebo jenom stručně* i*-tý* řádek *matice* $\mathbf{M}$ *a budeme jej označovat* $\mathbf{M}_{i*}$*. Podobně* $\mathbf{M}_{*j} = (a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj})^T \in \mathcal{R}_m$ *je* j*-tý* sloupcový vektor (sloupec) *matice* $\mathbf{M}$*.*

Je-li $m = n$*, pak říkáme, že* $\mathbf{M}$ *je* čtvercová matice *řádu* n*.*

Je-li dána soustava m lineárních rovnic o n neznámých s reálnými koeficienty

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m, \end{aligned}$$

pak reálnou matici

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

nazýváme matice soustavy *a matici*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix},$$

kde jsme přidali sloupec pravých stran, nazýváme rozšířená matice *této soustavy.*

Reálný sloupcový vektor dimenze n můžeme považovat také za matici tvaru $n \times 1$. Zapíšeme-li jej řádkově, pak je to matice tvaru $1 \times n$. Až se naučíme násobit matice, budeme moci zapisovat soustavu m lineárních rovnic o n neznámých jednoduše ve tvaru

$$\mathbf{Mx} = \mathbf{b},$$

kde $\mathbf{M}$ je matice této soustavy, $\mathbf{x} \in \mathcal{R}_n$ neznámý vektor a $\mathbf{b} \in \mathcal{R}_m$ vektor pravých stran.

Při řešení obou úloh jsme používali úpravy, které nemění množinu řešení soustavy. Takovým úpravám soustavy rovnic říkáme *ekvivalentní úpravy.* Ukazuje se, že při řešení soustav lineárních rovnic vystačíme s ekvivalentními úpravami tří typů:

- prohození dvou rovnic,
- vynásobení i-té rovnice *nenulovým* reálným číslem k,
- přičtení k-násobku i-té rovnice k j-té rovnici, pokud $i \neq j$.

Těmto úpravám říkáme *elementární úpravy.* Elementární úpravy jsou *vratné*, tj. z nové soustavy můžeme rekonstruovat původní soustavu pomocí nějaké elementární úpravy (jaké?). Při řešení úloh jsme žádné jiné úpravy nepoužívali (za jakou úpravu lze považovat dosazení $c = 3$ do zbývajících dvou rovnic, které jsme použili při řešení první úlohy?).

Tvrzení 1.3 *Elementární úpravy soustavy lineárních rovnic nemění množinu všech řešení soustavy.*

Důkaz. Označíme S množinu všech řešení soustavy

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m. \end{aligned}$$

Symbolem R označíme množinu všech řešení soustavy, kterou dostaneme z této soustavy nějakou elementární úpravou.

Je-li $(x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \in S$, pak $(x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \in R$, pokud novou soustavu dostaneme z původní první elementární úpravou, protože rovnice v obou soustavách jsou stejné, liší se pouze pořadím.

Pokud uděláme druhou elementární úpravu, pak z předpokladu, že vektor $(x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \in S$ dostáváme

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i$$

a tedy také

$$ka_{i1}x_1 + ka_{i2}x_2 + \cdots + ka_{in}x_n = kb_i.$$

Ostatní rovnice soustavy se nezměnily, vektor $(x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ je proto také řešením nové soustavy. Tedy $(x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \in R$ rovněž v případě druhé elementární úpravy.

V případě třetí elementární úpravy z předpokladu $(x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \in S$ dostáváme

$$\begin{aligned} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n &= b_i, \\ a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \cdots + a_{jn}x_n &= b_j, \end{aligned}$$

proto rovněž

$$\begin{aligned} k(a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n) &= kb_i, \\ a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \cdots + a_{jn}x_n &= b_j. \end{aligned}$$

Sečtením obou rovností dostaneme

$$\begin{gathered} k(a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n) + (a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \cdots + a_{jn}x_n) = \\ (ka_{i1} + a_{j1})x_1 + (ka_{i2} + a_{j2})x_2 + \cdots + (ka_{in} + a_{jn})x_n = kb_i + b_j. \end{gathered}$$

Vektor $(x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ je proto řešením j-té rovnice upravené soustavy. Ostatní rovnice nové soustavy patří také do původní soustavy, proto je $(x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ rovněž řešením těchto rovnic. Také v případě třetí elementární úpravy tak platí $(x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \in R$. Tím jsme dokázali inkluzi

$$S \subseteq R.$$

Protože původní soustavu dostaneme z nové soustavy také nějakou elementární úpravou, platí podle první části důkazu rovněž opačná inkluze

$$R \subseteq S.$$

Množiny všech řešení původní a nové soustavy se proto rovnají. □

Cvičení 1.5 *Proč není ekvivalentní úpravou vynásobení nějaké rovnice číslem* 0*? Jaký je vztah mezi množinami všech řešení původní a nové soustavy v případě, že vynásobíme některou z rovnic číslem* 0*? Proč musíme při třetí elementární úpravě předpokládat* $i \neq j$*?*

Třem elementárním úpravám soustavy rovnic odpovídají *elementární řádkové úpravy* matice soustavy. Matici nové soustavy dostaneme z matice původní soustavy odpovídající úpravou matice:

- prohozením dvou řádků matice,
- vynásobením i-tého řádku matice *nenulovým* číslem,
- přičtením k-násobku i-tého řádku k j-tému řádku, je-li $i \neq j$.

Podobně rozšířenou matici nové soustavy dostaneme z rozšířené matice původní soustavy pomocí odpovídající elementární řádkové úpravy. Řešení soustavy lineárních rovnic proto budeme hledat pomocí elementárních řádkových úprav rozšířené matice soustavy.