Spojitost a derivace funkcí

Spojitost funkcí

1. Dodefinujte funkci v bodě 0 tak, aby byla spojitá:

$$f(x) = \frac{1-\cos x}{x^2}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

2. Zjistěte, kde jsou nespojité funkce
a) $f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$ b) $f(x) = \operatorname{sgn} \cos \frac{1}{x}$.

3. Vyšetřete spojitost složených funkcí $f(g(x))$ a $g(f(x))$, je-li

$$f(x) = \operatorname{sgn} x \qquad g(x) = x(1-x^2)\,.$$

4. Zjistěte, zda jsou spojité funkce

$$\begin{aligned} \text{a)} f(x) = & \quad \frac{\sin x}{|x|} && x \neq 0 \\ & \quad 1 && x = 0 \\ \text{b)} f(x) = & \quad x \sin\frac{1}{x} && x \neq 0 \\ & \quad 0 && x = 0 \end{aligned}$$

5. Dokažte, že jsou-li $f(x)$ a $g(x)$ spojité v x_0, pak jsou spojité v x_0 i funkce a) $\min\{f(x), g(x)\}$ b) $\max\{f(x), g(x)\}$.

6. Uveďte příklad funkce nespojité v každém $x \in \mathbb{R}$, jejíž druhá mocnina je spojitá na $\mathbb{R}$.

Derivace funkcí

7. Existuje derivace funkce $f(x) = x|x|$ v bodě 0?

8. Pro jaké α reálné má funkce

$$f(x) = \begin{cases} |x|^\alpha \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

derivaci v bodě 0. Kdy je tato derivace v bodě 0 spojitá?

9. Dokažte, že funkce

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \text{ je racionální} \\ 0 & x \text{ je iracionální.} \end{cases}$$

má derivaci pouze v nule.

10. Ukažte, že derivace sudé funkce (pokud existuje) je funkce lichá.

11. Nechť

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 1 \\ ax + b & x > 1\,. \end{cases}$$

Určete a, b tak, aby $f(x)$ měla v bodě 1 derivaci.

12. Určete rovnici tečny a normály ke grafu funkce $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 3$ v bodě $[-2, ?]$ grafu.

Elementární funkce

Dokažte, že

13. $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2}$, $x \in \mathbb{R}$

14. $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, $x \in [-1, 1]$

15. $\operatorname{argsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$, $x \in \mathbb{R}$

16. $\operatorname{argcosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$, $|x| \geq 1$

17. $\operatorname{argtgh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$, $x \in (-1, 1)$

18. $\operatorname{argcotgh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}$, $|x| > 1$

Derivace elementárních funkcí

19. Dokažte vztahy pro derivace cyklometrických, hyperbolických a hyperbolometrických funkcí.

    Vypočtěte derivace následujících funkcí v libovolném bodě x, kde derivace existuje:

20. $f(x) = \dfrac{2x}{1-x^2}$
21. $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{1+x^3}{1-x^3}}$
22. $f(x) = \dfrac{\sin^2 x}{\sin x^2}$
23. $f(x) = \sin\sin\sin x$
24. $f(x) = 2^{\mathrm{tg}\frac{1}{x}}$
25. $f(x) = x^{a^a} + a^{x^a} + a^{a^x}$
26. $f(x) = (\sin x)^{\cos x} + (\cos x)^{\sin x}$
27. $f(x) = \mathrm{arctg}\dfrac{1+x}{1-x}$
28. $f(x) = x\mathrm{arcsin}^2 x + 2\sqrt{1-x^2}\mathrm{arcsin} x - 2x$
29. $f(x) = \ln(\mathrm{e}^x + \sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}})\,.$

Derivace vyšších řádů. Parciální derivace

30. Ověřte, že funkce $u(x) = \frac{1}{|x|}$, kde $|x|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, splňuje v $\mathbb{R}^3 \setminus 0$ Laplaceovu rovnici $\Delta u = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0$.
31. Ověřte, že funkce $v(x) = \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\mathrm{e}^{-\frac{|x|^2}{4t}}$, kde $|x|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, splňuje v $(0,\infty) \times \{\mathbb{R}^3 \setminus 0\}$ rovnici vedení tepla $\frac{\partial v}{\partial t} - \Delta v = 0\,$, kde $\Delta v = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}$.
32. Spočtěte $f^{(10)}(x)$ je-li $f(x) = \sqrt{x}$.
33. Spočtěte $f^{(50)}(x)$ je-li $f(x) = x^2 \sin 2x$.