

# Matematické modelování jako způsob poznání reálného světa

Helena Švihlová

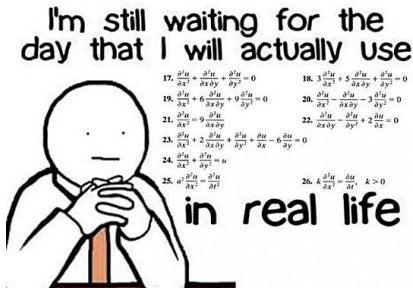
Matematický ústav MFF UK



UNIVERZITA KARLOVA  
Matematicko-fyzikální  
fakulta

# Proč si poslechnout tuto přednášku

- ▶ nestane se vám následující



- ▶ dozvíte se, jaký je nejdelší experiment na světě
- ▶ jak vyhrát milion dolarů
- ▶ argumenty, proč je nutné pít červené víno

# Matematické modelování – popis reálného světa

Sotva člověk ráno vstane, už může počítat. . .

# Matematické modelování – popis reálného světa

F. Da, D. Hahn, C. Batty, C. Wojtan, E. Grinspun: Surface-Only Liquids, ACM Trans. on Graphics (SIGGRAPH 2016), 2016.

# Matematické modelování – popis reálného světa

# Bakalářský program Matematické modelování

- ▶ nový mezioborový bakalářský studijní program spojující matematiku, fyziku a výpočty na počítačích
- ▶ vhodný pro následné studium navazujících magisterských programů:

## na matematice:

- Matematické modelování ve fyzice a technice
- Numerická a výpočtová matematika

## na fyzice:

- Matematické a počítačové modelování ve fyzice
- Geofyzika
- Astronomie a astrofyzika
- Meteorologie a klimatologie

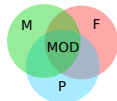
<http://bcmod.karlin.mff.cuni.cz>



**matfyz**

otevřává nový bakalářský program

**M**atematické  
**M**odelování



kombinace matematiky, fyziky a počítačových metod

[bcmod.karlin.mff.cuni.cz](http://bcmod.karlin.mff.cuni.cz)

# Matematické modelování

- ▶ bakalářské studium **Matematické modelování, Obecná matematika, Obecná fyzika**
- ▶ magisterské studium - obor jak na matematice tak i na fyzice, společné přednášky
  - ▶ **Matematické modelování ve fyzice a technice**
  - ▶ **Matematické a počítačové modelování ve fyzice**
- ▶ navazující doktorské studium - 4F11 Matematické a počítačové modelování

<http://mod.karlin.mff.cuni.cz>

## Matematický ústav UK a Ústav teoretické fyziky MFF UK

prof. RNDr. Josef Málek, CSc., DSc., josef.malek@mff.cuni.cz

doc. RNDr. Martin Čížek, Ph.D., martin.cizek@mff.cuni.cz

doc. Mgr. Milan Pokorný, Ph.D., milan.pokorny@mff.cuni.cz

RNDr. Jaroslav Hron, Ph.D., jaroslav.hron@mff.cuni.cz

RNDr. Miroslav Bulíček, Ph.D., miroslav.bulicek@mff.cuni.cz

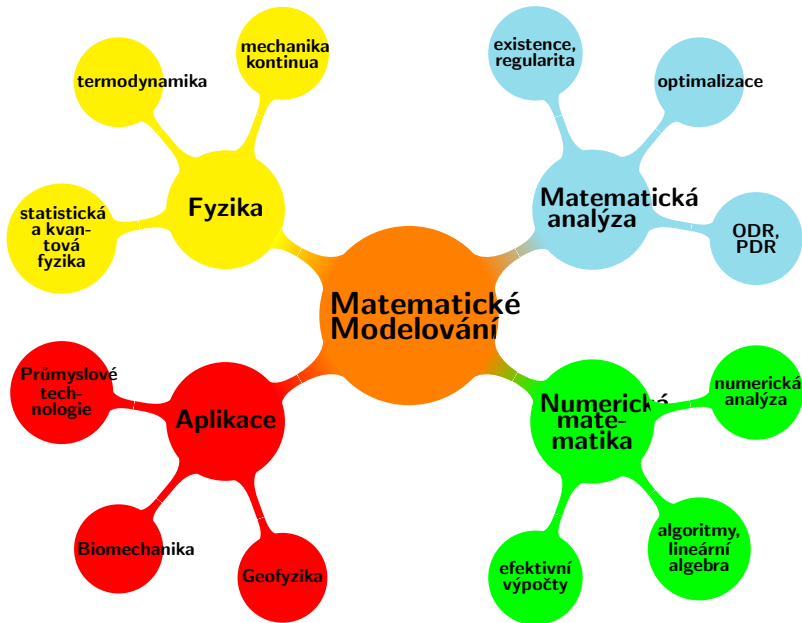
RNDr. Michal Pavelka, Ph.D., pavelka@karlin.mff.cuni.cz

Mgr. Vít Průša, Ph.D., vit.prusa@mff.cuni.cz

RNDr. Ondřej Souček, Ph.D., ondrej.soucek@mff.cuni.cz

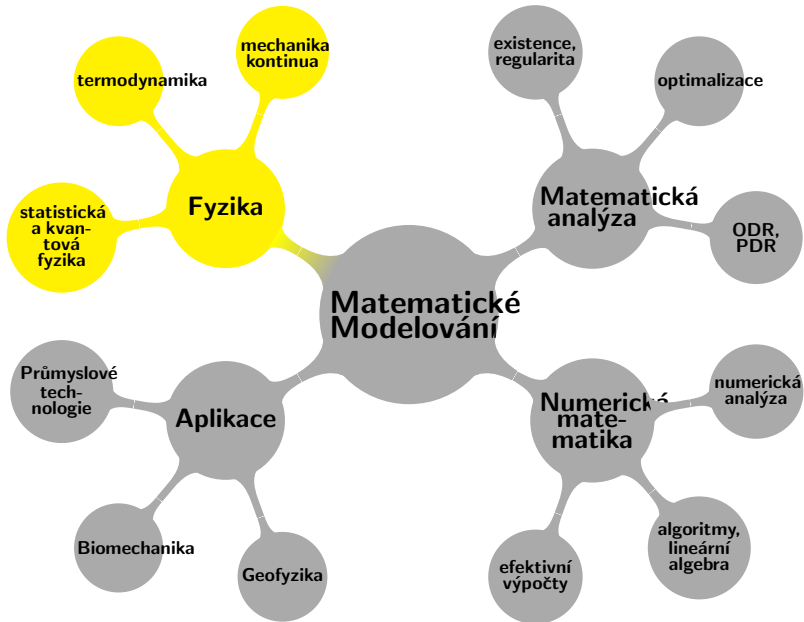
RNDr. Karel Tůma, Ph.D., ktuma@karlin.mff.cuni.cz

# Matematické modelování





# Proudění vody – fyzika



# Proudění vody – matematický model

Zákony zachování hmotnosti a hybnosti:

$$m = \int_P \rho \, dv = konst$$

$$F = ma = \frac{d}{dt} \int_P \rho \mathbf{v} \, dv$$

Experimenty s materiálem:

$$F = \int_{\partial P} \mathbf{t}(\mathbf{n}) \, da + \int_P \mathbf{b} \, dv$$

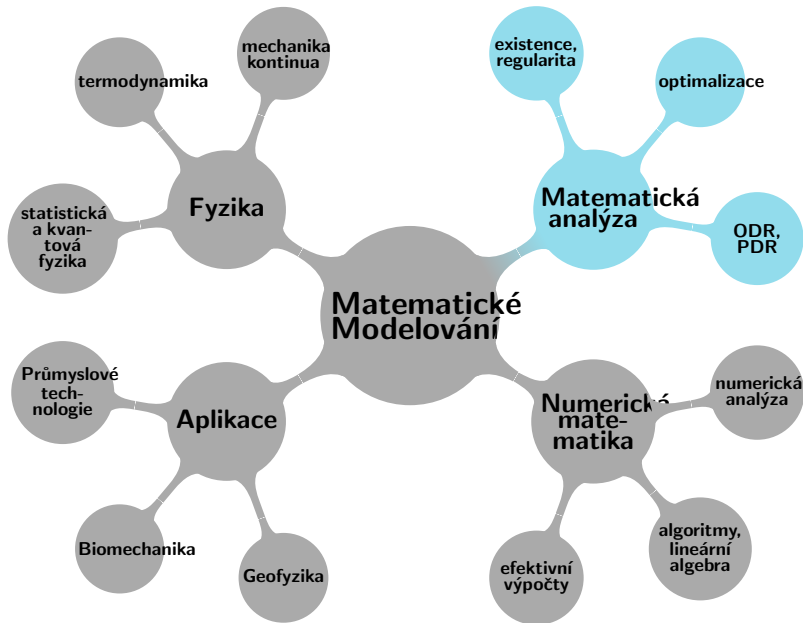
$$\mathbf{t}(\mathbf{n}) = -p\mathbf{n} + \mu \left( \nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T \right); \quad \mathbf{b} = \mathbf{0}$$

Navierovy-Stokesovy rovnice:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho (\nabla \mathbf{v}) \mathbf{v} - \mu \Delta \mathbf{v} + \nabla p = \mathbf{0}$$

# Proudění vody – matematická analýza



# Proudění vody – vlastnosti matematického modelu

Mají rovnice proudění vody nějaké řešení?

- ▶ Otázka zní spíš kdy/za jakých podmínek na vstupu a výstupu.

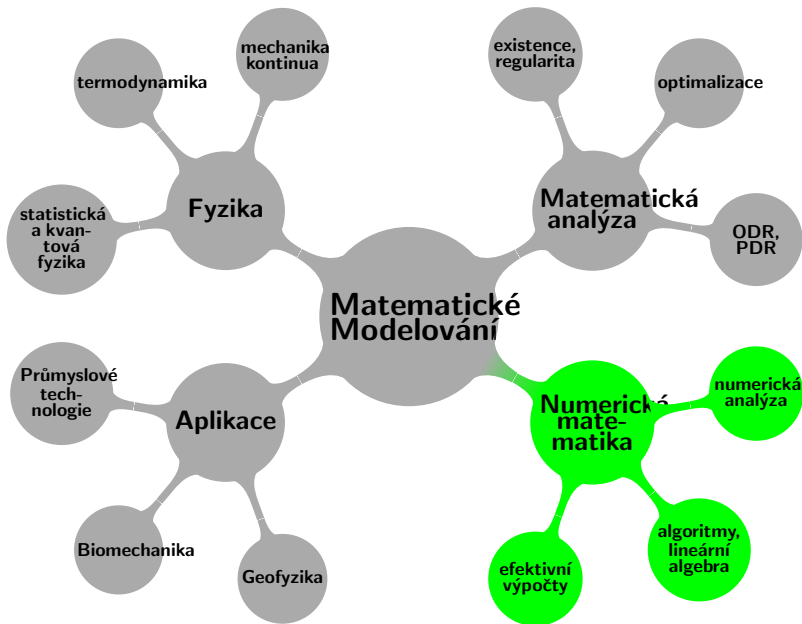
Mají rovnice proudění vody dobré kvalitativní vlastnosti?

- ▶ Voda teče směrem k nižšímu tlaku.
- ▶ Co vteče to vyteče.

Kolik mají rovnice proudění vody řešení?

- ▶ Problémy tisíciletí: Win a million dollars with maths, No. 3: The Navier-Stokes equations

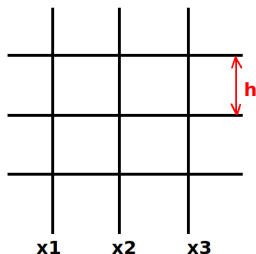
# Proudění vody – numerická matematika



# Proudění vody – výpočty

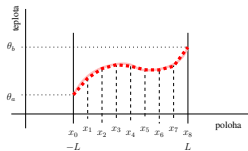
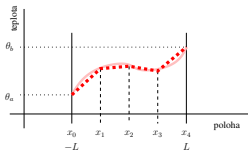
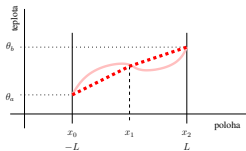
Aproximace funkce pomocí hodnot v konečně mnoha bodech.

$$\left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{x=x_i} \approx \frac{v(x_{i+1}) - v(x_i)}{h}$$
$$\left. \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right|_{x=x_i} \approx \frac{v(x_{i+1}) - 2v(x_i) + v(x_{i-1}))}{h^2}$$
$$\left. \frac{\partial v}{\partial t} \right|_{x=x_i} \approx \frac{v(x_{i+1}) - v(x_i)}{dt}$$



Co se stane pokud budeme počet bodů navyšovat do nekonečna? Bude se aproximace blížit k přesnému řešení původní úlohy?

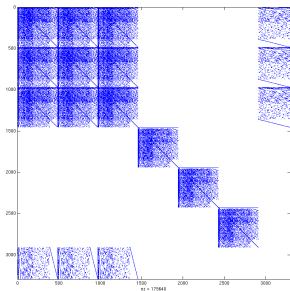
# Proudění vody – výpočty



# Proudění vody – výpočty

Úloha z lineární algebry

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta(x_1) \\ \theta(x_2) \\ \theta(x_3) \\ \theta(x_4) \\ \vdots \\ \theta(x_{n-2}) \\ \theta(x_{n-1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_a \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \theta_b \end{bmatrix}$$





# Proudění vody – výpočty

- ▶ Počítače
- ▶ A jak velkou soustavu lineárních diferenciálních rovnic dokážete řešit?
- ▶ Lepší algoritmy versus výkonnější hardware
- ▶ Gausova eliminace versus sdružené gradienty
- ▶ Role zaokrouhlovacích chyby ve výpočtech

běžné pc 4 – 8 jader

**Sněhurka** Karlínský klastr matematické sekce, 224 jader

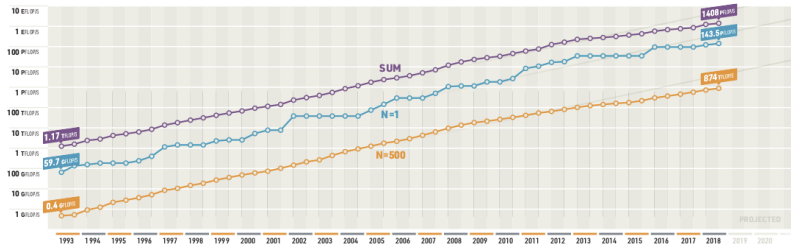
**Anselm** Ostravský superpočítač Anselm, 3 312 jader

**Salomon** Ostravský superpočítač Salomon, 76 896 jader (#214), 1,46 PFLOPs

**Piz Daint** nejvýkonnější superpočítač v Evropě, 387 872 (#5), 21,2 PFLOPs

**Summit** nejvýkonnější světový superpočítač, USA, 2 397 824 jader, 143,5 PFLOPs (~10MW)

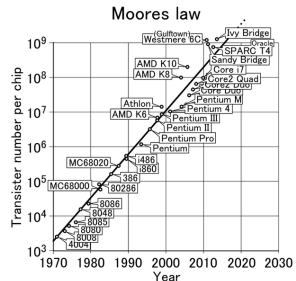
## PERFORMANCE DEVELOPMENT

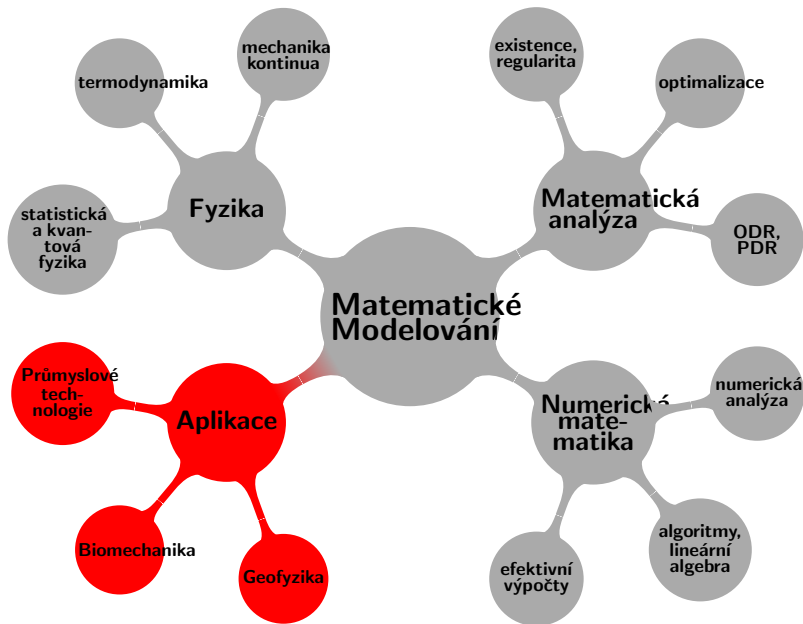




Sunway TaihuLight (#3), Čína, 93 PFLOPs

Gordon Moore (1965): *Počet tranzistorů, které mohou být umístěny na integrovaný obvod, se při zachování stejné ceny zhruba každých 18 měsíců zdvojnásobí.*





# Modelování složitých materiálů

- ▶ Biologické tekutiny (krev, sinoviální tekutiny)
- ▶ Měkké tkáně (cévní stěny, chrupavky)
- ▶ Geofyzikální materiály (magma, láva, asfalt, ledovce)
- ▶ Materiály s tvarovou pamětí
- ▶ Materiály procházející velkými nebo plastickými deformacemi
- ▶ Viskoelastické materiály (asfalt, roztoky polymerů)

- ▶ Teoretická, numerická a počítačová analýza nelineárních problémů termomechaniky kontinua
- ▶ Odvození matematických modelů
- ▶ Problémy interakce různých procesů (proudění - deformace - teplo)
- ▶ Chemické procesy



# Asfalt - Tekutina nebo pevná látka? nejdéle běžící laboratorní experiment

Rok	Událost
1930	Odzátkováno
1938	1. kapka
1947	2. kapka
1954	3. kapka
1962	4. kapka
1970	5. kapka
1979	6. kapka
1988	7. kapka
2000	8. kapka
2014	9. kapka



T. Parnell, University of Queensland



<http://www.thetenthwatch.com/>

- ▶ mnoho materiálů se chová různě pro různé prostorové a časové škály
- ▶ "stárnoucí" a chemicky reagující materiály

# Modelování výroby skleněných desek

- ▶ zákony zachování veličin, materiálové vztahy, třífázové proudění,...
- ▶ vhodná formulace úlohy, okrajové podmínky, počáteční podmínky, ...
- ▶ optimalizace tvaru, materiálu, okrajových podmínek, ...

# Modelování výroby skleněných desek



# Proudění krve - Nenewtonovské tekutiny

- ▶ Složení krve - plasma (92% voda, proteiny, globulíny, ionty); pevné částice (červené krvinky, bílé krvinky, krevní destičky)
- ▶ Chemické reakce (koagulace)
- ▶ Interakce s okolím (cévní stěny)

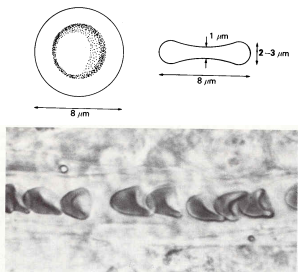


Fig. 13. Photomicrograph showing deformation of human red cells *in vivo* in a cutaneous capillary of about 7 μm diameter. (From Skalak and Brånemark, 1969.)

**Obrázek:** Červené krvinky: deformovatelné pružné disky, elastická buněčná stěna.

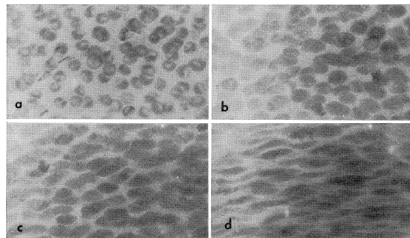
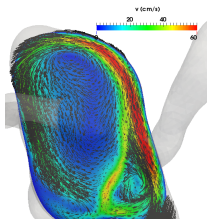
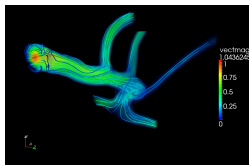
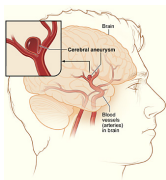


Fig. 2. Human red cells dispersed in highly viscous medium and flowing at different rates of shear. Strobe photomicrographs taken in a transport cone and plate viscometer. Cells at rest (a) and at 11.5 sec<sup>-1</sup> (b), 46 sec<sup>-1</sup> (c), and 230 sec<sup>-1</sup> (d) rates of shear.

**Obrázek:** Červené krvinky při různých hodnotách smyku. Shlukování červených krvinek, vznik tzv. rouleaux a jejich rozpad.

# Výpočet proudění v reálných datech - mozkové aneurysma

- ▶ reálné/měřené geometrie, nepřesně změřené vstupní rychlosti, ...
- ▶ kompromisy modelu a velikosti úlohy, ...
- ▶ souhlas pacienta, zákony, ...



# Výpočet proudění v reálných datech - mozkové aneurysma

# Výpočet proudění v reálných datech - mozkové aneurysma

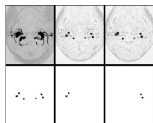
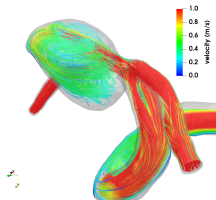
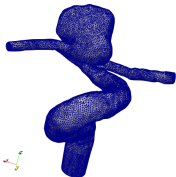
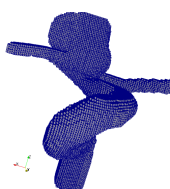
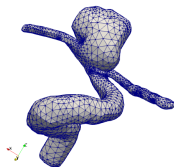
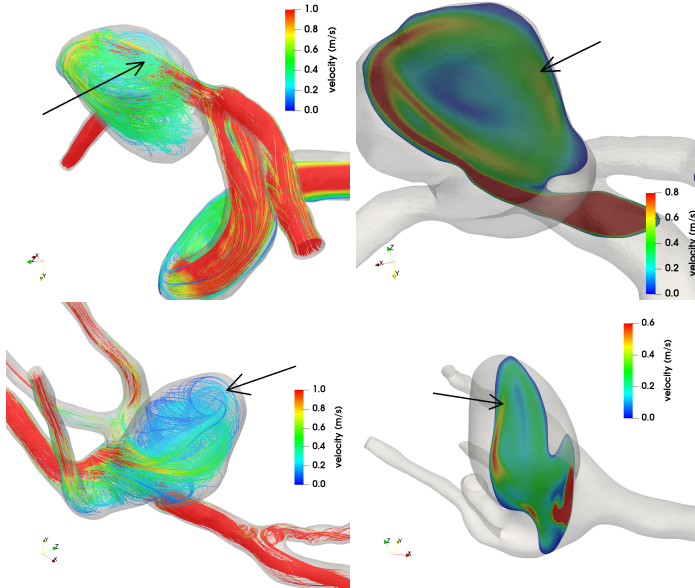


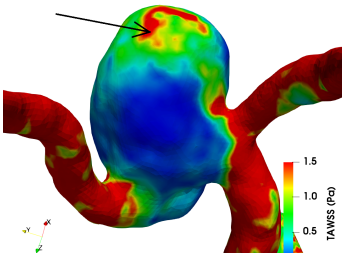
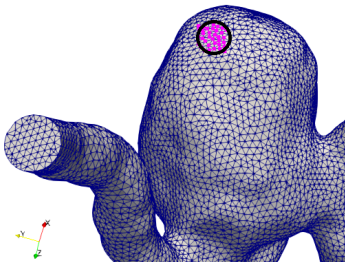
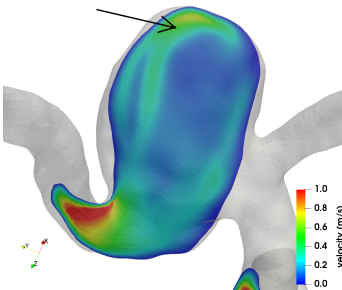
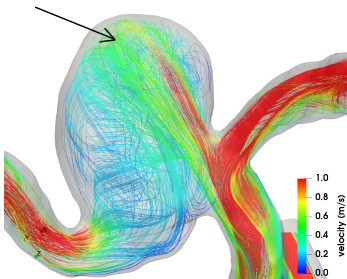
Figure 9b: CT image processing.



# Prasklá aneuryzmata



# Ruptured aneurysms



# Bakalářský program Matematické modelování

- ▶ nový mezioborový bakalářský studijní program spojující matematiku, fyziku a výpočty na počítačích
- ▶ vhodný pro následné studium navazujících magisterských programů:

## na matematice:

- Matematické modelování ve fyzice a technice
- Numerická a výpočtová matematika

## na fyzice:

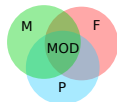
- Matematické a počítačové modelování ve fyzice
- Geofyzika
- Astronomie a astrofyzika
- Meteorologie a klimatologie



**matfyz**

otevřává nový bakalářský program

**M**atematické  
**M**odelování



kombinace matematiky, fyziky a počítačových metod

[bcmo.d.karlin.mff.cuni.cz](http://bcmo.d.karlin.mff.cuni.cz)

<http://bcmo.d.karlin.mff.cuni.cz>