ALGEBRA II (NMAG 202)
OPRAVNÉ ZÁPOČTOVÉ ÚLOHY

(1) Spočtěte stupeň rozkladového nadtělesa T polynomu $x^5 - 11 \in \mathbb{Q}[x]$ a najděte bázi T jakožto vektorového prostoru nad $\mathbb{Q}$.
(5 bodů)

(2) Dokažte, že každá čtyřprvková grupa je isomorfní buď grupě $\mathbb{Z}_4$ nebo $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.
(5 bodů)

(3) Dokažte, že grupa $(\mathbb{Q}, +, -, 0)$ není cyklická, ale každá její konečně generovaná podgrupa cyklická je.
(5 bodů)

(4) Najděte všechny permutace $\sigma \in S_6$ takové, že $\sigma \circ (1\ 2\ 3) = (1\ 2\ 3) \circ \sigma$.
(5 bodů)

(5) Popište všechny permutace $\pi \in S_7$ takové, pro které existuje $\sigma \in S_7$, že $\pi = \sigma^2$.
(5 bodů)

(6) Spočtěte, kolika způsoby lze obarvit políčka šachovnice o rozměrech $n \times n$ černou a bílou barvou. Dvě obarvení považujeme za totožná, pokud lze jedno z druhého dostat otočením šachovnice.
(5 bodů)

(7) Kolika způsoby lze obarvit stěny osmistěnu n barvami? Dvě obarvení považujeme za totožná, pokud lze jedno z druhého dostat otočením osmistěnu.
(5 bodů)

(8) Najděte tříprvkovou množinu generátorů algebry $(\mathbb{Z}, +) \times (\mathbb{Z}, +)$ (jakožto algebry s jednou binární operací). Dokažte, že dvouprvková množina generátorů neexistuje.
(5 bodů)

(9) Spočtěte nejmenší normální podgrupu permutační grupy S_5, která obsahuje cyklus (1 2 3 4).
(5 bodů)

(10) Které z následujících faktorokruhů jsou tělesa: a) $\mathbb{Z}[i]/5\mathbb{Z}[i]$, b) $\mathbb{Z}[i]/7\mathbb{Z}[i]$? Proč?
(5 bodů)