

ALGEBRA I (NMAG201) – TEST, 19. PROSINCE 2014

**Tvrzení a definice pečlivě formulujte včetně všech předpokladů. Odpovědi na otázky zdůvodněte. Pokud používáte nějaké netriviální tvrzení z přednášky, uveďte explicitně odkaz (často budete vyzváni, abyste všechna použitá tvrzení zformulovali). Časový limit je 150 minut.**

- (1) Definujte Eulerovu funkci a napište vzorec pro její výpočet.

(3 body)

- (2) Formulujte Čínskou větu o zbytcích.

(3 body)

- (3) Definujte Gaussův obor. Uveďte příklad oboru integrity, který je Gaussův, a příklad oboru integrity, který Gaussův není.

(4 body)

- (4) Definujte formální derivaci polynomu v jedné neurčité. Může se stát, že má nekonstatní polynom v  $T[x]$ , kde  $T$  je těleso, nulovou formální derivaci? Pokud ne, zdůvodněte. Pokud ano, uveďte příklad.

(5 bodů)

(5) Jaké jsou poslední dvě cifry čísla  $3^{9^{2015}}$ ?

(5 bodů)

(6) Platí  $4x^2 - 3 \mid x^2 + 1$  v oboru a)  $\mathbb{Q}[x]$ , b)  $\mathbb{Z}_5[x]$ , c)  $\mathbb{Z}_7[x]$ ?

(5 bodů)

(7) Kolik prvků řádu 5 obsahují následující grupy?

- (a)  $(S_5, \circ, ^{-1}, \text{id})$ ,
- (b)  $(\mathbb{Z}_{10}, +, -, 0)$ .

(5 bodů)

(8) Je obor integrity  $\mathbb{Z}[[x]]$  obor hlavních ideálů? Odpověď zdůvodněte.

(5 bodů)

- (9) Najděte všechna celá čísla  $x$  taková, že  $x^2 \equiv -x \pmod{2015}$ .  
(7 bodů)
- (10) Je symetrická grupa  $S_n$  pro  $n \geq 2$  generovaná  
(a) množinou všech cyklů (tj. permutací tvaru  $(a_1 \ a_2 \ \dots \ a_\ell)$ , kde  $a_1 \dots a_\ell$  jsou po dvou různé prvky množiny  $\{1, \dots, n\}$ )  
(b) množinou všech transpozic?  
(12 bodů)
- (11) Nechť  $R$  je obor integrity. Formulujte kritérium pro určení násobnosti kořenu polynomu  $f \in R[x]$  pomocí formálních derivací  $f$ .  
Najděte všechna reálná čísla  $a$ , pro které má polynom  $x^3 - ax + 1$  v komplexních číslech násobný kořen. Svůj výsledek zdůvodněte.  
(13 bodů)
- (12) Rozložte v oboru  $\mathbb{Z}_{13}[x]$  polynomy  $x^8 - 1$  a  $x^{13} - 1$  na součin ireducibilních prvků. Definujte pojem prvočinitele a rozhodněte, zda jsou ireducibilní prvky z těchto rozkladů prvočinitelé. Pokud ano, dokažte. Pokud ne, ukažte příklad, ze kterého bude jasné, že o prvočinitel nejde.  
(13 bodů)
- (13) Přesně formulujte a dokažte charakterizaci Gaussových oborů pomocí existence NSD a podmínky na řetězce dělitelů.  
(15 bodů)

