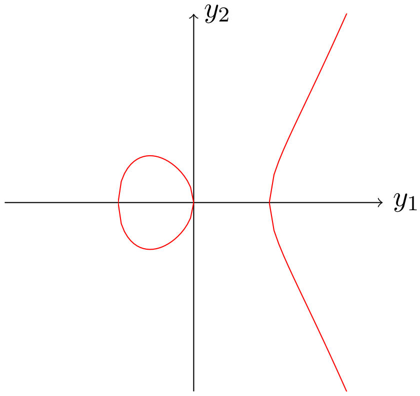
# ROVINNÉ KŘIVKY

JAN ŠŤOVÍČEK

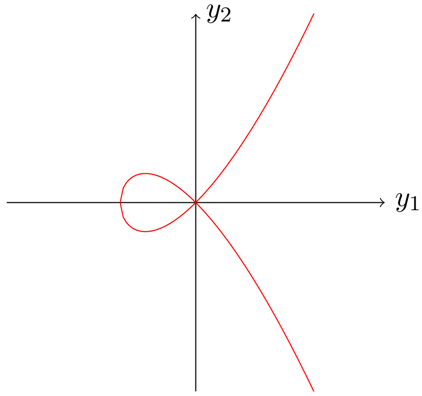
Můžeme začít definicí, protože ta jednoduchá. Rovinná křivka je prostě nadplocha ve dvoudimenzionálním prostoru. Nejdříve se budeme zabývat afinní verzí.

**Definice.** *Afinní rovinnou křivkou* rozumíme $K$-algebraickou množinu tvaru $C = \mathrm{V}(\{f\}) \subseteq \mathbb{A}^2(\overline{K})$, kde $f \in K[y_1, y_2]$ je nekonstantní polynom.

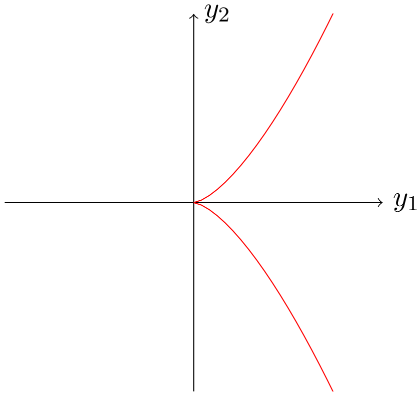
*Příklad.* Uvažujme $K = \mathbb{R}$.




$\mathrm{V}(\{y_2^2 - y_1^3 + y_1\})$




$\mathrm{V}(\{y_2^2 - y_1^3 - y_1^2\})$




$\mathrm{V}(\{y_2^2 - y_1^3\})$

Je-li $C = \mathrm{V}(\{f\})$ rovinná křivka, pak podle věty o nulách

$$\mathrm{I}(C) = \mathrm{I}(\mathrm{V}(\{f\})) = \sqrt{(f)}.$$

Jak již bylo řečeno v tvrzení 33, radikál hlavního ideálu v okruhu polynomů nad tělesem se dostane následovně. Vememe rozklad polynomu $f$ na

Verze z 27. dubna 2016.

prvočinitele,
$$f = \lambda \cdot p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdots p_r^{e_r}$$
(kde $\lambda \in K^*$ je invertibilní v $K[y_1, y_2]$) a položíme
$$g = p_1 \cdot p_2 \cdots p_r.$$
Pak $\sqrt{(f)} = (g)$. Z výše uvedeného plyne, že afinní rovinná křivka je zadána *bezčtvercovým polynomem* (tj. takovým, který není dělitelný čtvercem žádného ireducibilního polynomu) a navíc takový polynom $g$ je určen jednoznačně až na nenulový skalární násobek. Shrňme celou diskuzi do dvou pozorování.

*Pozorování.* Připomeňme, že polynomy $g_1, g_2 \in K[y_1, y_2]$ jsou asociované, $g_1 \,||\, g_2$, pokud $g_1 = \lambda \cdot g_2$ pro nějaké $\lambda \in K^*$. Pak přiřazení $g \mapsto \mathrm{V}(\{g\})$ určuje bijekci
$$\{\text{bezčtvercové nekonst. polynomy} g\}/\,|| \longleftrightarrow \{\text{afinní rovinné křivky}\}.$$

*Pozorování.* Je-li $g = p_1 \cdot p_2 \cdots p_r$ bezčtvercový, rychle nahlédneme, položíme-li $C_i = \mathrm{V}(\{p_i\})$ pro $i = 1, \dots, r$, že
$$C = C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_r$$
je rozklad $C$ na ireducibilní komponenty ve smyslu Věty 8.

*Poznámka.* Fulton v kapitole 3.1 zavádí rovinnou křivku poněkud obecněji. Netrvá na bezčtvercových polynomech a exponentům u prvočinitelů polynomu říká „násobnosti komponent“.

Zcela analogicky je možné definovat projektivní rovinné křivky.

**Definice.** *Projektivní rovinná křivka* je $K$-algebraická množina tvaru $C = \mathrm{V}_{\mathrm{proj}}(\{F\}) \subseteq \mathbb{P}^2(\overline{K})$, kde $F \in K[x_0, x_1, x_2]$ je nekonstantní homogenní polynom.

*Pozorování.* Rozložíme-li homogenní polynom $F$ na prvočinitele v okruhu $K[x_0, x_1, x_2]$ jako $F = \lambda \cdot P_1^{e_1} \cdot P_2^{e_2} \cdots P_r^{e_r}$, pak jsou všechny $P_1, P_2, \dots, P_r$ také homogenní. To se nahlédne tak, že vezmeme rozklad na prvočinitele
$$F_* = \lambda \cdot p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdots p_{r-1}^{e_{r-1}}.$$
Pak si snadno rozmyslíme, že $P_i := p_i^*$ je ireducibilní pro $i = 1, \dots r-1$ a že pro nějaké $e_r \geq 0$ a $P_r := x_0$ máme
$$F = (F_*)^* \cdot x_0^{e_r} = \lambda \cdot P_1^{e_1} \cdot P_2^{e_2} \cdots P_r^{e_r}.$$

*Pozorování.* Z naprosto stejného důvodu jako v afinním případě určuje přiřazení $G \mapsto \mathrm{V}_{\mathrm{proj}}(\{G\})$ bijekci
$$\{\text{bezčtvercové homog. nekonst. polynomy } G\}/\,|| \longleftrightarrow \{\text{proj. rovinné křivky}\}.$$

Je-li $G = P_1 \cdot P_2 \cdots P_r$ rozklad homogenního nekonstantního bezčtvercového polynomu na prvočinitele a označíme-li $C = \mathrm{V}_{\mathrm{proj}}(\{G\})$ a $C_i = \mathrm{V}_{\mathrm{proj}}(\{P_i\})$, pak také
$$C = C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_r$$
je rozklad $C$ na ireducibilní komponenty ve smyslu Věty 28.

Nejjednodušším příkladem rovinné křivky (ať už v afinním nebo v projektivním případě) je přímka, tj. křivka definované polynomem stupně 1. Obecně můžeme definovat:

**Definice.** *Stupněm* (afinní nebo projektivní) rovinné křivky $C$ rozumíme celkový stupeň definujícího bezčtvercového polynomu. V případě křivek stupně 2 nebo 3 mluvíme o *kvadratických* resp. *kubických* křivkách.

Dále se budeme zabývat singularitami. Pro zbytek textu budeme předpokládat, že těleso $K$ *je algebraicky uzavřené.*

Křivky na druhém a třetím obrázku jsou v počátku souřadnic „zašmodrchané“. Matematicky to znamená, že mají v počátku souřadnic singularitu. Singularity jsou důležité jak z geometrického, tak z algebraického hlediska a část pokročilejší teorie se zabývá metodami, jak se singularit zbavit. Nesingulární křivky se totiž chovají mnohem lépe než singulární. Nesingulární kvadratické křivky se nazývají *kuželosečky* a nesingulární kubické křivky jsou tzv. *eliptické křivky.*

Nyní uvedeme formální definici, nejprve opět v afinním případě.

**Definice.** Nechť $C = \mathrm{V}(\{f\}) \subseteq \mathbb{A}^2(\overline{K})$ je afinní rovinná křivka, kde $f$ je bezčtvercový, a nechť $P \in C$. Pak $P$ je *singulární bod* křivky $C$, pokud
$$\frac{\partial f}{\partial y_1}(P) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y_2}(P).$$
V opačném případě se $P$ nazývá *nesingulární.*

Křivka $C$ se nazývá *nesingulární*, pokud obsahuje pouze nesingulární body.

U nesingulárních bodů lze dobře definovat tečnu, která na obrázcích přesně odpovídá intuitivní představě. Tady je ovšem třeba varovat, že všechny výpočty technicky vzato musíme provádět nad komplexními čísly, protože $\mathbb{R}$ není algebraicky uzavřené. Na obrázky je tedy nutné nahlížet s určitou opatrností.

**Definice.** Nechť $C = \mathrm{V}(\{f\})$ je afinní rovinná křivka, kde $f$ je bezčtvercový, a nechť $P = (a, b) \in C$ je nesingulární bod. Pak přímka
$$T_P = \mathrm{V}(\{\frac{\partial f}{\partial y_1}(P) \cdot (y_1 - a) + \frac{\partial f}{\partial y_2}(P) \cdot (y_2 - b)\})$$
se nazývá *tečna* ke křivce $C$ v bodě $P$.

Jak je to s tečnami v singulárních bodech? Druhý obrázek naznačuje, že v singulárních bodech může být více přímek, které by se daly považovat za tečny. I to má matematické opodstatnění.

Nechť totiž $P \in C = \mathrm{V}(\{f\})$ je bod na křivce. Bez újmy na obecnosti můžeme křivku posunout (tj. substitucí změnit souřadnice) tak, aby $P = (0, 0)$ byt počátek souřadnic. Pak $f(P) = 0$ znamená, že $f$ nemá absolutní člen. Parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial y_1}(P)$ a $\frac{\partial f}{\partial y_2}(P)$ nám vrátí přesně koeficienty u $y_1$ resp. u $y_2$. Tj. máme:

*Pozorování.* Je-li $C = \mathrm{V}(\{f\})$ afinní rovinná křivka a $P = (0, 0) \in C$, pak $P$ je singulární, právě když $f$ má pouze členy stupňů alespoň 2.

*Pozorování.* Důležitým důsledkem je, že nesingulární bod $P \in C$ může ležet jen v jedné z ireducibilních komponent v rozkladu $C = C_1 \cup \cdots \cup C_r$. Stále bez újmy na obecnosti $P = (0, 0)$. Nechť totiž $f = p_1 \cdots p_r$ je bezčtvercový polynom definující $C$. Když pak $P$ leží ve dvou komponentách, řekněme

$P \in C_1$ a $P \in C_2$, pak $p_1$ a $p_2$ nemohou mít absolutní člen, a tedy $f$ musí mít členy stupně alespoň 2. Jinými slovy, $P$ je singulární bod.

Je-li $P = (0,0) \in \mathrm{V}_{\mathrm{proj}}(\{f\})$ singulární bod, můžeme psát $f = F_m + F_{m+1} + \cdots + F_d$, kde $F_i$ je homogenní polynom z $K[y_1, y_2]$ stupně $i$ a $F_m, F_d \neq 0$. Očividně $d$ je potom stupeň $f$ a číslu $m$ se říká *násobnost bodu $P$*. Tečny nám ozřejmí následující lemma, které najde uplatnění i později.

**Lemma 36.** *Nechť $F \in K[x_0, x_1]$ je homogenní polynom ve dvou neurčitých nad $K = \overline{K}$. Pak $F$ lze vyjádřit jako součin homogenních lineárních polynomů.*

*Důkaz.* Použije se stejný trik jako u pozorování, že prvočinitele homogenního polynomu jsou homogenní. Jelikož $K = \overline{K}$, lze polynom $F_* \in K[y_1]$ rozložit na součin lineárních členů

$$F_* = \lambda \cdot (y_1 - a_1)^{e_1} \cdot (y_1 - a_2)^{e_2} \cdots (y_1 - a_r)^{e_r}.$$

Pak pro nějaké $s \geq 0$ máme

$$F = (F_*)^* \cdot x_0^s = \lambda \cdot (x_1 - a_1 x_0)^{e_1} \cdot (x_1 - a_2 x_0)^{e_2} \cdots (x_1 - a_r x_0)^{e_r} \cdot x_0^s. \quad \square$$

Speciálně pro $f = F_m + F_{m+1} + \cdots + F_d$ můžeme homogenní polynom $F_m$ rozložit jako

$$F_m = \lambda \cdot L_1^{e_1} \cdot L_2^{e_2} \cdots L_r^{e_r},$$

kde $e_1 + e_2 + \cdots + e_r = m$. Přímky

$$T_i = \mathrm{V}(\{L_i\}), \quad i = 1, \dots, r$$

se nazývají *tečny* k $C = \mathrm{V}(\{f\})$ v bodě $P = (0,0)$ a $e_i$ je *násobnost tečny* $T_i$.

Co se obrázků křivek týče, druhá křivka má v počátku souřadnic dvě jednoduché tečny $\mathrm{V}(\{y_1 - y_2\})$ a $\mathrm{V}(\{y_1 + y_2\})$. Třetí křivka dole má naproti tomu jednu dvojitou tečnu $\mathrm{V}(\{y_2\})$.

Nakonec vysvětlíme, jak je to se singulátními body projektivních křivek. V principu se k problému dá přistupovat jednoduše. Řekněme, že máme rovinnou projektivní křivku $C = \mathrm{V}_{\mathrm{proj}}(\{F\}) \subseteq \mathbb{P}^2(\overline{K})$, kde $F$ je bezčtvercový. Pak $\mathbb{P}^2(\overline{K})$ je pokryto obrazy vnoření

$$\varphi_i \colon \mathbb{A}^2(\overline{K}) \longrightarrow \mathbb{P}^2(\overline{K}),$$

kde $i \in \{0, 1, 2\}$. Tj. pro každý bod $P = (a\!:\!b\!:\!c) \in C$ existuje $i$ a $Q \in \mathbb{A}^2(\overline{K})$ tak, že $\varphi_i(Q) = P$. Můžeme tedy zkoumat, jestli bod $Q$ afinní rovinné křivky $\phi_i^{-1}(C) \subseteq \mathbb{A}^2(\overline{K})$ je singulární nebo ne a jeké má tečny.

Může se ovšem stát (a typicky se stane), že bod $P$ je v obrazu více než jednoho $\varphi_i$. Pak je nasnadě otázka, jestli to, že bod je singulární nebo ne, závisí na volbě $i \in \{0, 1, 2\}$. Níže ukážeme, že nezávisí, protože singulární body lze definovat přímo pro projektivní křivku.

**Definice.** Nechť $C = \mathrm{V}_{\mathrm{proj}}(\{F\}) \subseteq \mathbb{P}^2(\overline{K})$ je projektivní rovinná křivka, kde $F$ je bezčtvercový, a nechť $P \in C$. Pak $P$ je *singulární*, pokud

$$\frac{\partial F}{\partial x_0}(P) = \frac{\partial F}{\partial x_1}(P) = \frac{\partial F}{\partial x_2}(P) = 0.$$

V opačném případě se $P$ nazývá *nesingulární*.

Křivka $C$ se nazývá *nesingulární*, pokud obsahuje pouze nesingulární body.

Měli bychom ještě ukázat, že definice v projektivním případě je konzistentní s definicí v afinním případě. K tomu budeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že studovaný bod $P \in C$ leží v obrazu $\varphi_0\colon \mathbb{A}^2(\overline{K}) \longrightarrow \mathbb{P}^2(\overline{K})$, tj. že $P$ je tvaru $P = (a:b:1)$.

**Tvrzení 37.** *Nechť $C = \mathrm{V}_{\mathrm{proj}}(\{F\}) \subseteq \mathbb{P}^2(\overline{K})$ je projektivní rovinná křivka. Nechť $P = (a:b:1) \in C$ a $Q = (a,b) \in C_*$ je vzor $Q$ při $\varphi_0$. Pak $P$ je nesingulární bod $C$ (v projektivním smyslu), právě když $Q$ je nesingulární bod $C_*$ (v afinním smyslu).*

K důkazu se hodí následující lemma.

**Lemma 38** (Eulerova věta)**.** *Nechť $F \in K[x_0, x_1, \dots, x_n]$ je homogenní polynom stupně $d$. Pak*

$$x_0 \cdot \frac{\partial F}{\partial x_0} + x_1 \cdot \frac{\partial F}{\partial x_1} + \cdots + x_n \cdot \frac{\partial F}{\partial x_n} = d \cdot F.$$

*Důkaz.* Zderivujeme rovnost $F(tx_0, tx_1, \dots, tx_n) = t^d F(x_0, x_1, \dots, x_n)$ parciálně podle $t$ a dosadíme $t = 1$. $\square$

*Důkaz tvrzení 37.* Nechť $F$ je bezčtvercový polynom. Potom je bezčtvercový i polynom $F_*(y_1, y_2) = F(1, y_1, y_2)$. Dále z definice $Q$ je singularita $C_*$, právě když

$$F(1,a,b) = 0 \quad \text{a} \quad \frac{\partial F}{\partial x_1}(1,a,b) = \frac{\partial F}{\partial x_2}(1,a,b) = 0.$$

Z lemmatu 38 je poslední podmínka ekvivalentní

$$F(1,a,b) = 0 \quad \text{a} \quad \frac{\partial F}{\partial x_0}(1,a,b) = \frac{\partial F}{\partial x_1}(1,a,b) = \frac{\partial F}{\partial x_2}(1,a,b) = 0,$$

což přesně znamená, že $P$ je singulární bod $C$. $\square$

*Poznámka.* Podobně se dá také přímo v projektivní rovině zadefinovat tečna ke křivce v nesingulárním bodě. Toto ovšem přenecháme zájemcům coby cvičení.