ZOBRAZENÍ TĚLES V KOSOÚHLÉM PROMÍTÁNÍ

Martina Škorpilová

Matematicko-fyzikální fakulta Univerzity Karlovy

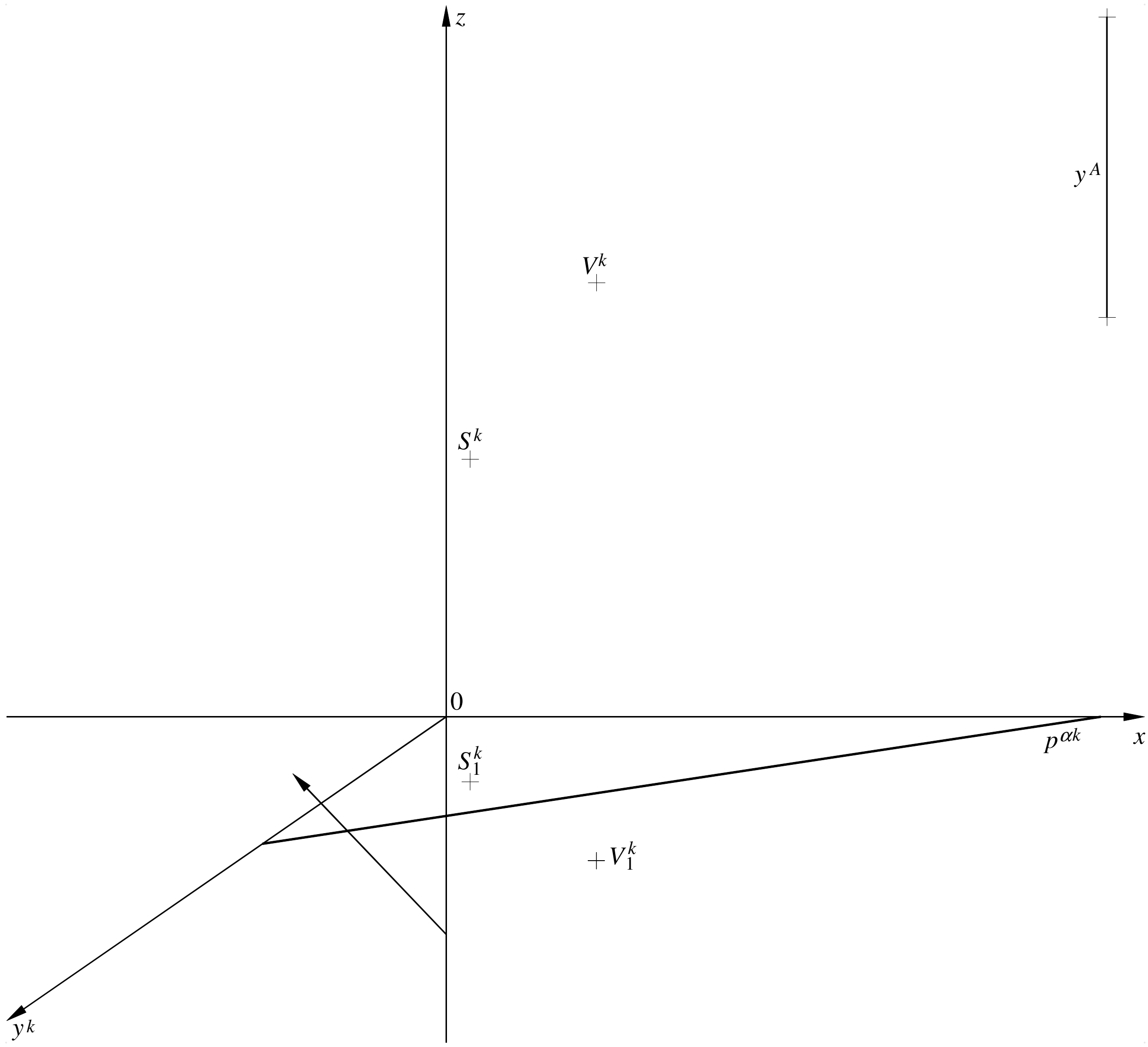
Praha

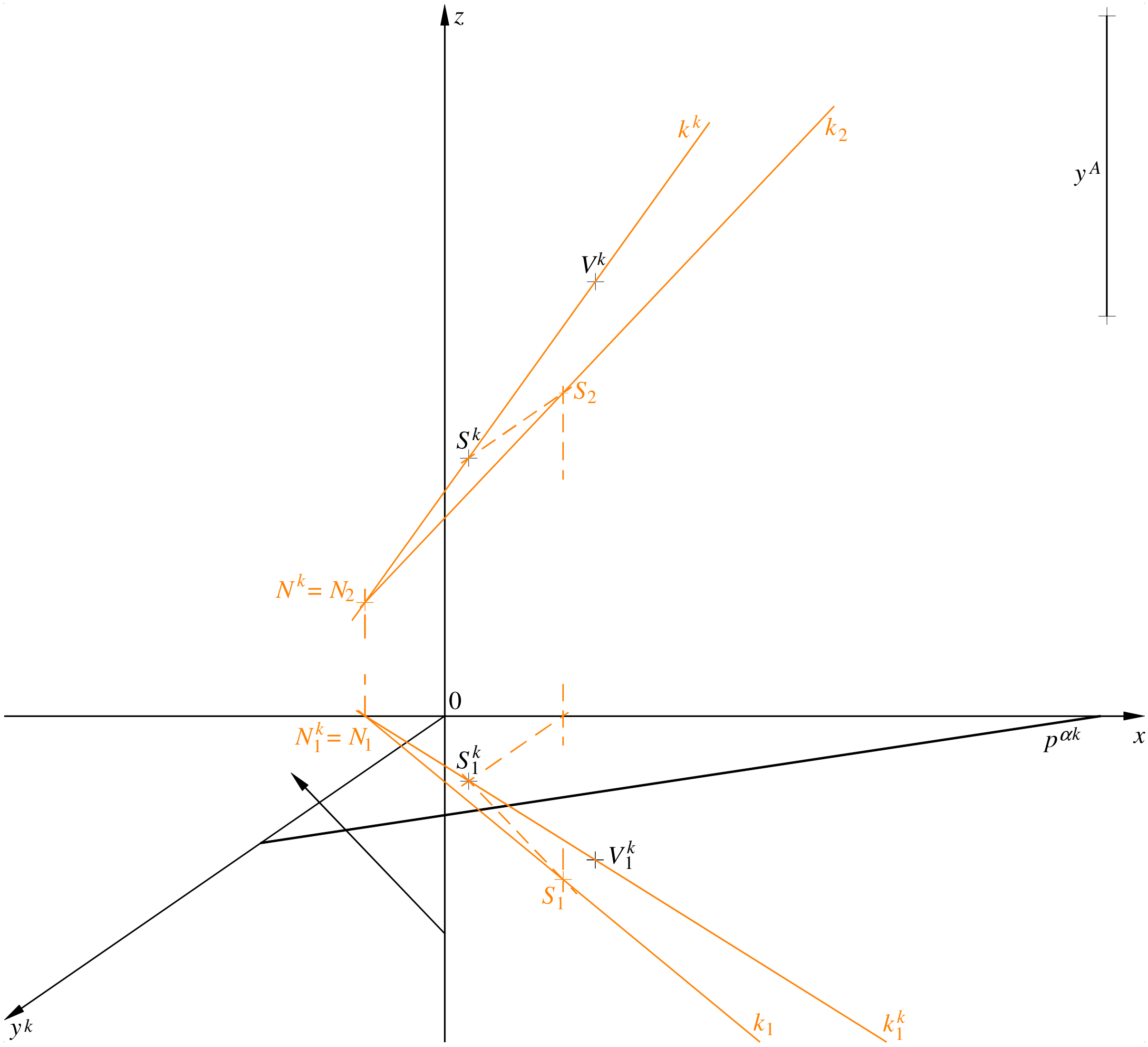
Tento text patří do série studijních materiálů z deskriptivní geometrie, které obsahují řešené úlohy na zobrazení těles či ploch.

Tentokrát se jedná o průměty těles v kosoúhlém promítání. K řešení dále uvedených úloh, které se na Matematicko-fyzikální fakultě Univerzity Karlovy konstruují v rámci *Semináře z deskriptivní geometrie II*, je přitom nutná znalost kosoúhlého promítání na úrovni látky probrané v předmětu *Deskriptivní geometrie II*. Ve slovních komentářích proto nejsou podrobně popisovány všechny základní kroky. Současně se očekává, že studenti jsou schopni úlohy řešit i jinými způsoby, než jaké jsou uvedeny na obrázcích.

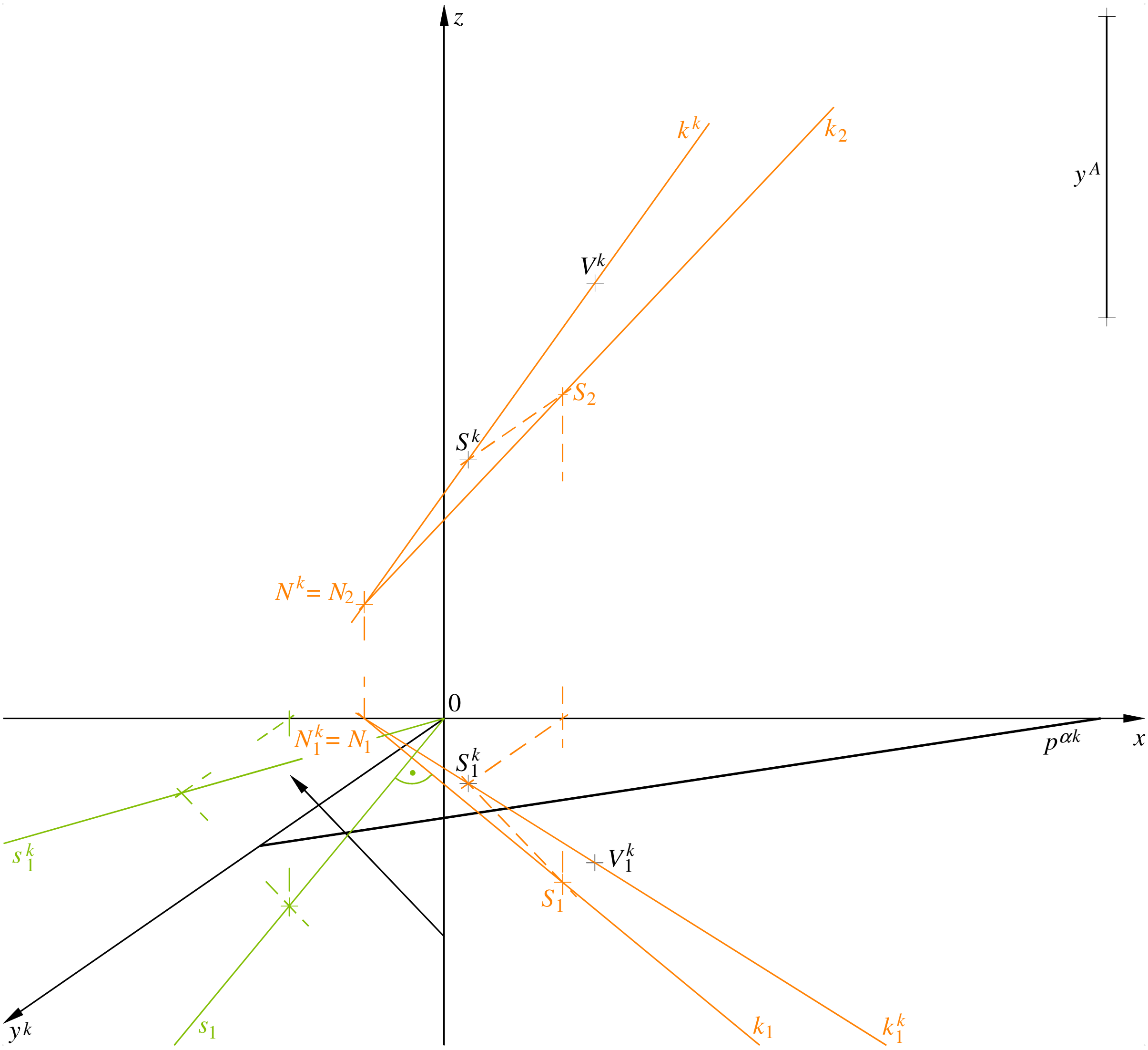
Studijní materiál by měl sloužit jak v hodinách na fakultě, tak také při samostatném domácím studiu.

Příklad 1. Sestrojte kosoúhlý průmět pravidelného šestibokého jehlanu $ABCDEFV$ s podstavou $ABCDEF$ o středu S. Vrchol podstavy A leží před nárysnou, od které má vzdálenost y^A, a dále leží v rovině α, která je kolmá na půdorysnu.





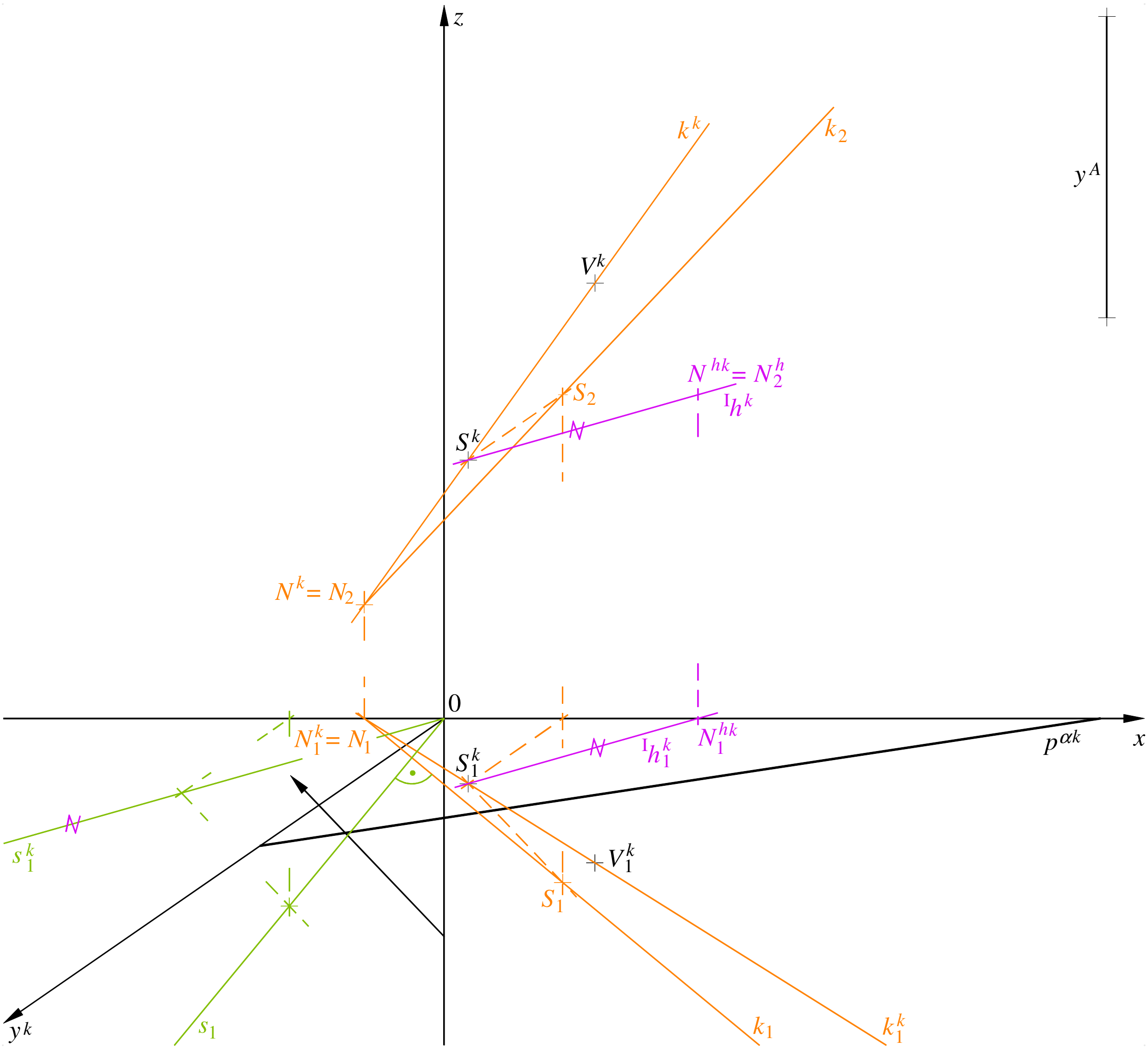
Přímka SV je kolmicí na rovinu podstavy. Sestrojíme její kosoúhlý průmět $k^k = S^kV^k$ a kosoúhlý půdorys $k_1^k = S_1^kV_1^k$. Dále nalezneme její sdružené průměty k_1 a k_2 v přidruženém Mongeově promítání, k čemuž využijeme například sdružené průměty S_1 a S_2 bodu S a sdružené průměty $N_1 = N_1^k$ a $N_2 = N^k$ bodu N, tj. $k_1 = S_1N_1$ a $k_2 = S_2N_2$.



Nyní sestrojíme rovinu β, která je rovinou podstavy tělesa. Rovina β prochází bodem S a je kolmá na přímku $k = SV$.

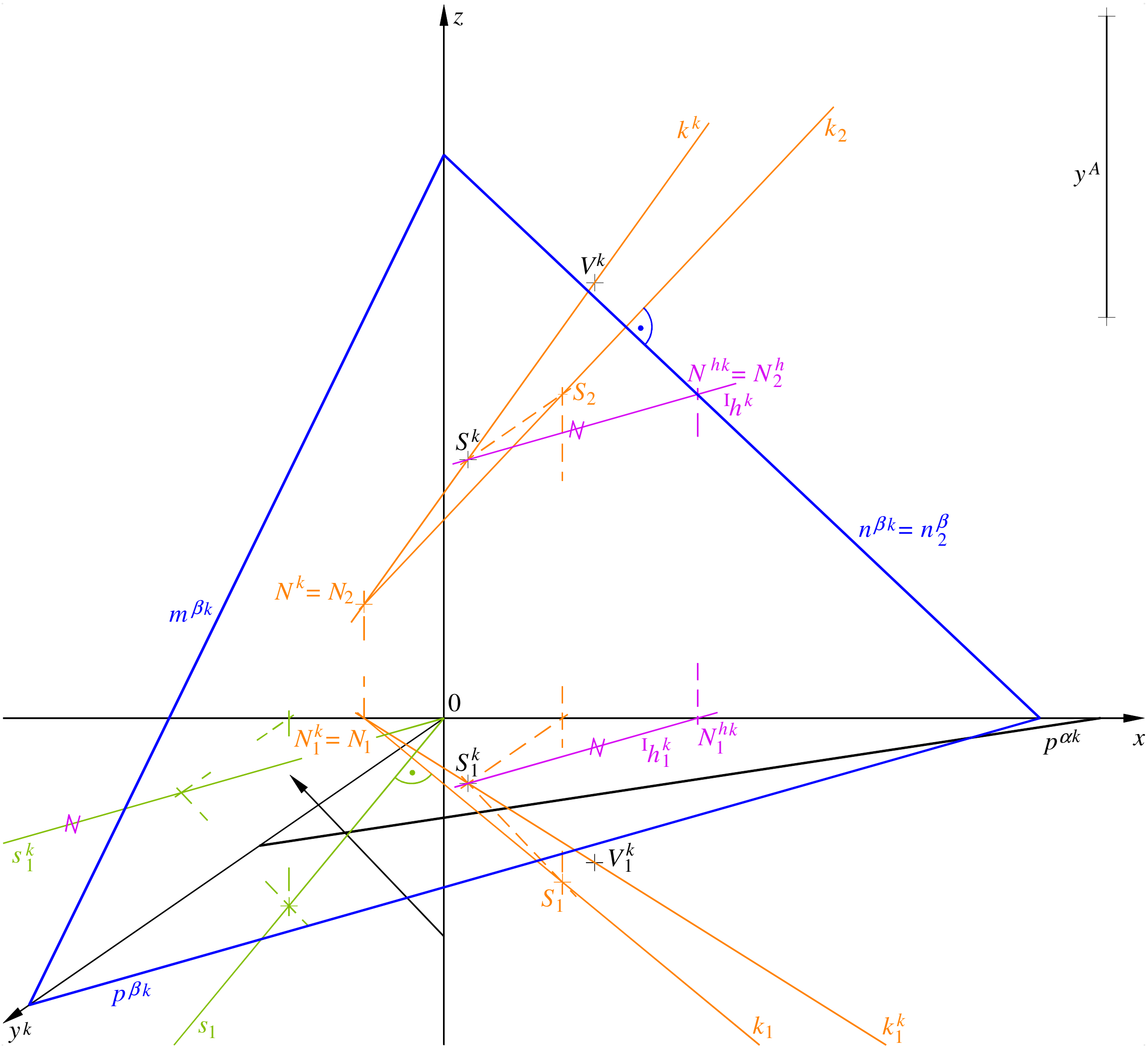
Nalezneme směr s_1^k kosoúhlého průmětu $p^{\beta k}$ její půdorysné stopy p^β, a tedy i směr kosoúhlých průmětů a kosoúhlých půdorysů jejích hlavních přímek první osnovy.

Pravoúhlý půdorys s_1 směru s je kolmý na pravoúhlý půdorys k_1 přímky k. Sestrojíme proto přímku s_1, která je kolmá na přímku k_1 a prochází např. počátkem 0 souřadnicového systému, a pomocí ní poté určíme kosoúhlý půdorys s_1^k přímky s_1.



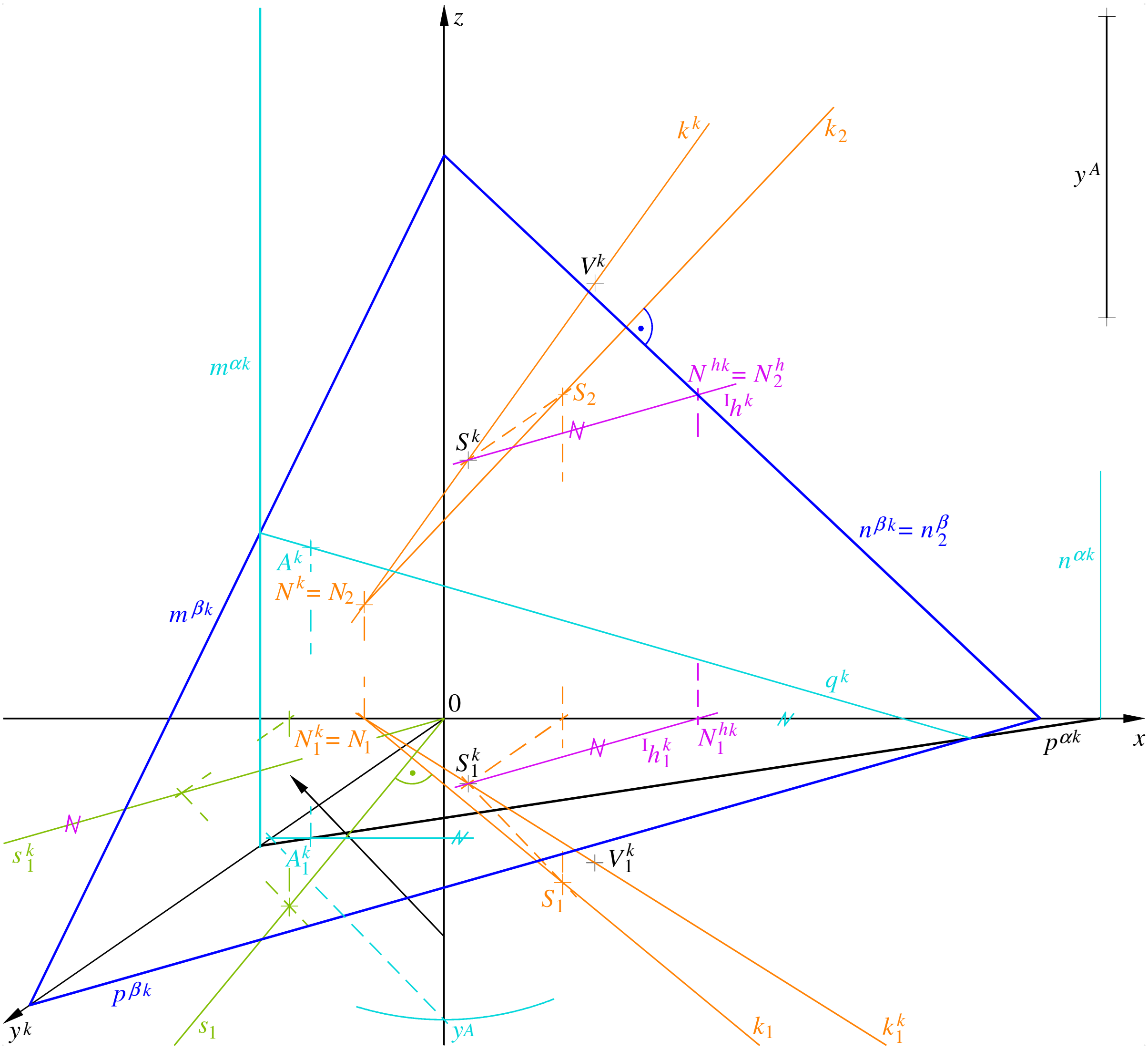
Bodem S povedeme hlavní přímku ${}^{I}h$ první osnovy roviny β. Její kosoúhlý průmět ${}^{I}h^k$ i kosoúhlý půdorys ${}^{I}h_1^k$ jsou přímky směru s_1^k, kosoúhlý průmět ${}^{I}h^k$ prochází kosoúhlým průmětem S^k bodu S, kosoúhlý půdorys ${}^{I}h_1^k$ kosoúhlým půdorysem S_1^k bodu S.

Určíme kosoúhlý půdorys N_1^{hk} a kosoúhlý průmět N^{hk} nárysného stopníku N^h sestrojené hlavní přímky. Uvědomíme si, že kosoúhlý průmět N^{hk} nárysného stopníku N^h splývá s jeho nárysem N_2^h.



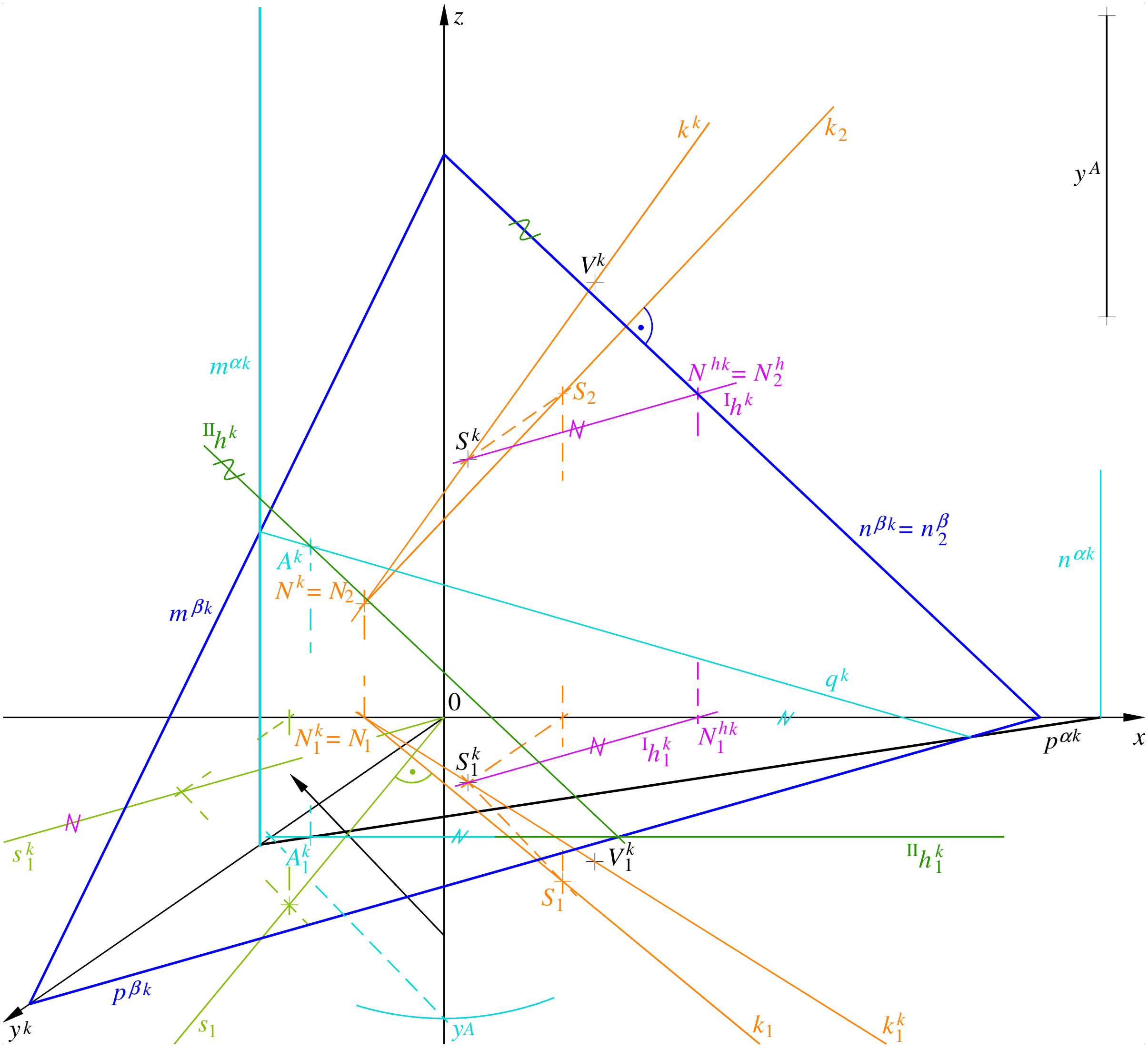
Kosoúhlý průmět $n^{\beta k}$ nárysné stopy n^β roviny β splývá s jejím nárysem n_2^β, tj. $n^{\beta k} = n_2^\beta$. Jelikož rovněž $N^{hk} = N_2^h$, je kosoúhlý průmět $n^{\beta k} = n_2^\beta$ nárysné stopy n^β roviny β kolmicí na nárys k_2 přímky k, která prochází bodem $N^{hk} = N_2^h$.

Sestrojíme kosoúhlý průmět $p^{\beta k}$ půdorysné stopy p^β roviny β, který je rovnoběžný s přímkou s_1^k a prochází průsečíkem osy x a kosoúhlého průmětu $n^{\beta k}$ nárysné stopy n^β roviny β. Nakonec sestrojíme kosoúhlý průmět $m^{\beta k}$ bokorysné stopy m^β roviny β.

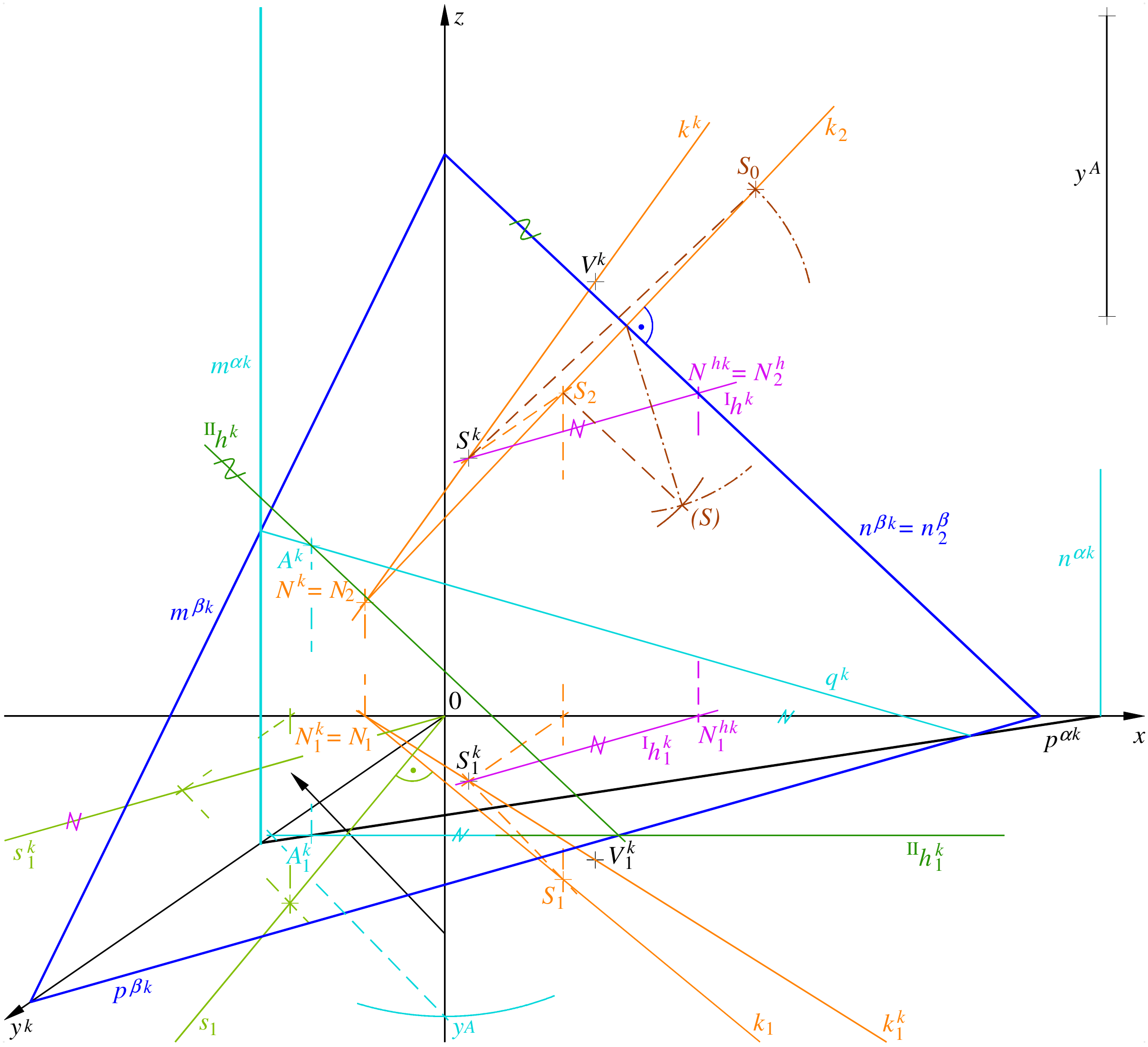


Nyní sestrojme bod A. Jelikož leží ve vzdálenosti y^A před nárysnou, zjistíme, jak se skutečná vzdálenost y^A zkreslí na ose y. Tj. nalezneme na kosoúhlém průmětu y^k osy y kosoúhlý průmět bodu s y-ovou souřadnicí y^A. Kosoúhlý půdorys A_1^k bodu A je průsečíkem rovnoběžky s osou x procházející tímto bodem a kosoúhlého průmětu $p^{\alpha k}$ půdorysné stopy roviny α.

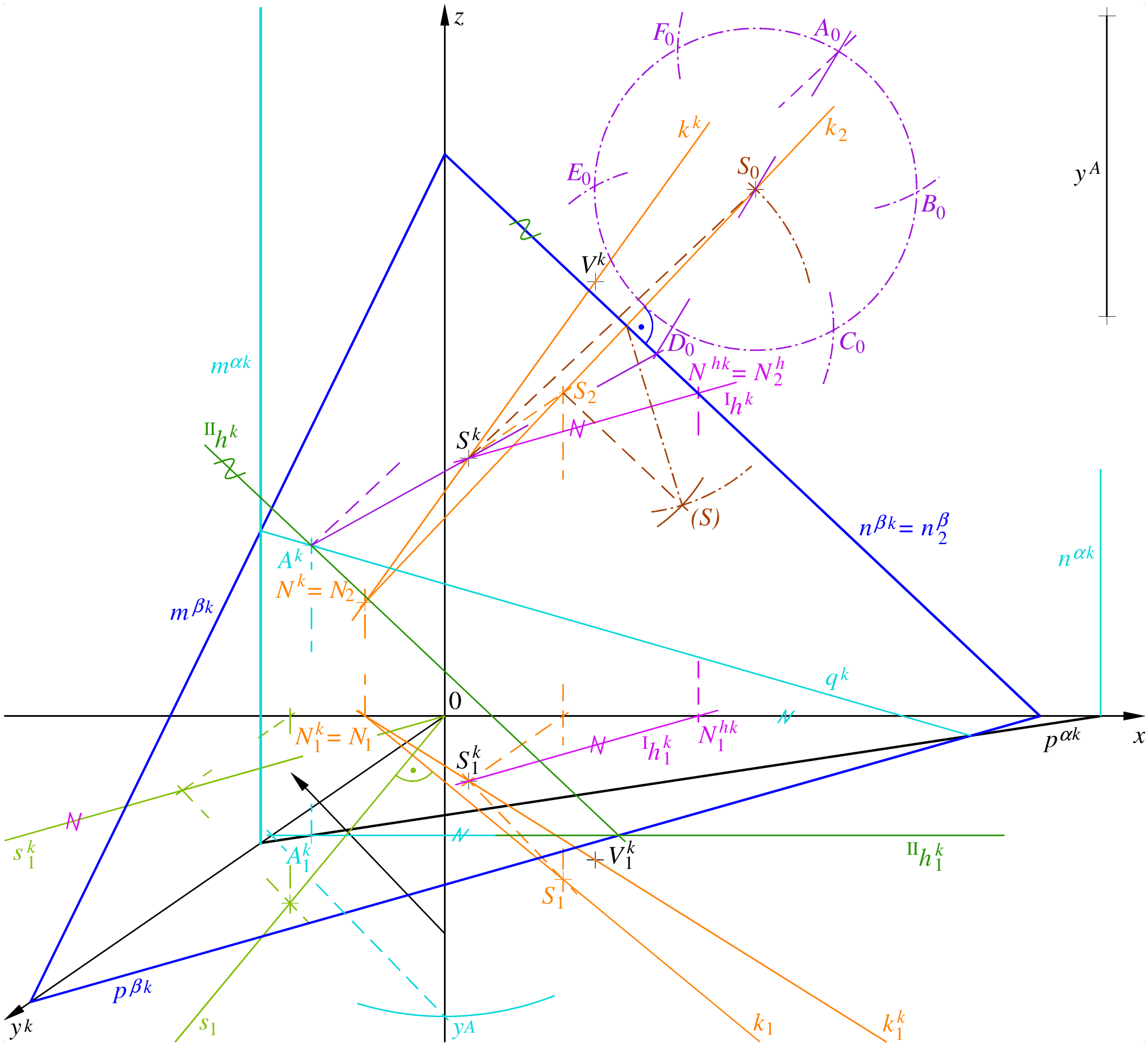
Sestrojíme kosoúhlé průměty $n^{\alpha k}$ a $m^{\alpha k}$ zbývajících stop roviny α. Bod A leží v rovinách α a β, proto kosoúhlý průmět A^k bodu A leží na kosoúhlém průmětu q^k jejich průsečnice q a na ordinále bodu A.



Kosoúhlý průmět A^k bodu A lze samozřejmě sestrojit i pomocí některé (hlavní) přímky roviny α nebo β, která prochází bodem A. Na obrázku je využita hlavní přímka ${}^{II}h$ druhé osnovy roviny β.

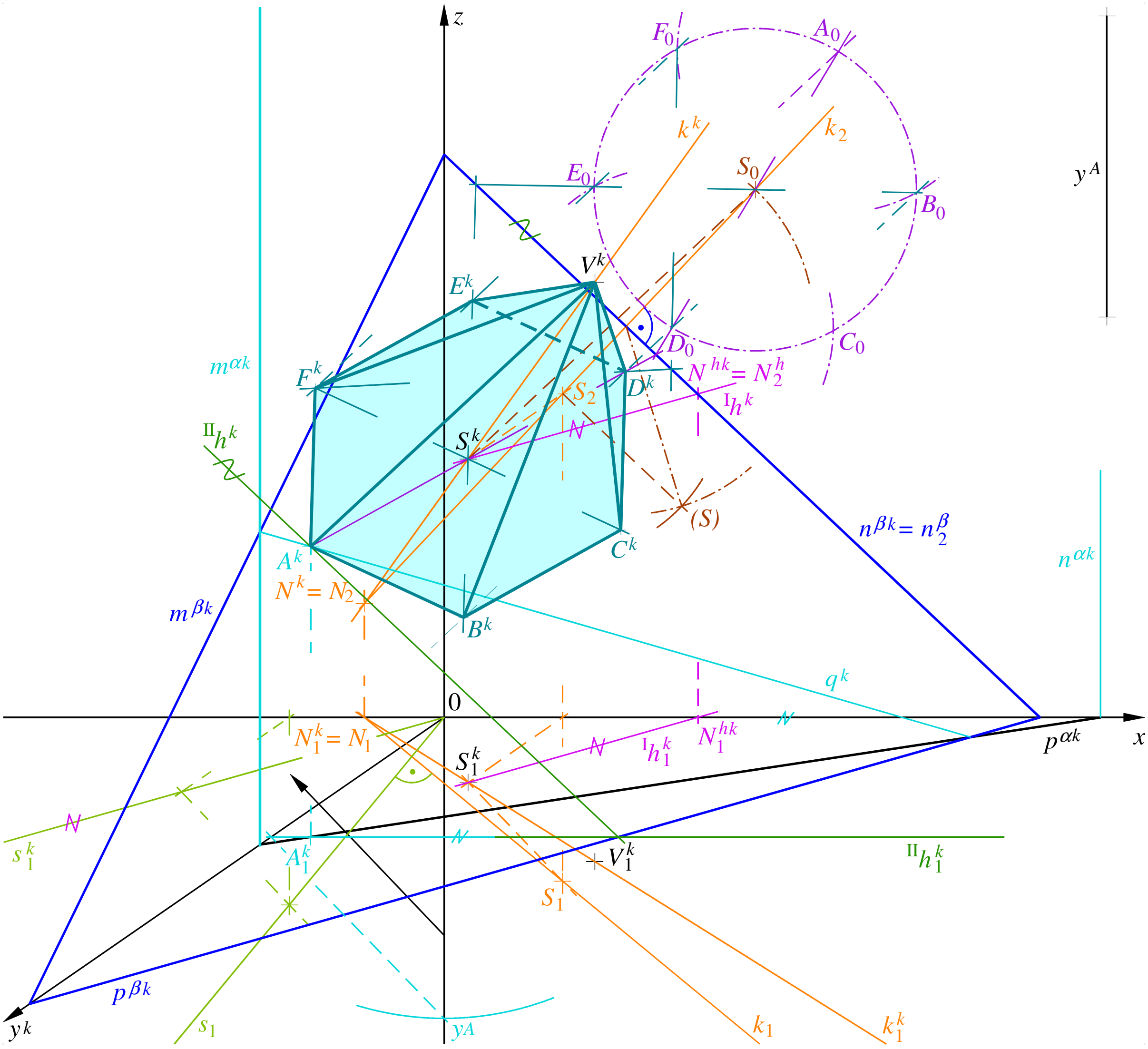


Otočíme rovinu podstavy β kolem nárysné stopy do nárysny. Nejprve otočíme například bod S, tj. sklopíme rovinu, která je kolmá na nárysnu a v níž leží spádová přímka druhé osnovy roviny β procházející bodem S (nárys roviny splývá s přímkou k_2), sestrojíme sklopený bod (S) a následně otočený bod S_0.



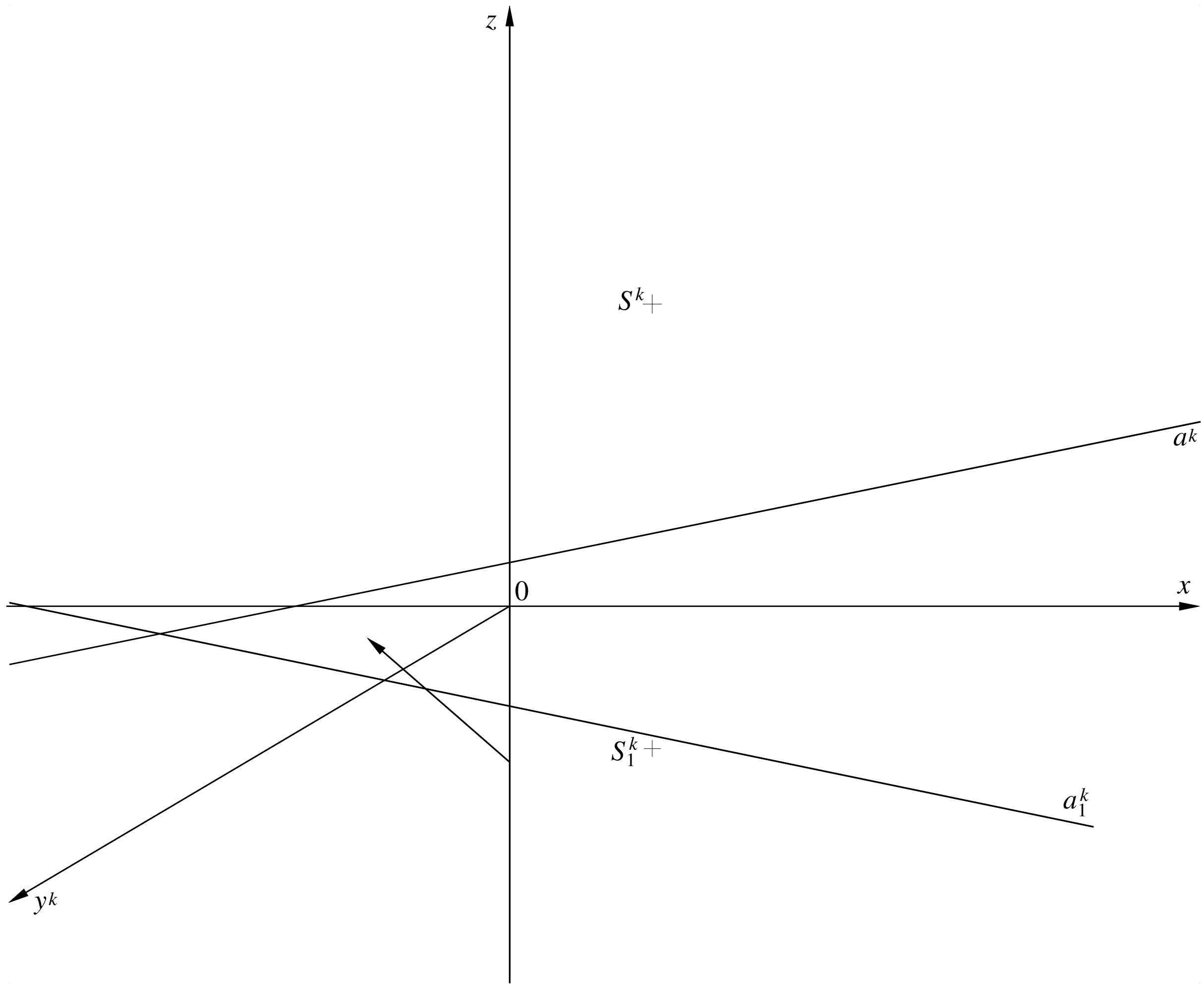
Pomocí kosoúhlé osové afinity v rovině, jejíž osou je přímka $n^{\beta k} = n_2^{\beta}$ a dvojicí odpovídajících si bodů jsou body S^k a S_0, nalezneme otočený bod A_0. Sestrojíme kružnici o středu S_0 procházející bodem A_0 a dále vrcholy pravidelného šestiúhelníku $A_0B_0C_0D_0E_0F_0$, který je této kružnici vepsán.

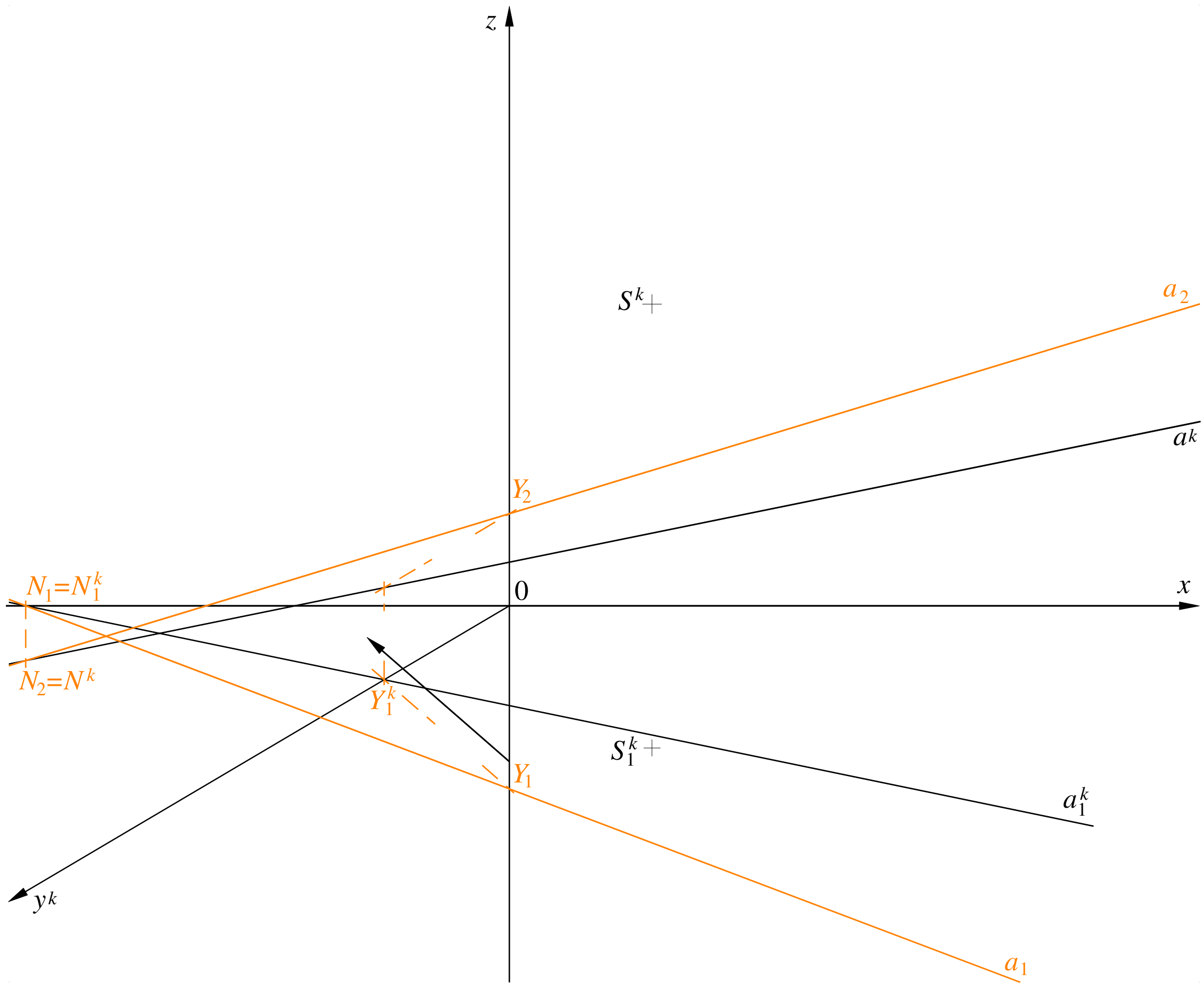
Poznamenejme, že můžeme rovněž pracovat s pravoúhlou osovou afinitou se stejnou osou $n^{\beta k} = n_2^{\beta}$, ale s dvojicí odpovídajících si bodů S_2 a S_0, a poté využívat směru S_2S^k.



Určíme vzory B^k, C^k, D^k, E^k, F^k bodů B_0, C_0, D_0, E_0, F_0 ve výše uvedené afinitě, tj. kosoúhlé průměty zbývajících vrcholů podstavy tělesa. Sestrojíme kosoúhlé průměty hran jehlanu a určíme viditelnost tělesa.

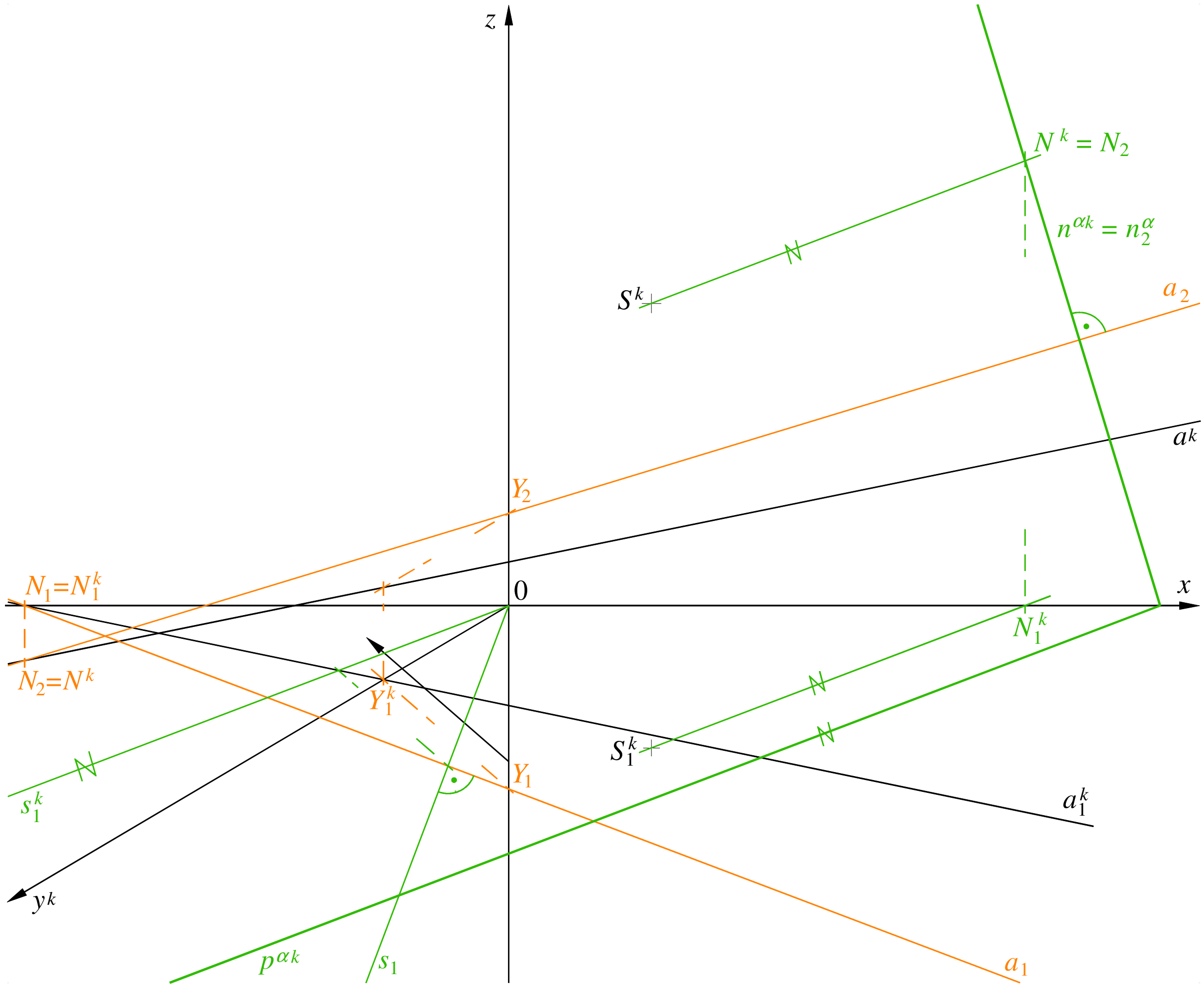
Příklad 2. Sestrojte kosoúhlý průmět krychle $ABCDEFGH$, víte-li, že její hrana AB je incidentní s přímkou a a že bod S je středem její stěny $BCGF$. Sestrojte takové řešení, pro které $x^A < x^B$.





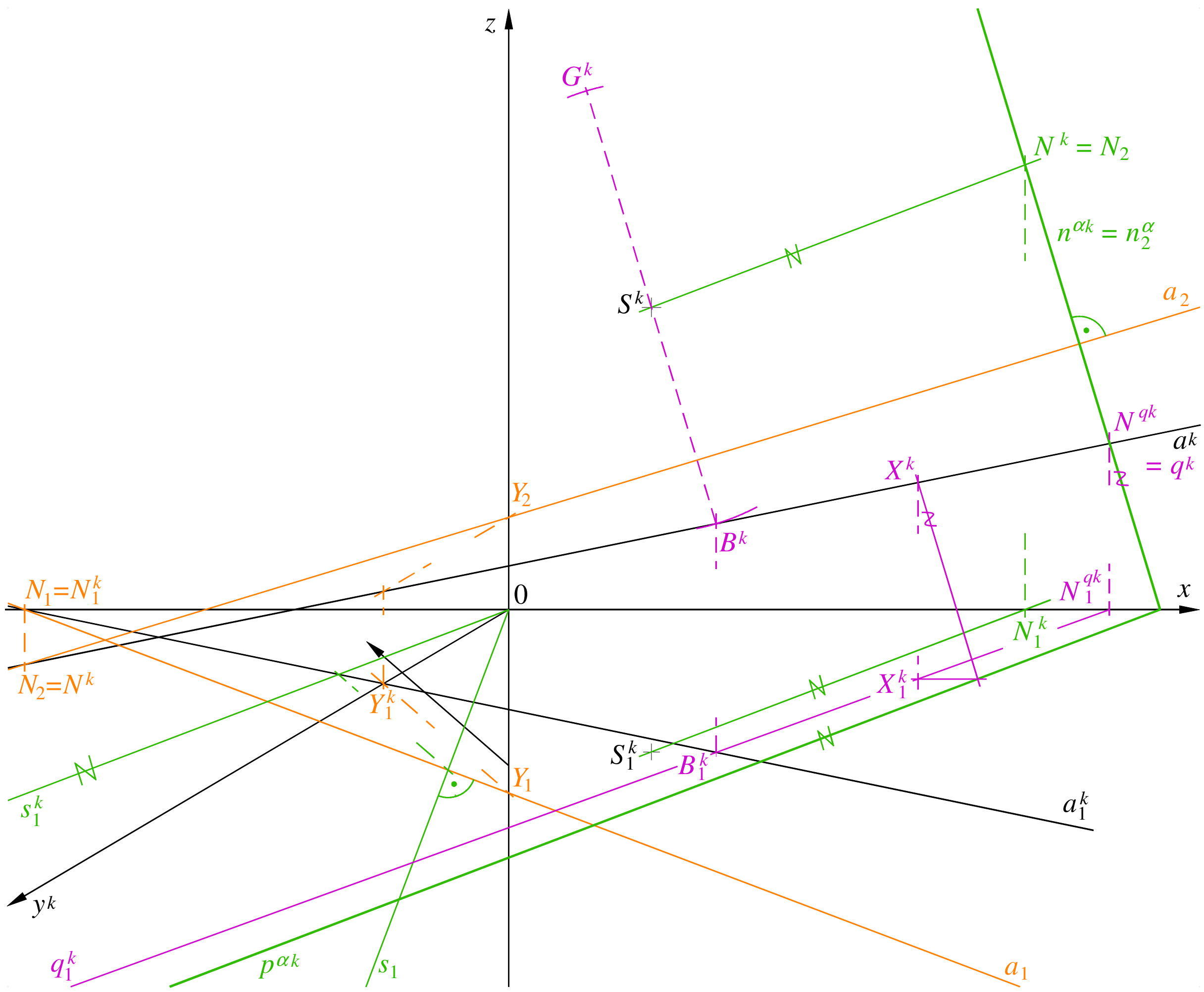
Protože hrana AB leží na přímce a a bod S je středem stěny $BCGF$ krychle, můžeme sestrojit rovinu α, ve které stěna $BCGF$ leží. Jedná se o rovinu, která prochází bodem S a je kolmá na přímku a.

Nejprve sestojíme půdorys a_1 a nárys a_2 přímky a. Využijeme například její nárysný stopník N (půdorys N_1 nárysného stopníku N splývá s jeho kosoúhlým půdorysem N_1^k, nárys N_2 nárysného stopníku N splývá s jeho kosoúhlým průmětem N^k) a dále její průsečík Y s bokorysnou (kosoúhlý půdorys Y_1^k bodu Y je průsečíkem kosoúhlého průmětu, resp. kosoúhlého půdorysu $y^k = y_1^k$ osy y a kosoúhlého půdorysu a_1^k přímky a).



Pomocí kolmice s_1 na přímku a_1 vedenou například počátkem 0 souřadnicového systému nalezneme směr s_1^k kosoúhlého průmětu $p^{\alpha k}$ půdorysné stopy p^α (a tedy i kosoúhlých průmětů a kosoúhlých půdorysů hlavních přímek 1. osnovy) hledané roviny α.

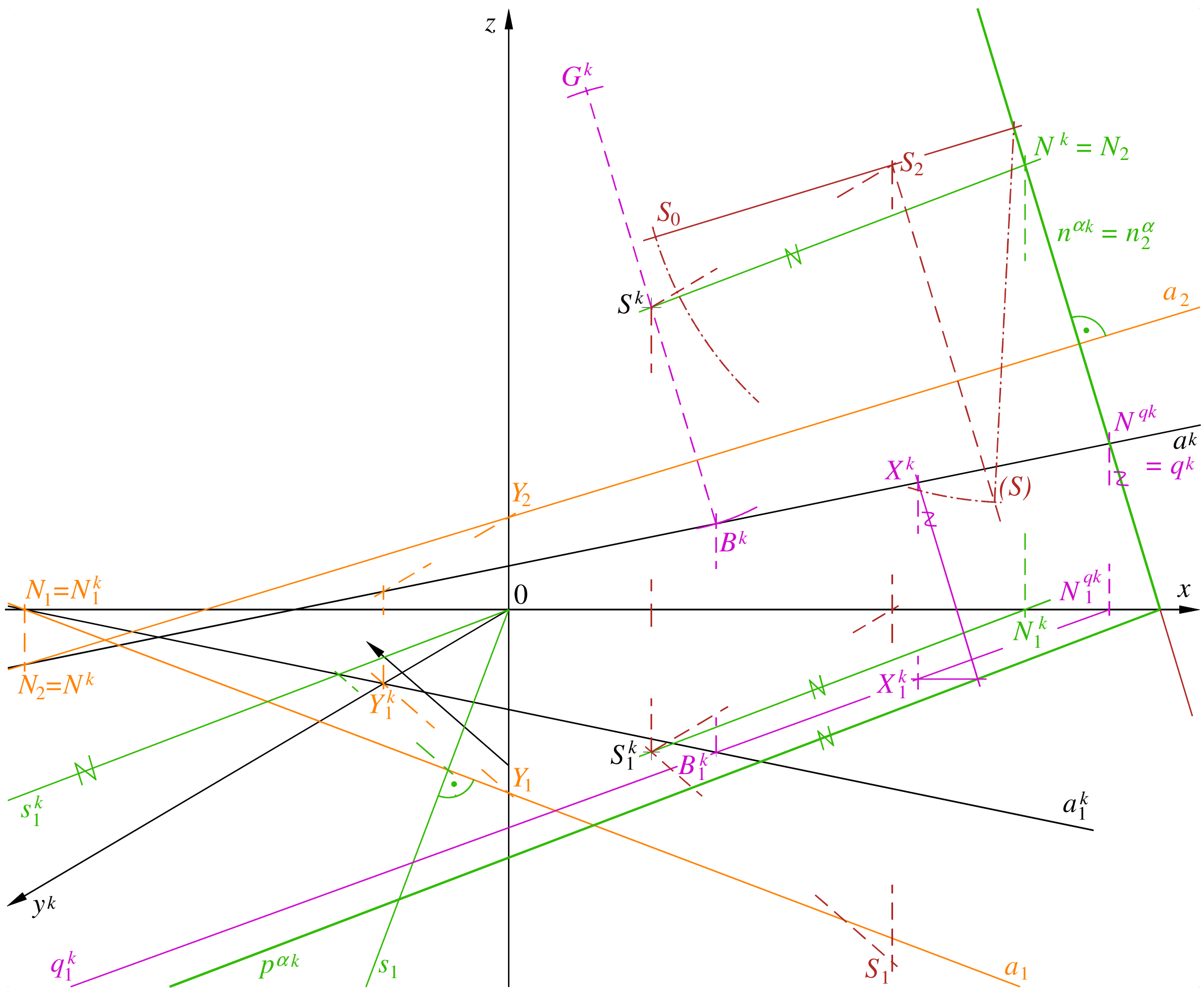
Bodem S vedeme hlavní přímku 1. osnovy roviny α. Její kosoúhlý průmět, resp. kosoúhlý půdorys prochází kosoúhlým průmětem S^k, resp. kosoúhlým půdorysem S_1^k bodu S. Sestrojíme kosoúhlý půdorys N_1^k a kosoúhlý průmět N^k nárysného stopníku N této hlavní přímky. Protože nárysy útvarů ležících v nárysně splývají s jejich kosoúhlými průměty, platí $N^k = N_2$ a obdobně $n^{\alpha k} = n_2^\alpha$, kde n^α je nárysná stopa roviny α. Přímka $n^{\alpha k} = n_2^\alpha$ je kolmicí na přímku a_2 procházející bodem $N^k = N_2$.



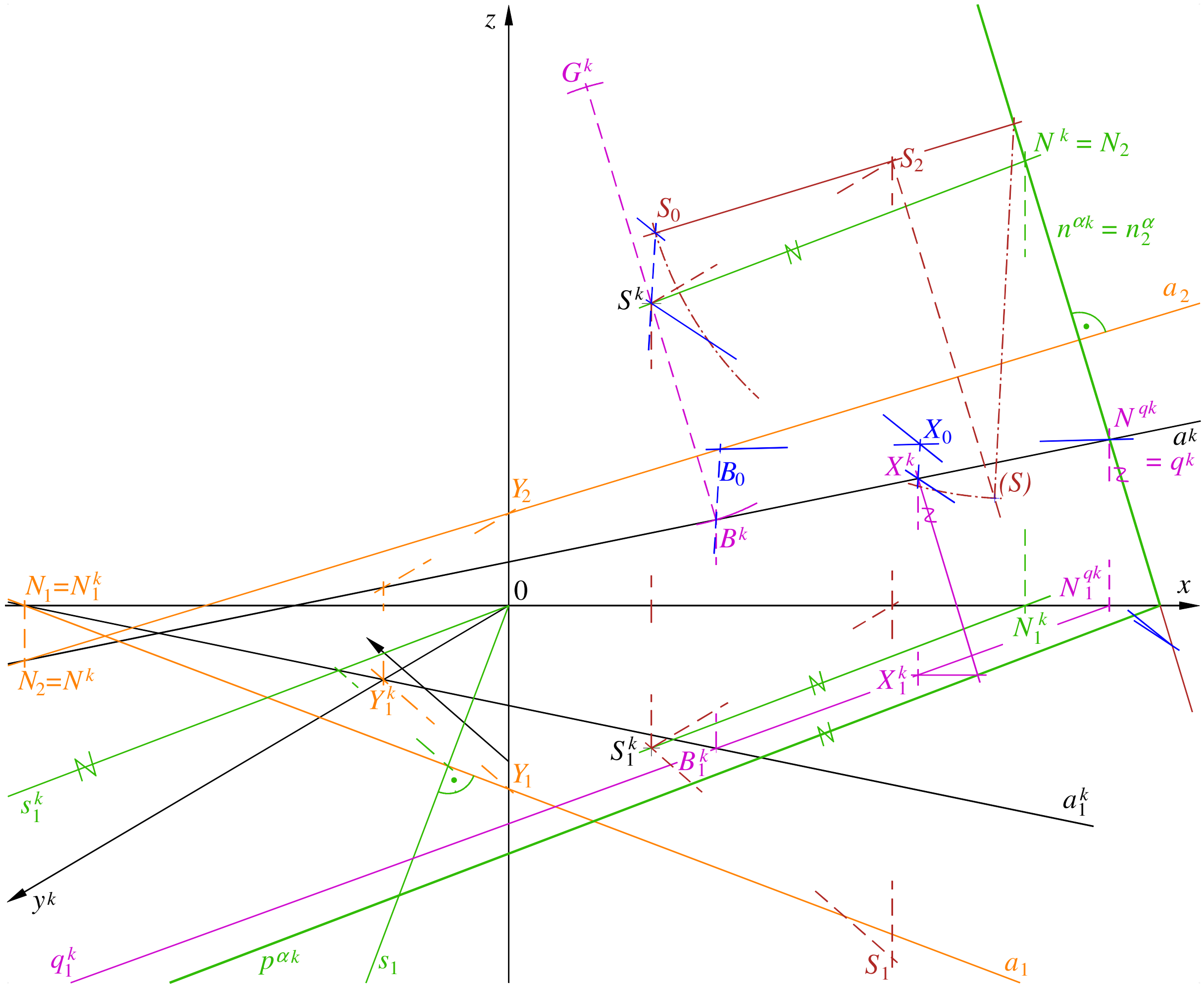
Vrchol B krychle $ABCDEFGH$ je průsečíkem přímky a a roviny α. Jeho průměty sestrojíme např. pomocí krycích přímek a a q, pro něž splývají jejich kosoúhlé průměty, tj. $a^k = q^k$.

Kosoúhlý půdorys q_1^k přímky q roviny α nalezneme s využitím jejího nárysného stopníku N^q a jejího obecného bodu X. Kosoúhlý půdorys B_1^k bodu B je průsečíkem kosoúhlých půdorysů q_1^k, a_1^k přímek q, a. Kosoúhlý průmět B^k bodu B nalezneme pomocí ordinály na přímce $a^k = q^k$.

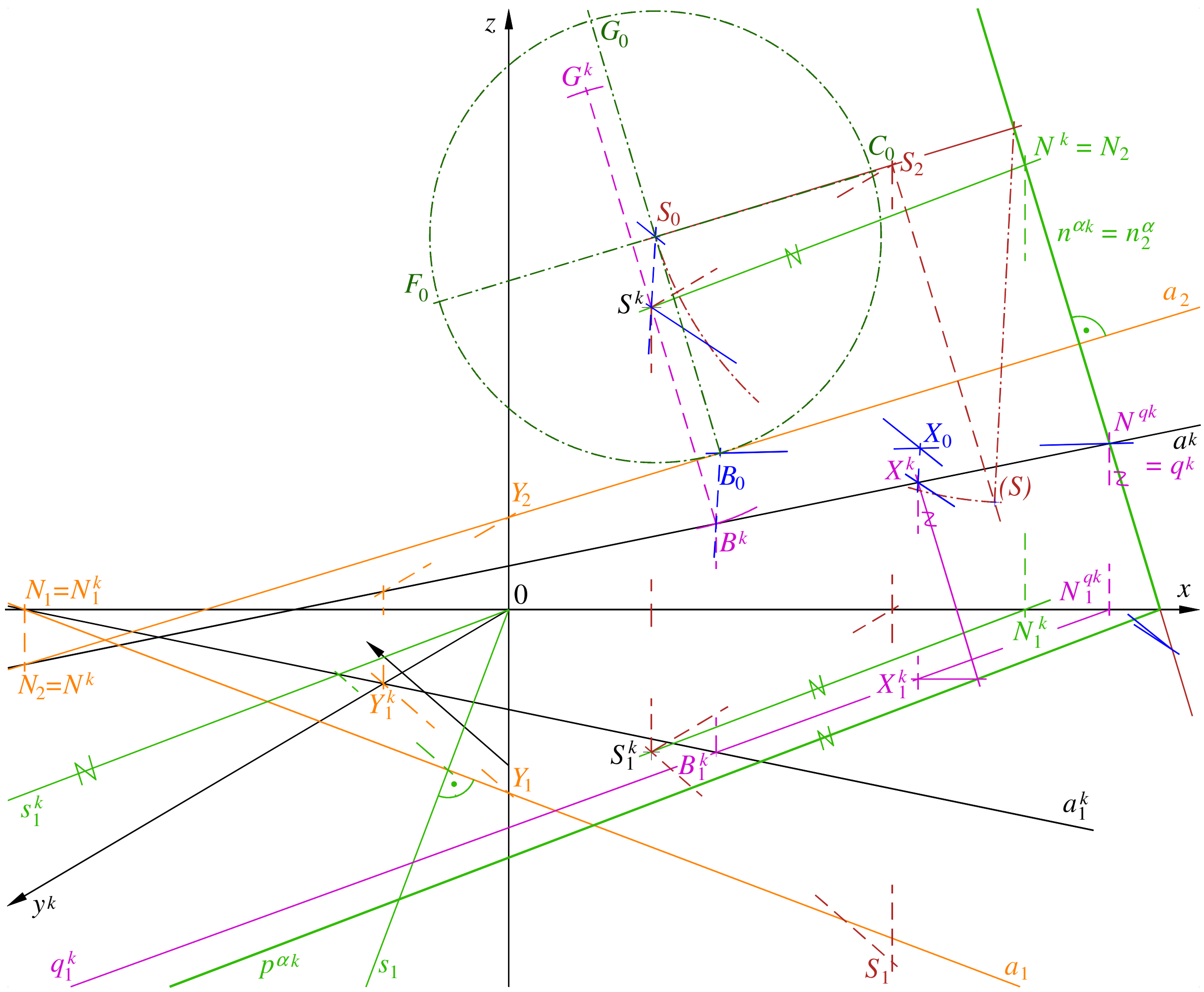
Kosoúhlý průmět G^k vrcholu G krychle je obrazem bodu B^k ve středové souměrnosti se středem S^k.



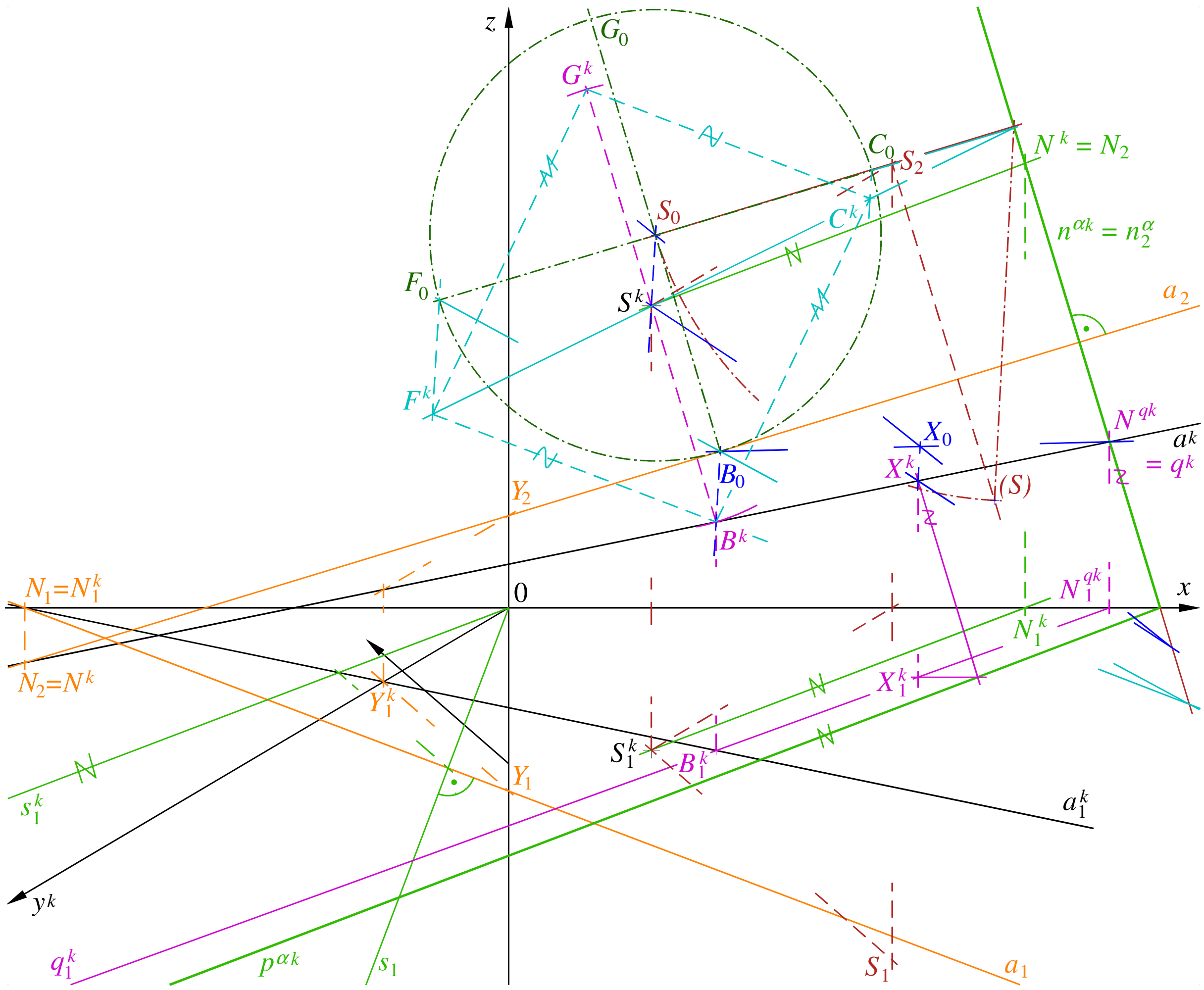
Rovinu α otočíme kolem její nárysné stopy n^{α} do nárysny. Jako první otočíme například bod S. Sklopíme tedy vzhledem k nárysně pravoúhle promítací rovinu spádové přímky druhé osnovy roviny α procházející bodem S, sestrojíme sklopený bod (S) a poté otočený bod S_0.



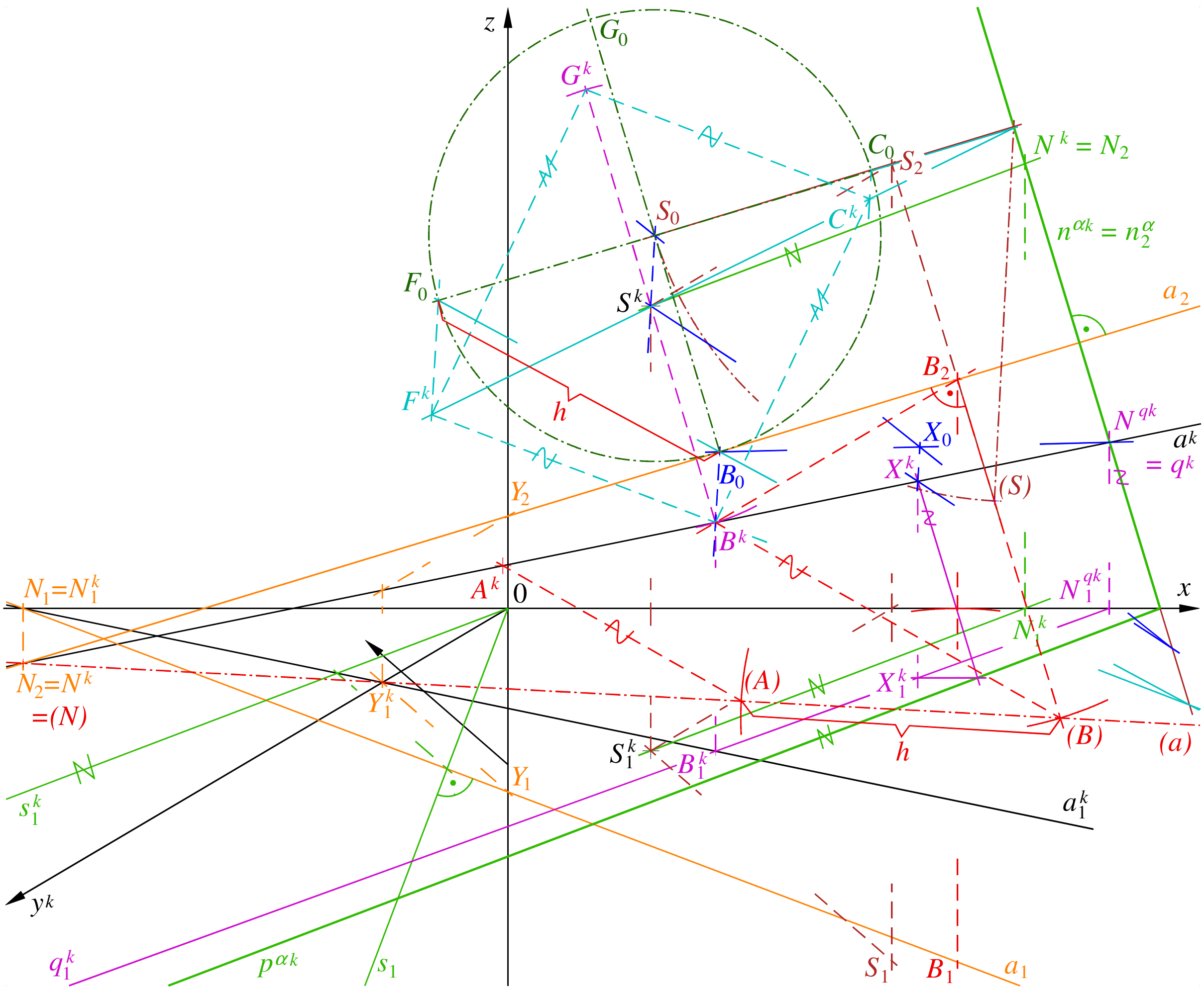
Pomocí osové afinity v rovině s osou $n^{\alpha k} = n_2^{\alpha}$ a dvojicí odpovídajích si bodů S^k, S_0 získáme otočený bod B_0. (Jelikož je přímka S^kB^k takřka rovnoběžná s osou afinity $n^{\alpha k} = n_2^{\alpha}$, tj. její samodružný bod není dostupný, sestrojíme nejprve obraz X_0 bodu X^k a pomocí něj následně nalezneme i otočený bod B_0.)



Sestrojíme kružnici o středu S_0 procházející bodem B_0 a vepíšeme jí čtverec $B_0C_0G_0F_0$ (postačí sestrojit jeho vrcholy).



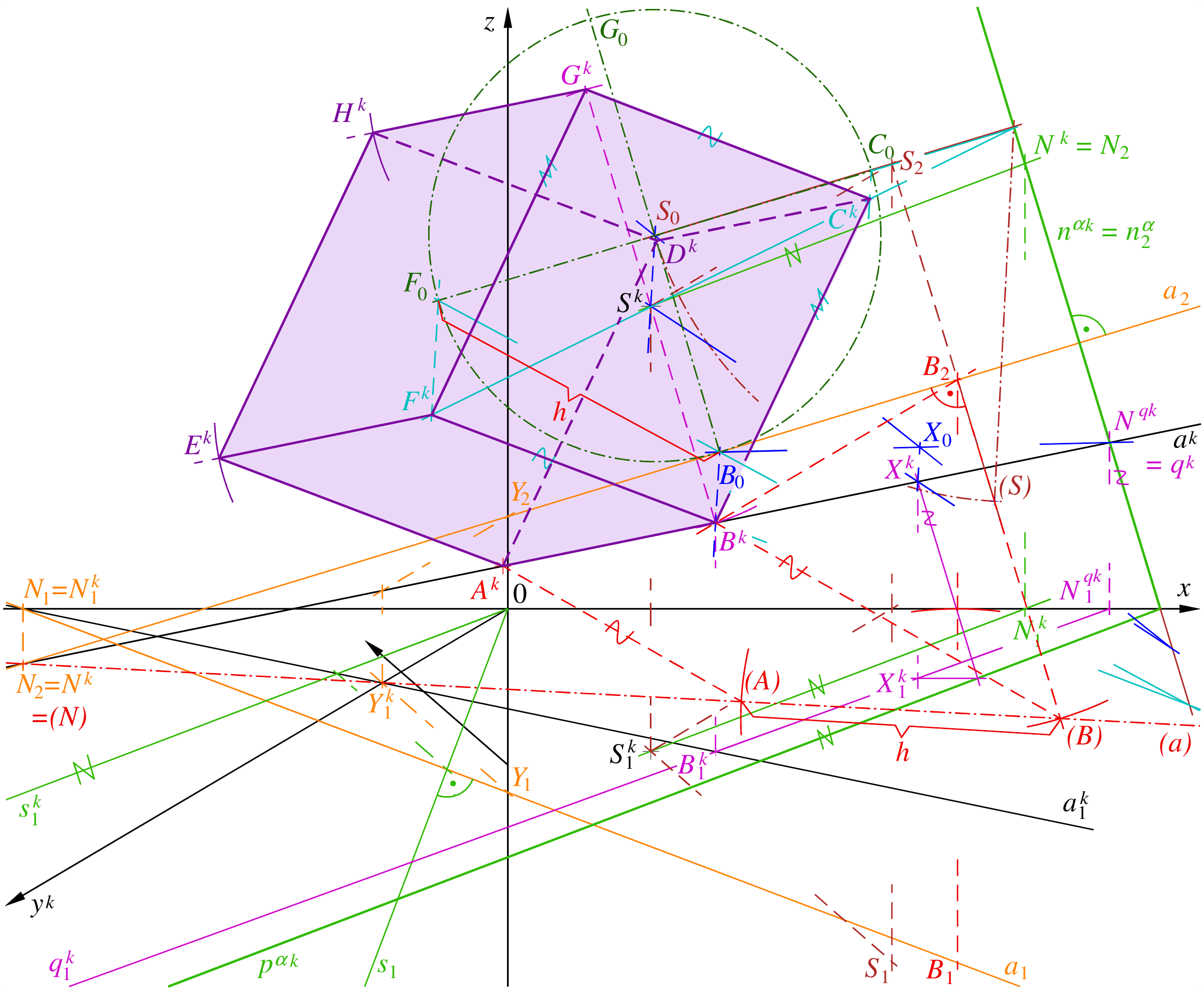
Sestrojíme vzor $B^kC^kG^kF^k$ čtverce $B_0C_0G_0F_0$ v uvažované afinitě. Čtyřúhelník $B^kC^kG^kF^k$ je rovnoběžník.



Nyní zbývá sestrojit kosoúhlé průměty vrcholů A, D, H a E. Označíme-li h délku hrany krychle, je $h = |B_0F_0|$ a vrchol A krychle leží na přímce a ve vzdálenosti h od bodu B.

Sklopíme rovinu, která obsahuje přímku a a je kolmá na nárysnu. Pracujeme tedy s nárysem a_2 přímky a. (Obdobně bychom mohli sklápět rovinu kolmou na půdorysnu; pracovali bychom s půdorysem a_1 přímky a.) Pro sklopenou přímku (a) platí $(a) = (B)(N)$, kde (B) je sklopený bod B a $(N) = N_2 = N$ je (sklopený) nárysný stopník N přímky a. Na přímce (a) nalezneme bod (A), který má od bodu (B) vzdálenost $h = |B_0F_0|$. Dodržíme přitom podmínku $x^A < x^B$, tj. bod (A) leží „více vlevo“ než bod (B).

Na kosoúhlém průmětu a^k přímky a naleznemme kosoúhlý průmět A^k bodu A. Využijeme přitom rovnoběžnosti přímek $B^k(B)$ a $A^k(A)$ (samozřejmě lze nejprve sestrojit na nárysu a_2 přímky a nárys A_2 bodu A a poté využít rovnoběžnosti přímek B^kB_2 a A^kA_2).

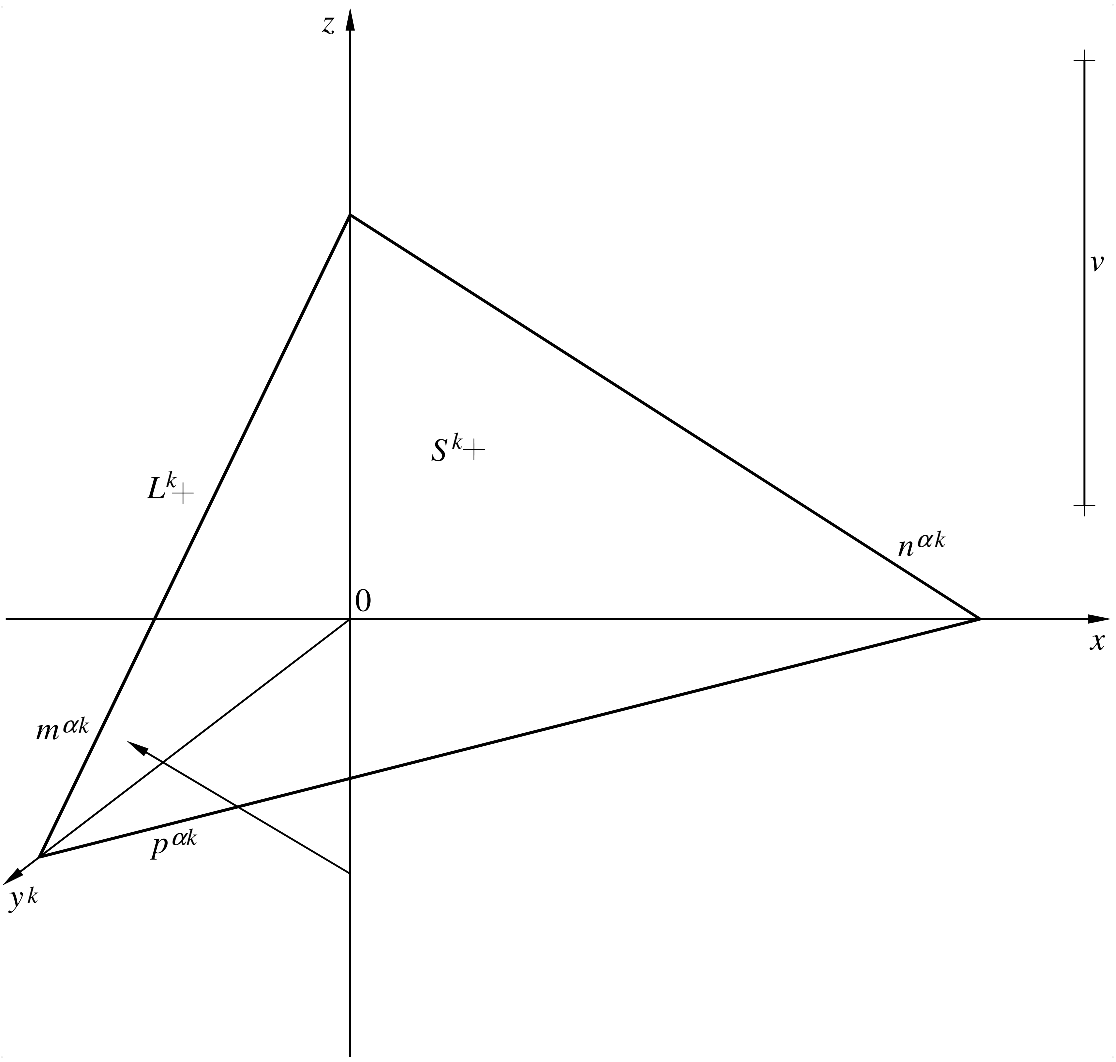


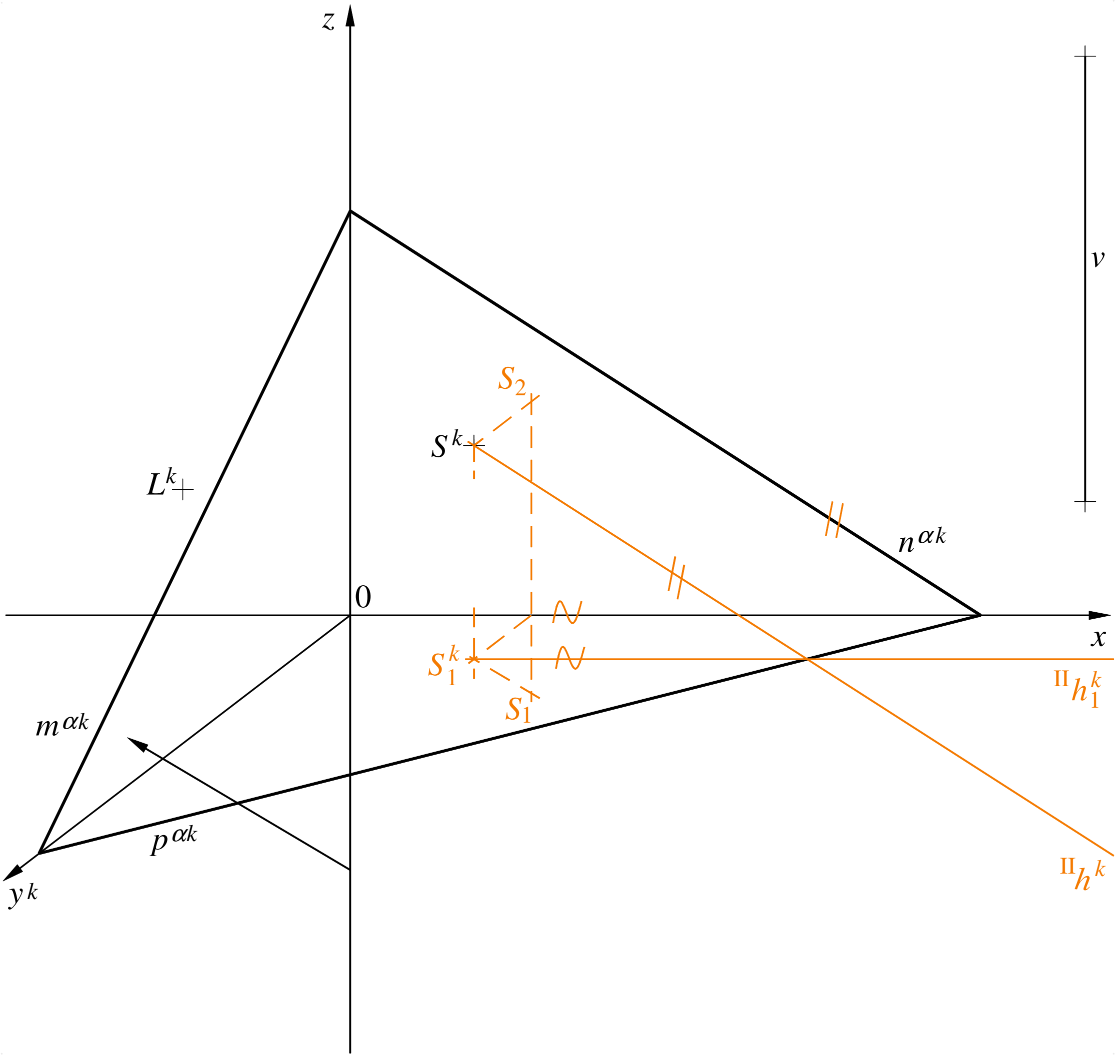
Body C, F, G vedeme kolmice k rovině α. Jejich kosoúhlé průměty procházejí kosoúhlými průměty C^k, F^k, G^k bodů C, F, G a jsou rovnoběžné s kosoúhlým průmětem a^k přímky a.

Na kosoúhlé průměty kolmic naneseme od jednotlivých bodů C^k, F^k, G^k ve správném směru vzdálenost $\left|A^k B^k\right|$, čímž získáme kosoúhlé průměty D^k, E^k, H^k zbývajících vrcholů krychle.

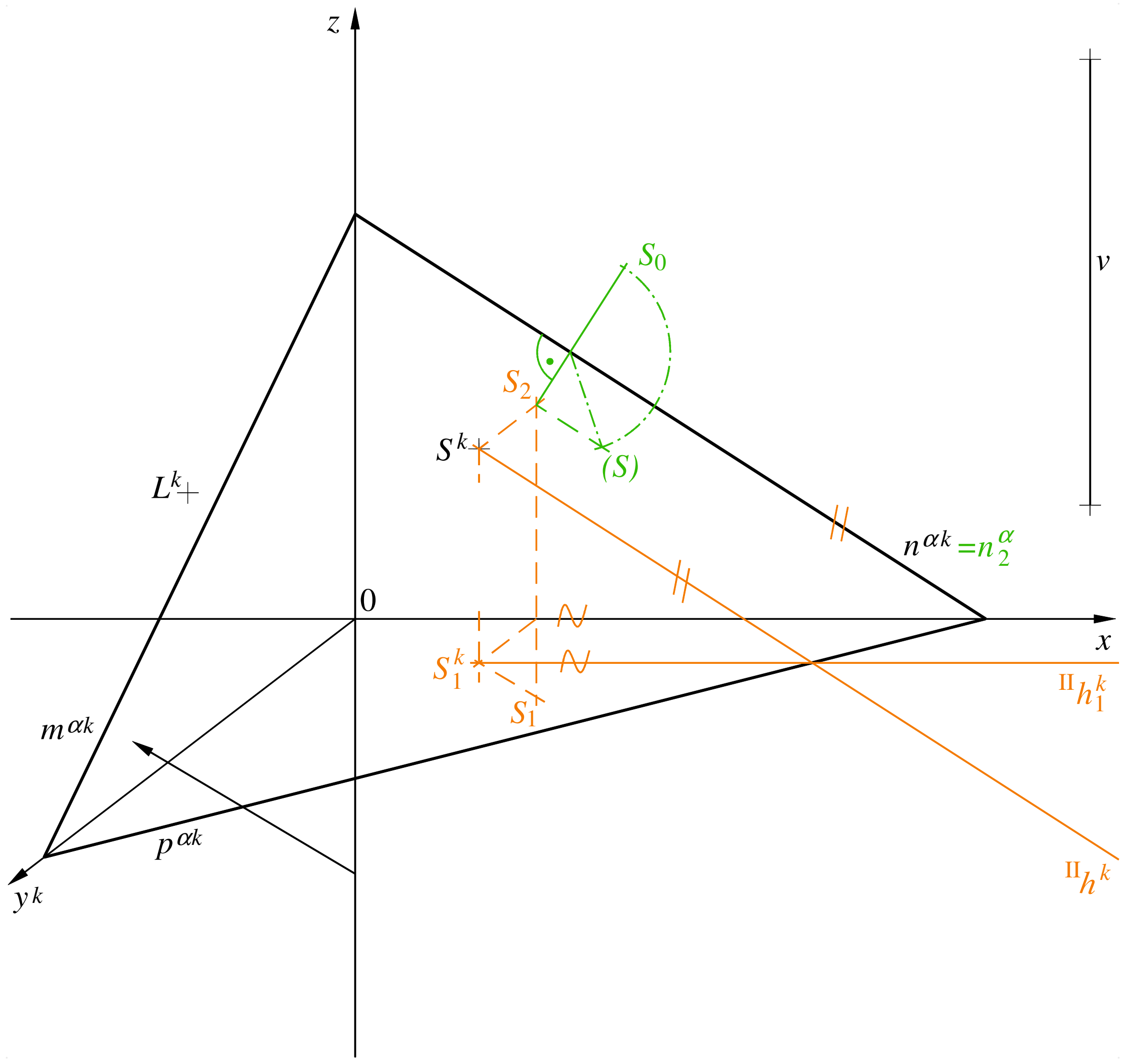
Nakonec narýsujeme kosoúhlé průměty zbývajících hran krychle a určíme viditelnost.

Příklad 3. V daném kosoúhlém promítání sestrojte kosoúhlý průmět rotačního kužele o výšce v. Střed jeho podstavy, která leží v rovině α, je S, hraniční kružnice podstavy prochází bodem L a vrchol V kužele je výše než bod S.



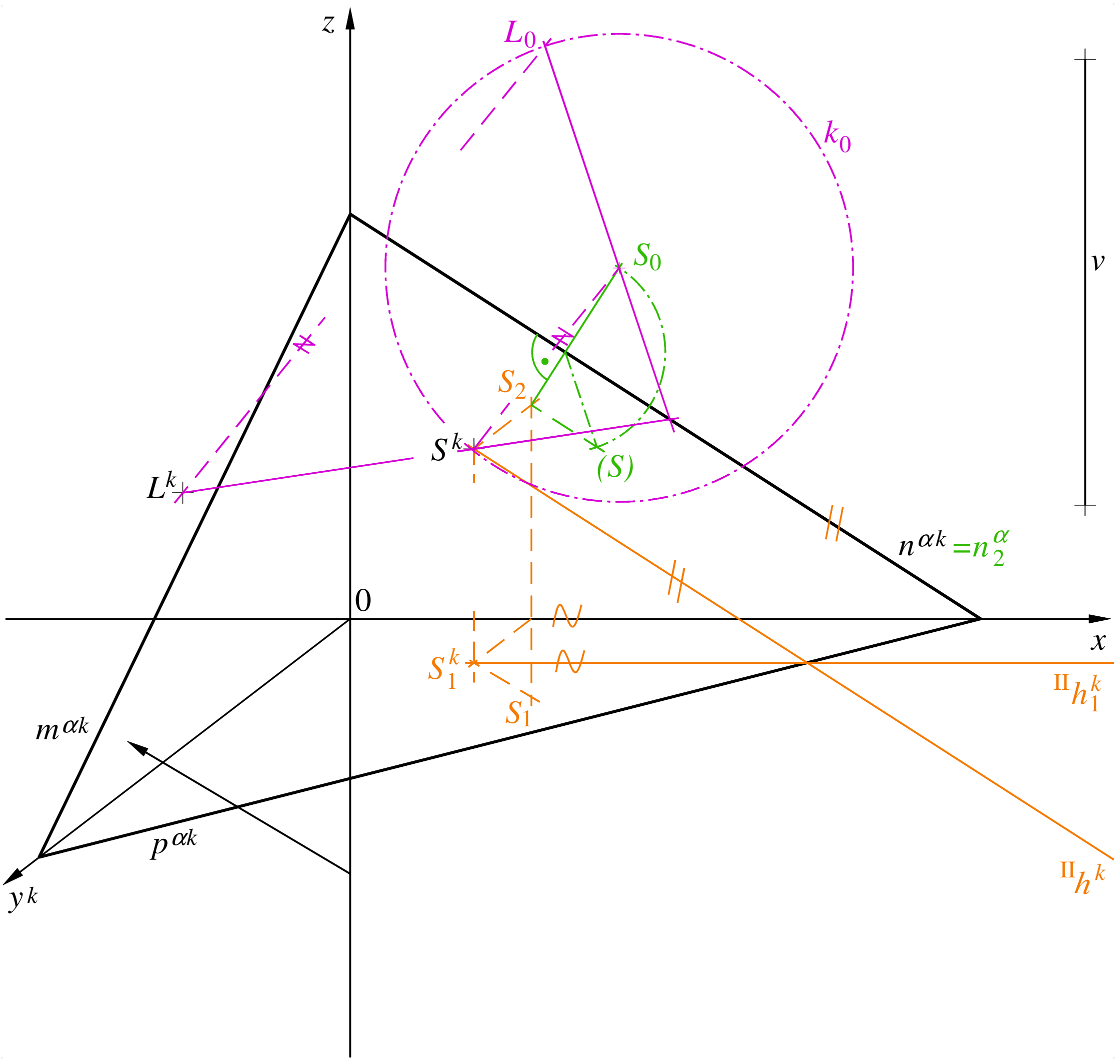


Neprve sestrojíme, a to například pomocí hlavní přímky druhé osnovy ${}^{II}h$ roviny α, kosoúhlý půdorys S_1^k bodu S. Poté nalezneme i jeho půdorys S_1 a nárys S_2.

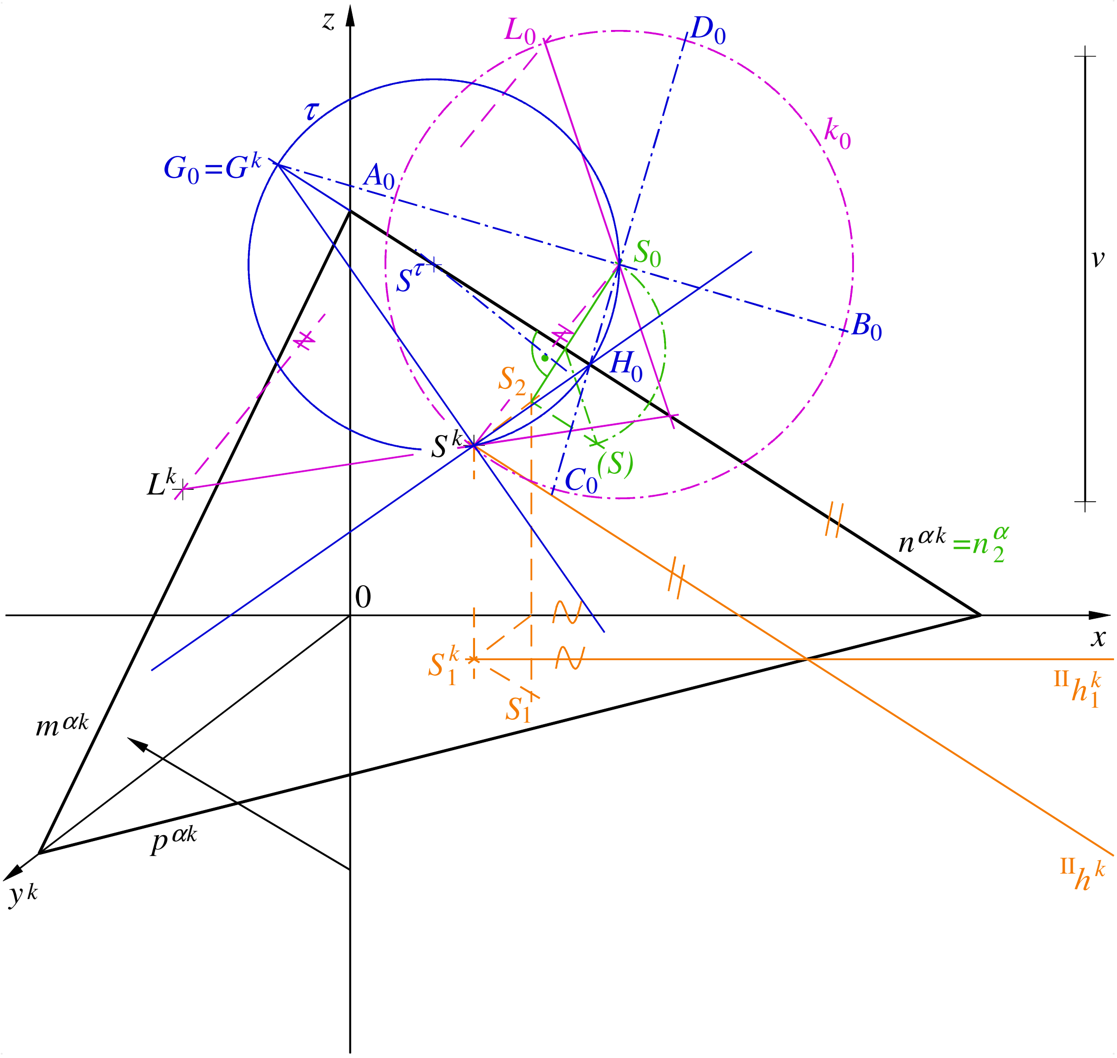


Sestrojíme kosoúhlý průmět podstavy kužele. Podstavou kužele je kruh, jejím kosoúhlým průmětem je elipsa o středu S^k a její vnitřní oblast.

Otočíme rovinu α kolem její nárysné stopy $n^\alpha = n^{\alpha k} = n_2^\alpha$ do nárysny. Nejprve otočíme bod S, tj. získáme sklopený bod (S) a následně otočený bod S_0.

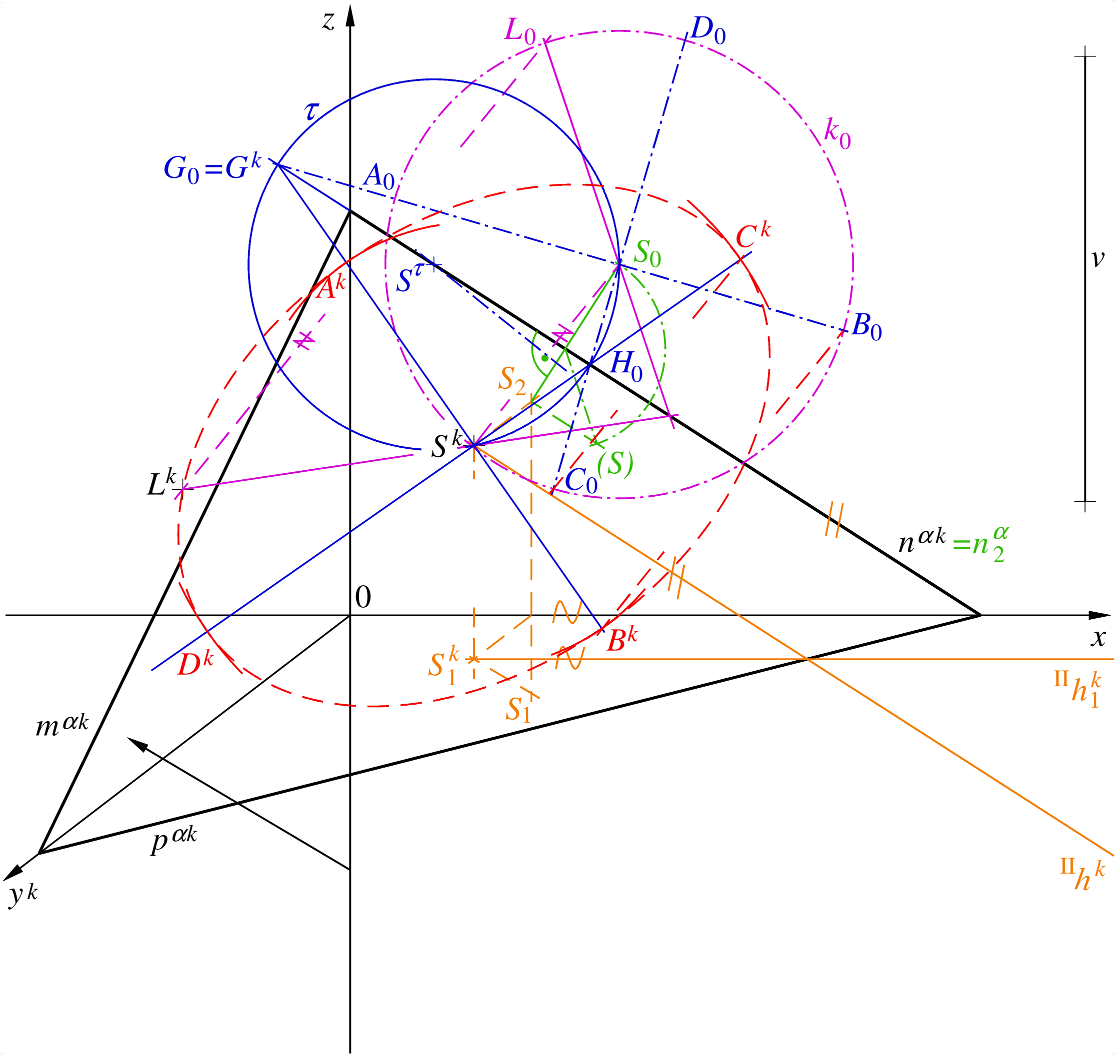


Pomocí osové afinity v rovině, jejíž osou je nárysná stopa $n^\alpha = n^{\alpha k} = n_2^\alpha$ roviny α a v níž bodu S^k odpovídá bod S_0, sestrojíme otočený bod L_0. V otočení sestrojíme kružnici k_0 o středu S_0 procházející bodem L_0.

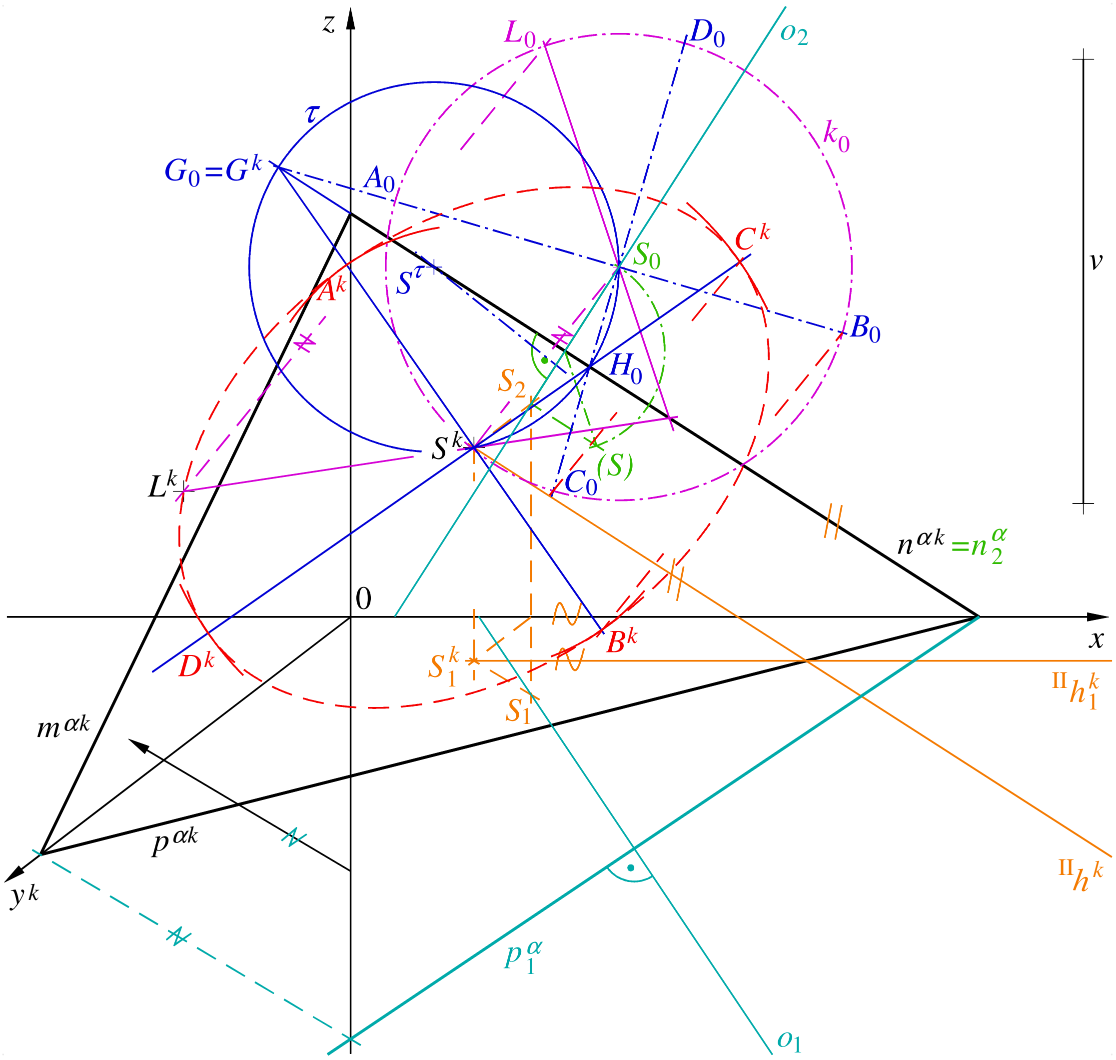


Nyní sestrojíme vzor kružnice k_0 v uvažované afinitě. Tímto vzorem je elipsa o středu S^k. Pomocí Thaletovy kružnice τ nalezneme takové sdružené (kolmé) průměry kružnice k_0, které se zobrazí na sdružené a současně kolmé průměry elipsy, tj. na její osy. Samodružnými body této dvojice odpovídajících si průměrů jsou průsečíky $G_0 = G^k$ a $H_0 = H^k$ Thaletovy kružnice τ a osy afinity $n^{\alpha k} = n_2^\alpha$.

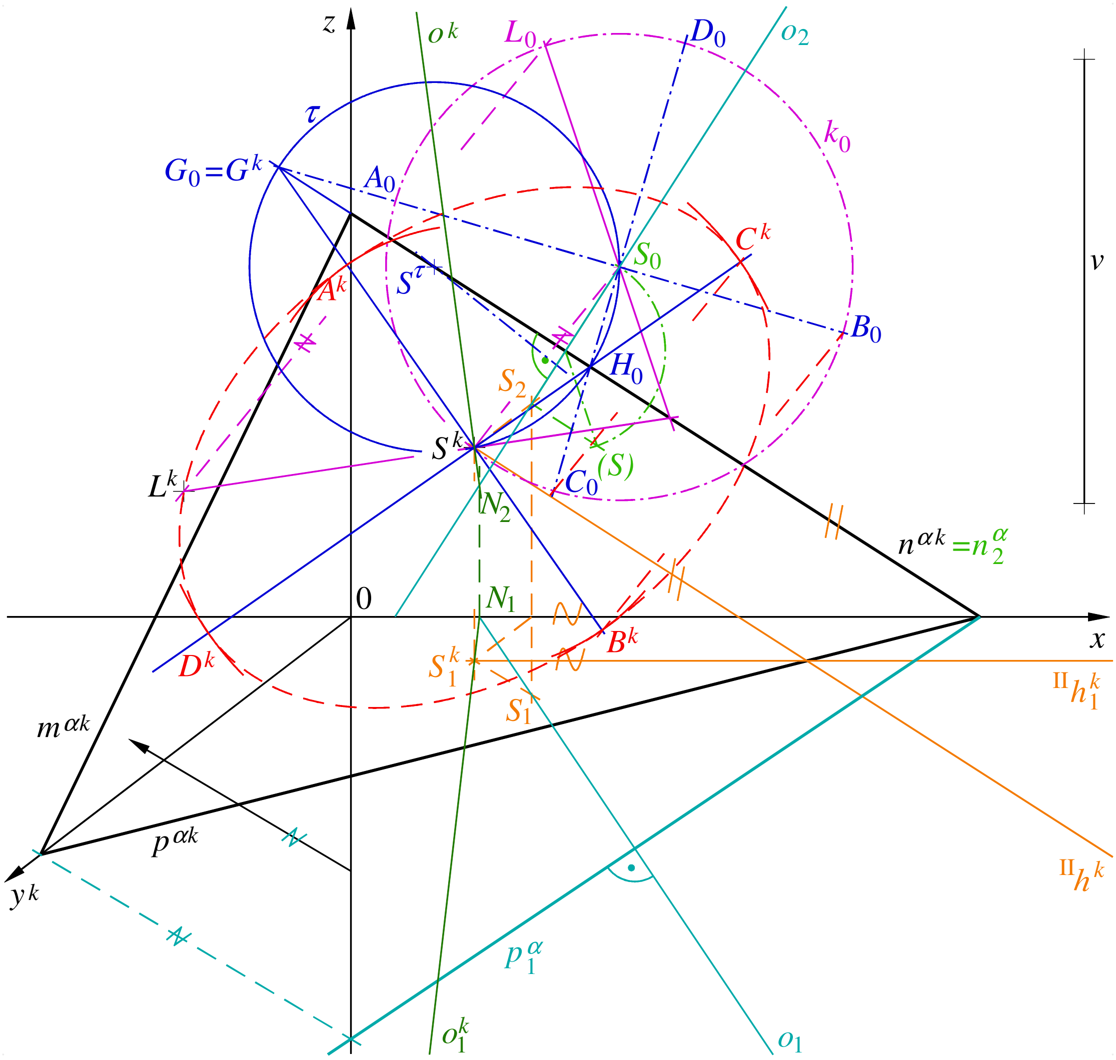
Průsečíky A_0, B_0, resp. C_0, D_0 kružnice k_0 s nalezenými sdruženými (kolmými) průměry kružnice jsou obrazy hlavních vrcholů A^k, B^k, resp. vedlejších vrcholů C^k, D^k hledané elipsy.



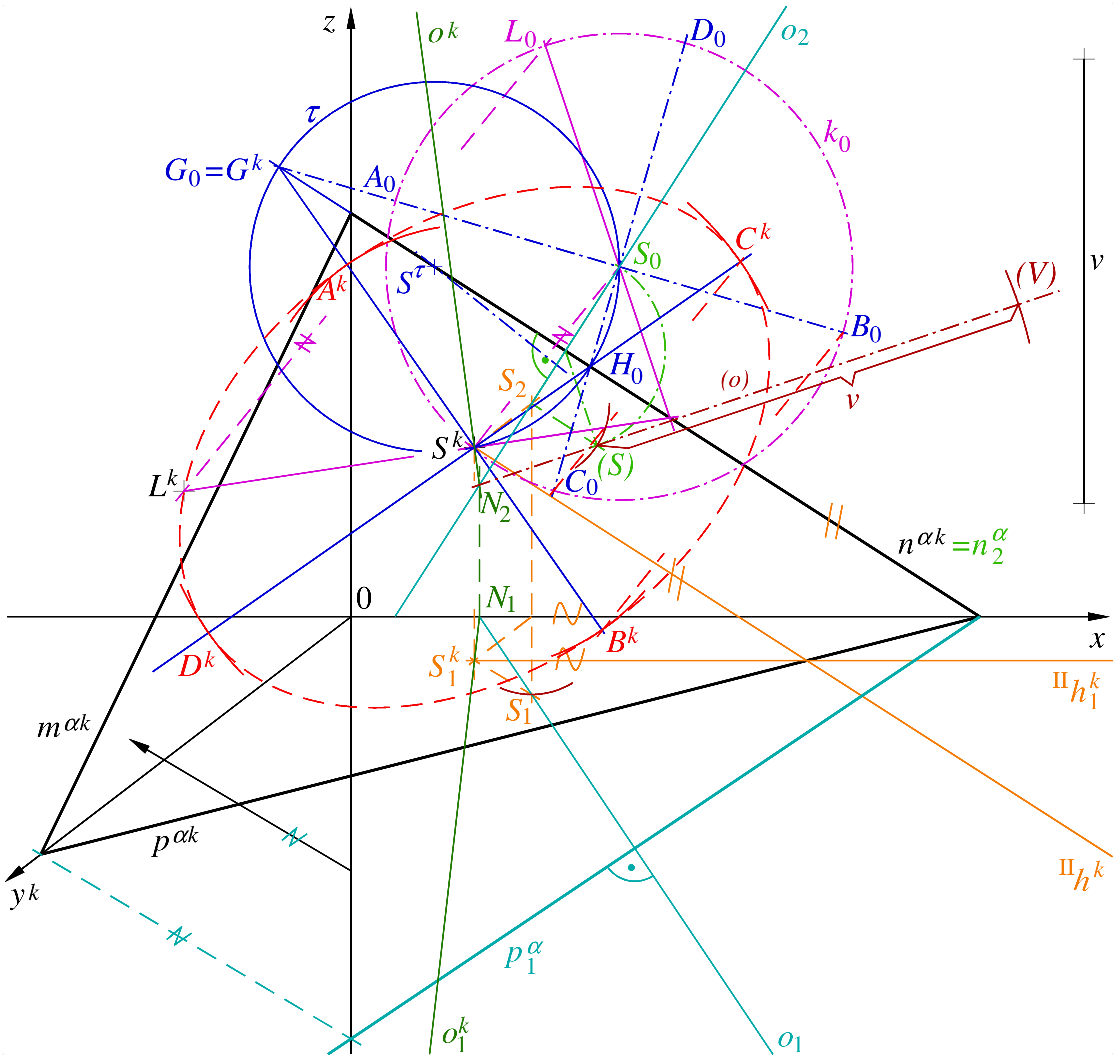
Sestrojíme tedy vrcholy elipsy jako vzory A^k, B^k, C^k, D^k bodů A_0, B_0, C_0, D_0 v uvažované osové afinitě. Těmi je elipsa jednoznačně určená. Elipsa musí kromě svých vrcholů procházet i kosoúhlým průmětem L^k bodu L.



Nyní sestrojme osu tělesa, tj. kolmici o na rovinu podstavy α procházející bodem S. Nejprve úlohu vyřešíme v přidruženém Mongeově promítání. Sestrojíme půdorys p_1^α půdorysné stopy p^α roviny α (připomeňme, že pro její nárys n_2^α platí $n_2^\alpha = n^{\alpha k}$). Půdorys o_1 přímky o prochází bodem S_1 a je kolmý na přímku p_1^α, nárys o_2 přímky o prochází bodem S_2 a je kolmý na přímku n_2^α.

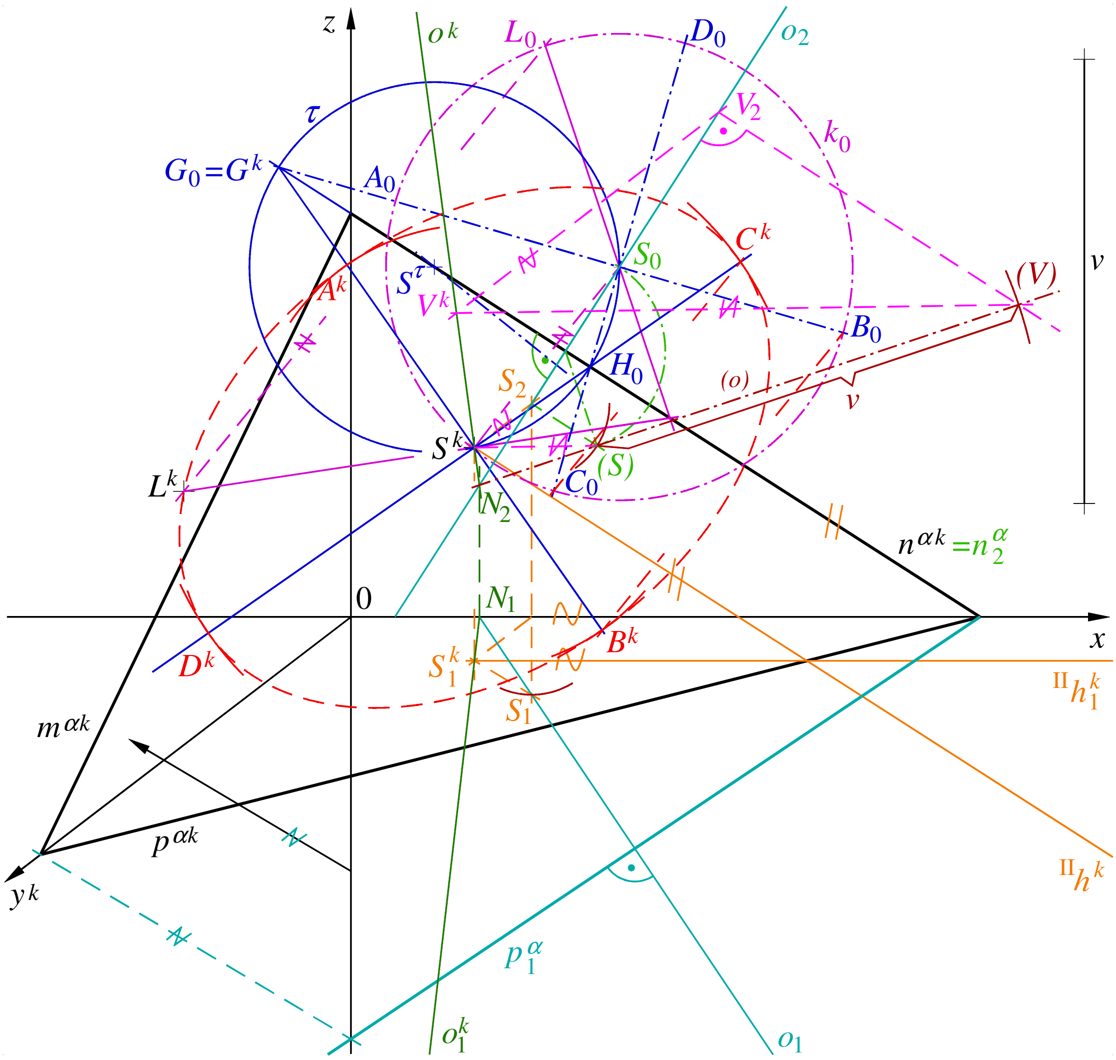


Dále sestrojíme kosoúhlý průmět o^k a kosoúhlý půdorys o_1^k přímky o. Využijeme k tomu její nárysný stopník N, neboť jeho kosoúhlý průmět N^k splývá s jeho pravoúhlým nárysem N_2 a jeho kosoúhlý půdorys N_1^k splývá s jeho pravoúhlým půdorysem N_1. Proto $o^k = N^k S^k = N_2 S^k$ a $o_1^k = N_1^k S_1^k = N_1 S_1^k$.

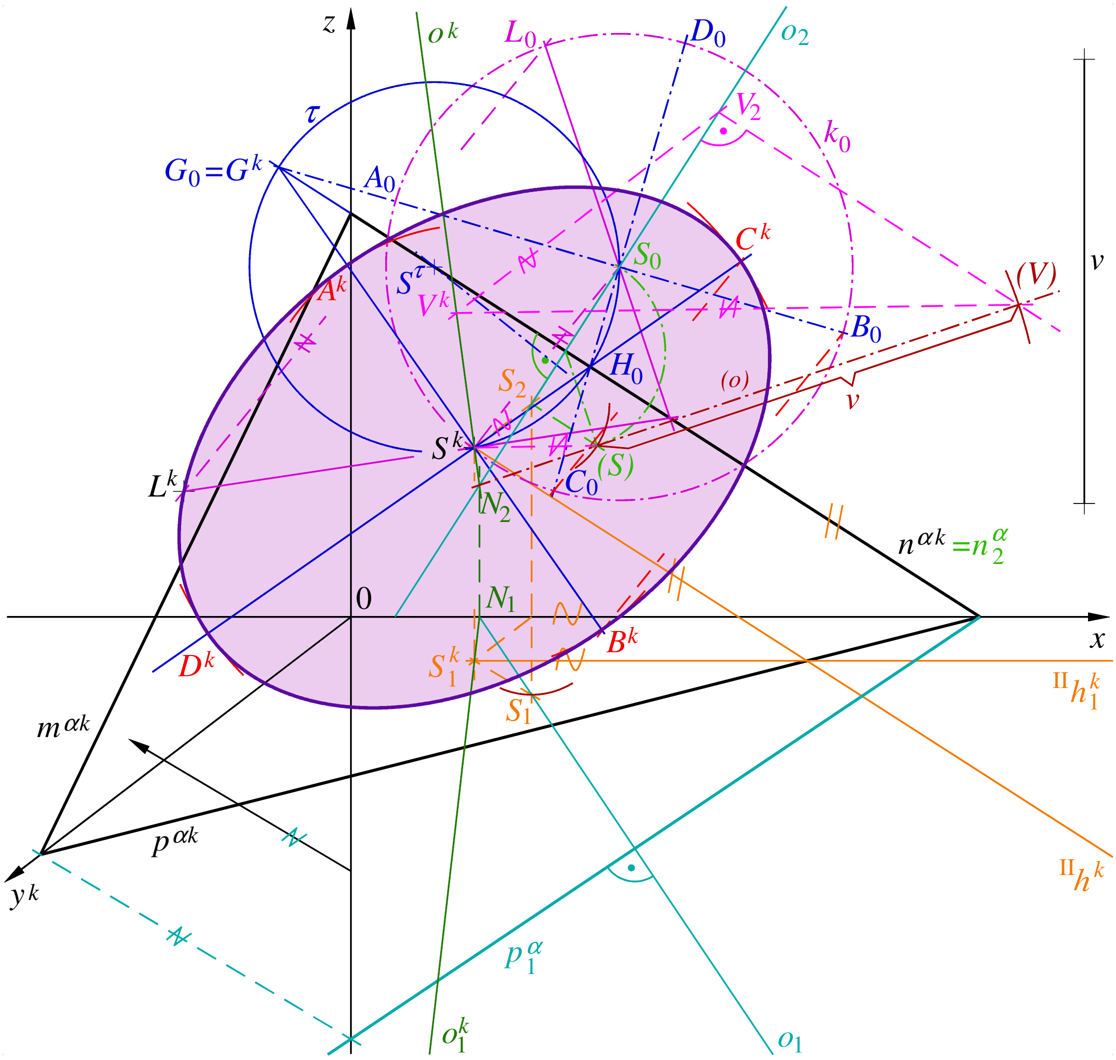


Vrchol V kužele leží na přímce o, a to ve vzdálenosti v od bodu S. Nanašení této vzdálenosti provedeme ve sklopení: rovinu, která prochází přímkou o a je kolmá na nárysnu, sklopíme do nárysny. Pracujeme tudíž s nárysem o_2 přímky o a chceme sestrojit přímku (o) sklopenou do nárysny. (Mohli bychom sklopit i rovinu obsahující přímku o, která je kolmá na půdorysnu. První případ je však výhodnější, neboť již známe bod (S), což je sklopený bod S do nárysny.) Protože $N_2 = (N)$, je $(o) = (N)(S) = N_2(S)$.

Na přímku (o) naneseme od bodu (S) vzdálenost v, a to tak, abychom vyhověli podmínce, že vrchol V tělesa je výše než střed S jeho podstavy. Tím získáme sklopený bod (V).

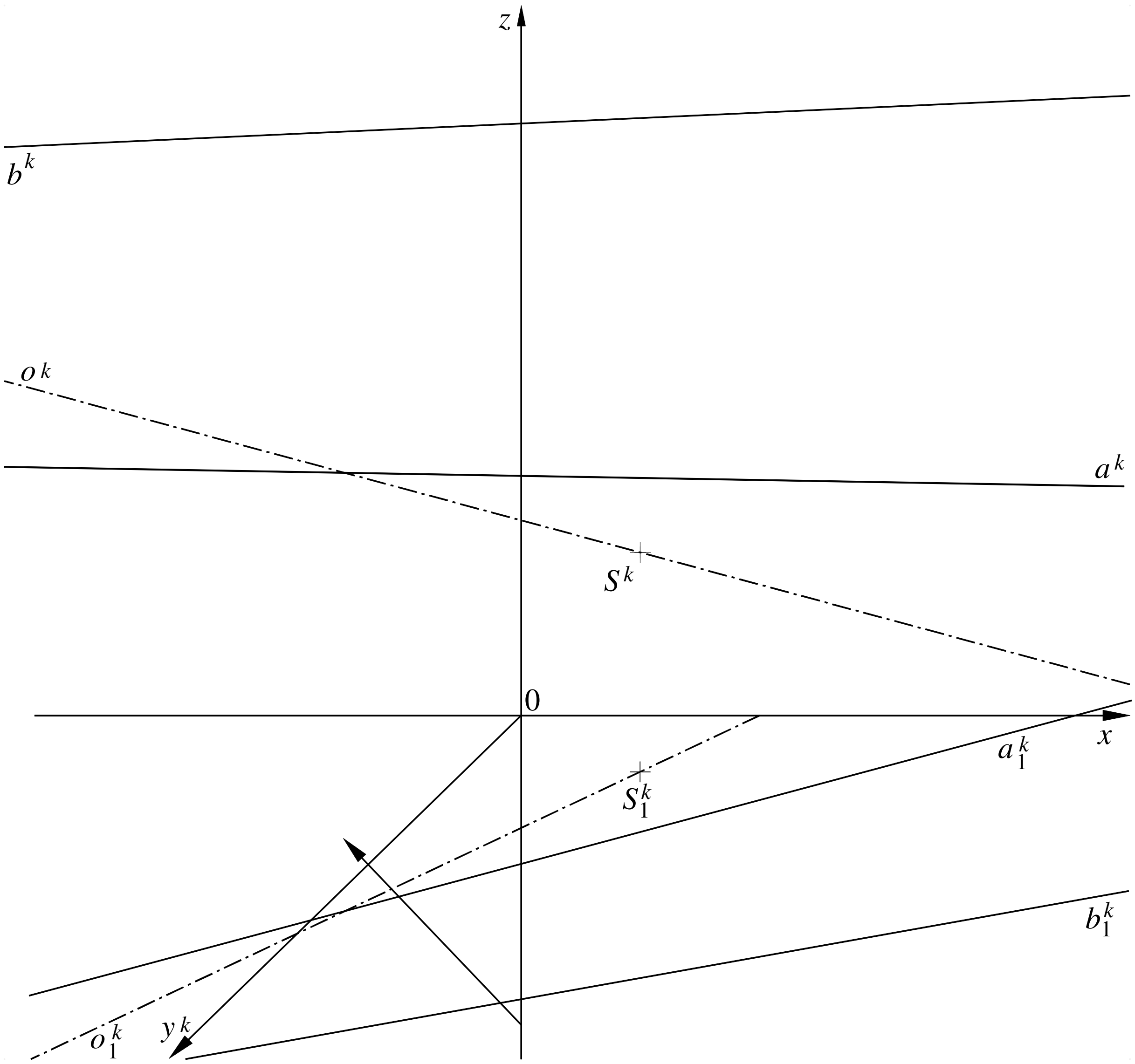


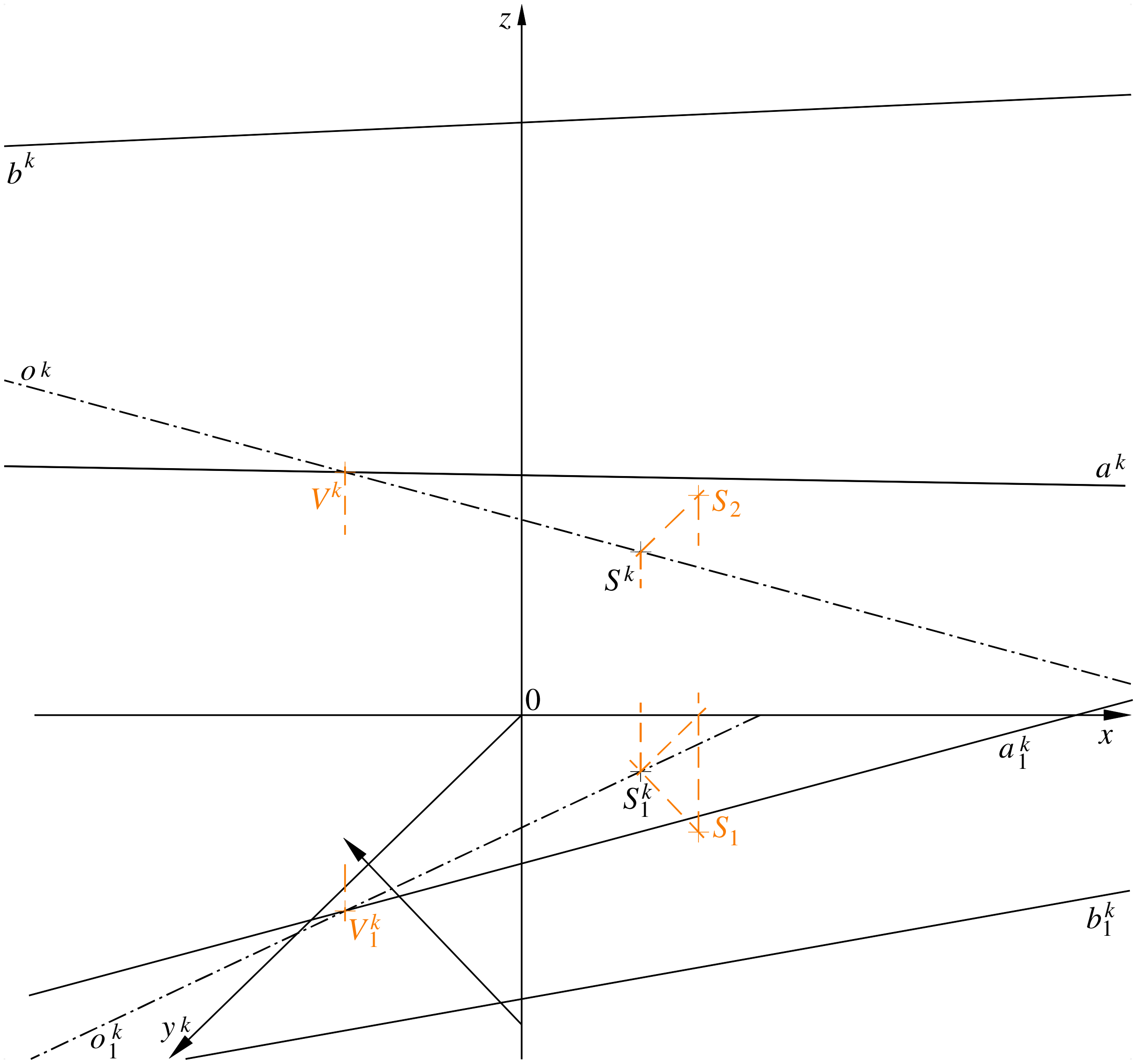
Kosoúhlý průmět V^k vrcholu V leží na kosoúhlém průmětu o^k osy o a současně platí, že přímky $(S)S^k$ a $(V)V^k$ jsou rovnoběžné. (Případně nejprve sestrojíme nárys V_2 vrcholu V a poté využijeme rovnoběžnosti přímek S_2S^k a V_2V^k.)



Jelikož kosoúhlý průmět V^k vrcholu V leží ve vnitřní části elipsy, která je kosoúhlým průmětem hraniční kružnice podstavy kuželе, je kosoúhlým průmětem tělesa elipsa a její vnitřní část.

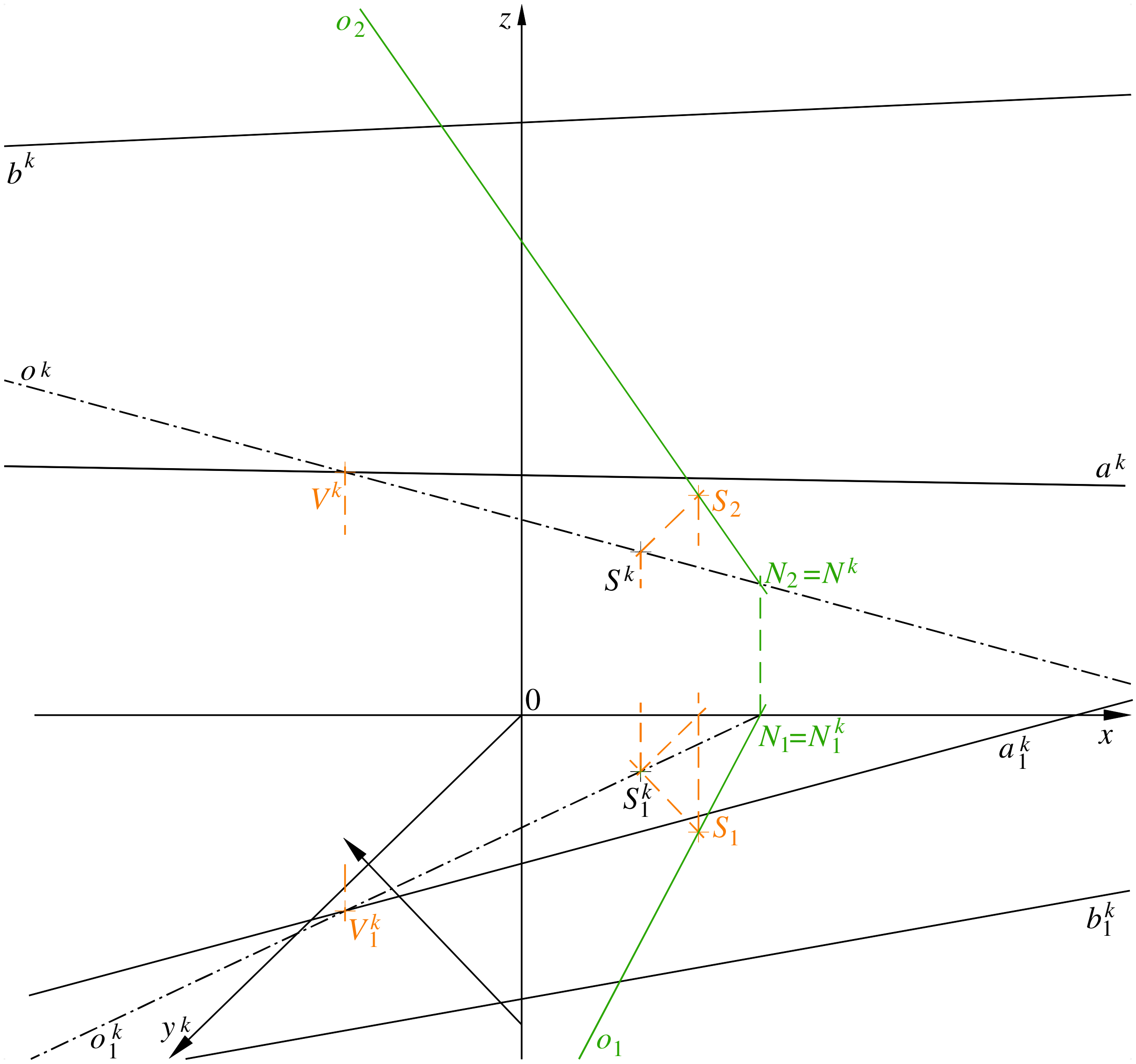
Příklad 4. Sestrojte kosoúhlý průmět rotačního kužele, jehož plášť vznikne rotací úsečky ležící na přímce a kolem přímky o a jehož podstava má střed S. Určete rovněž tečnou rovinu rovnoběžnou s danou přímkou b – sestrojte kosoúhlé průměty dvou přímek, které ji určují.





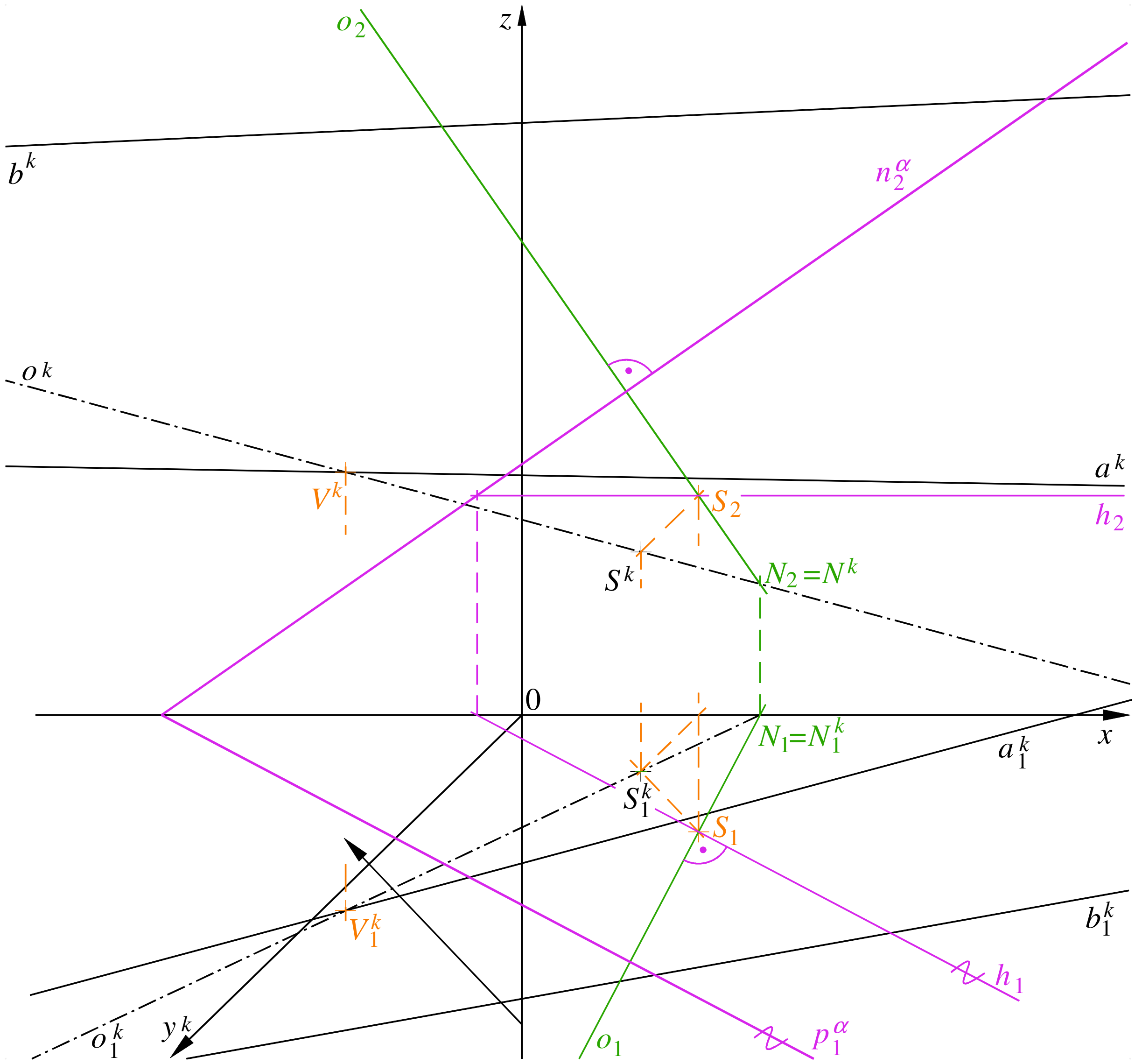
Vrchol V kužele leží jak na ose o, tak na přímce a (je jedním z krajních vrcholů úsečky, jejíž rotací vzniká plášť kužele). Kosoúhlý průmět V^k vrcholu V je proto průsečíkem kosoúhlých průmětů o^k, a^k přímek o, a, obdobně kosoúhlý půdorys V_1^k vrcholu V je průsečíkem kosoúhlých půdorysů o_1^k, a_1^k přímek o, a.

Jelikož bude nutné sestrojit rovinu podstavy, která je kolmá na přímku o a prochází bodem S, sestrojíme sdružené průměty S_1, S_2 bodu S v přidruženém Mongeově promítání.

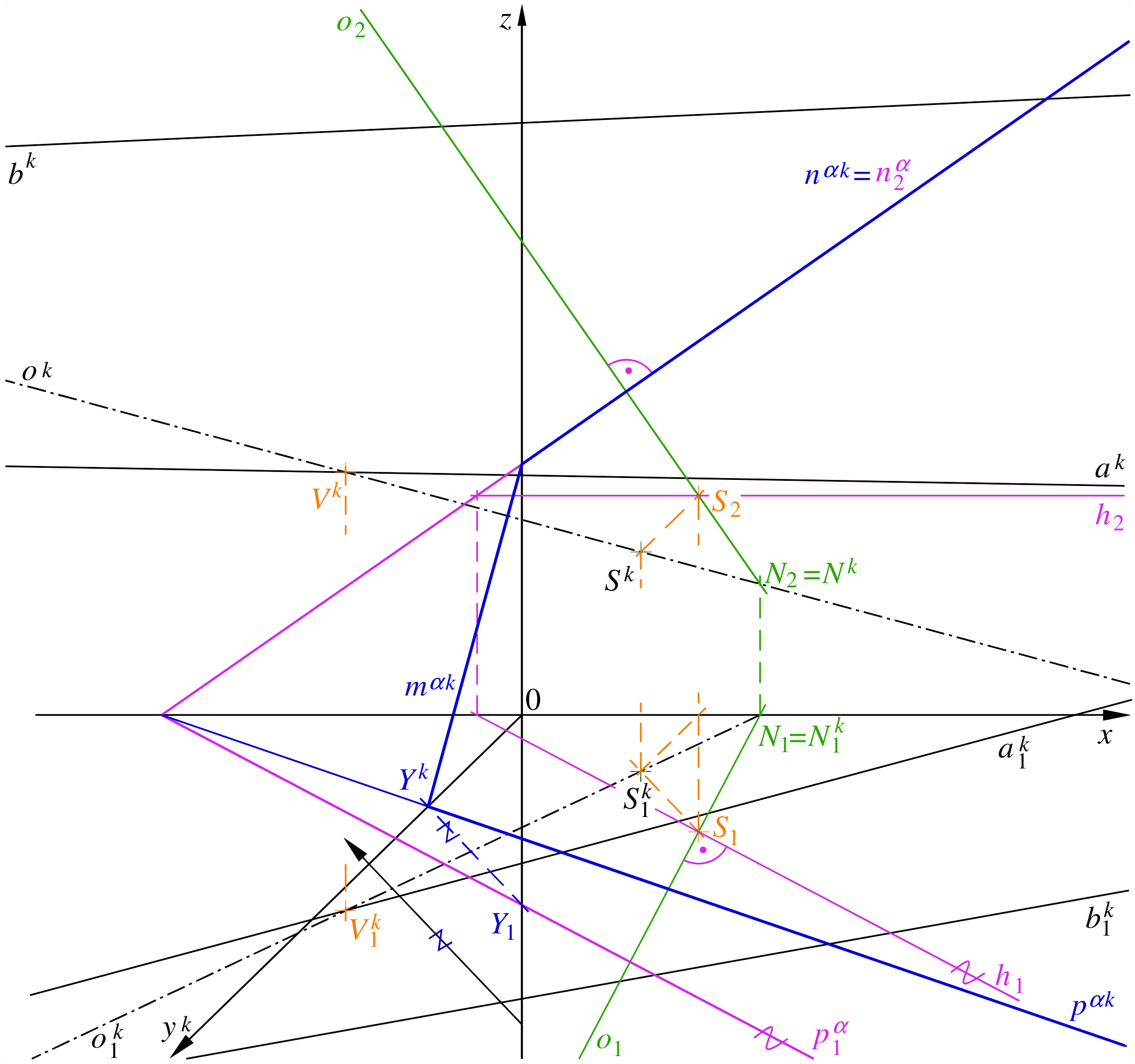


Nalezneme rovinu α, v níž leží podstava tělesa. Jak již bylo řečeno, je kolmá na osu o tělesa a prochází bodem S.

Sestrojíme proto sdružené průměty o_1, o_2 osy o v přidruženém Mongeově promítání. Využijeme-li jejího nárysného stopníku N, pro nějž platí $N_1 = N_1^k$ a $N_2 = N^k$, je půdorys o_1 přímky o určen půdorysy S_1, N_1 bodů S, N a její nárys o_2 je určen jejich nárysy S_2, N_2.

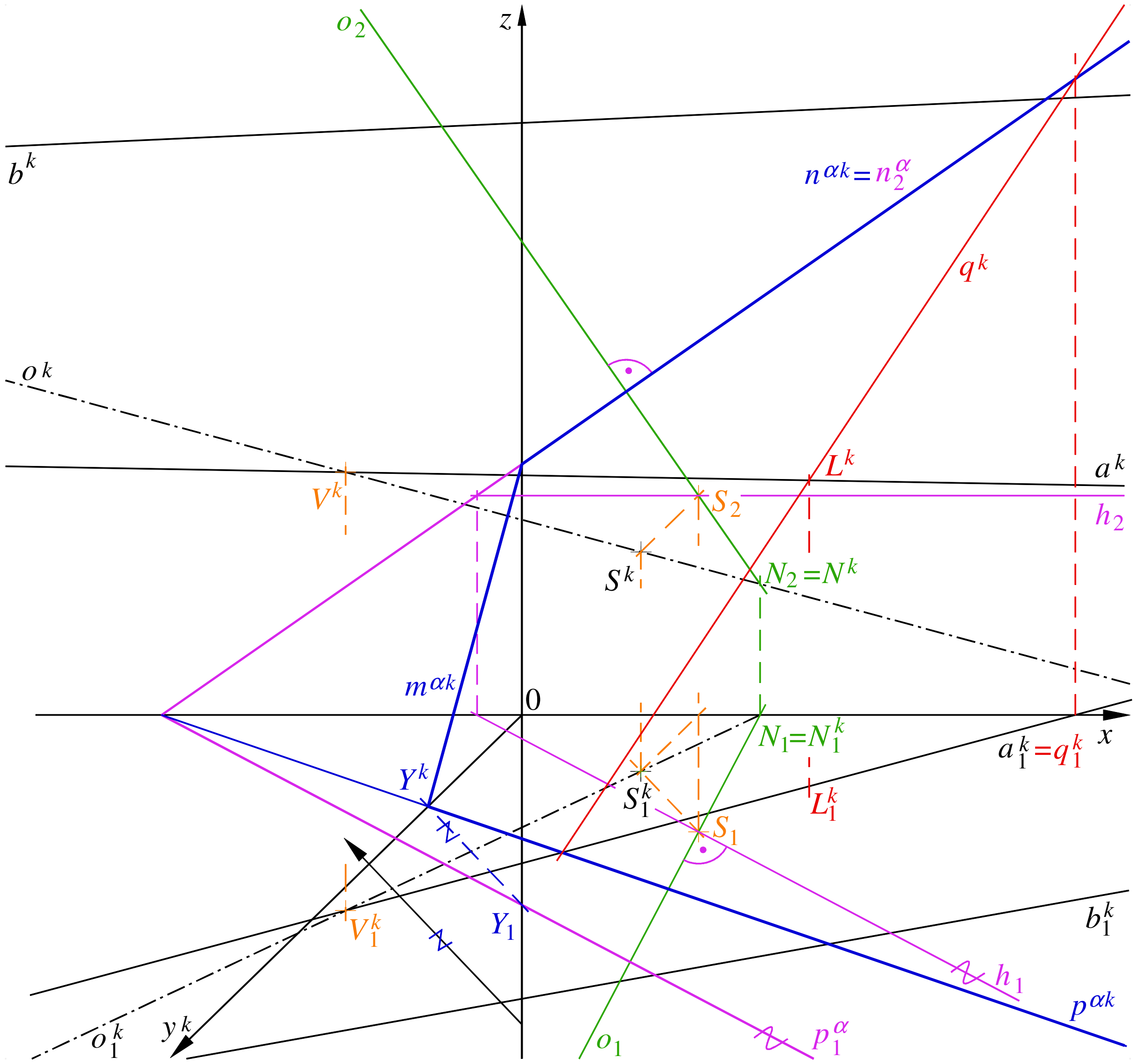


Pomocí horizontální přímky h hledané roviny α, která prochází bodem S, sestrojíme v přidruženém Mongeově promítání pravoúhlé průměty p_1^α, n_2^α půdorysné a nárysné stopy roviny α.



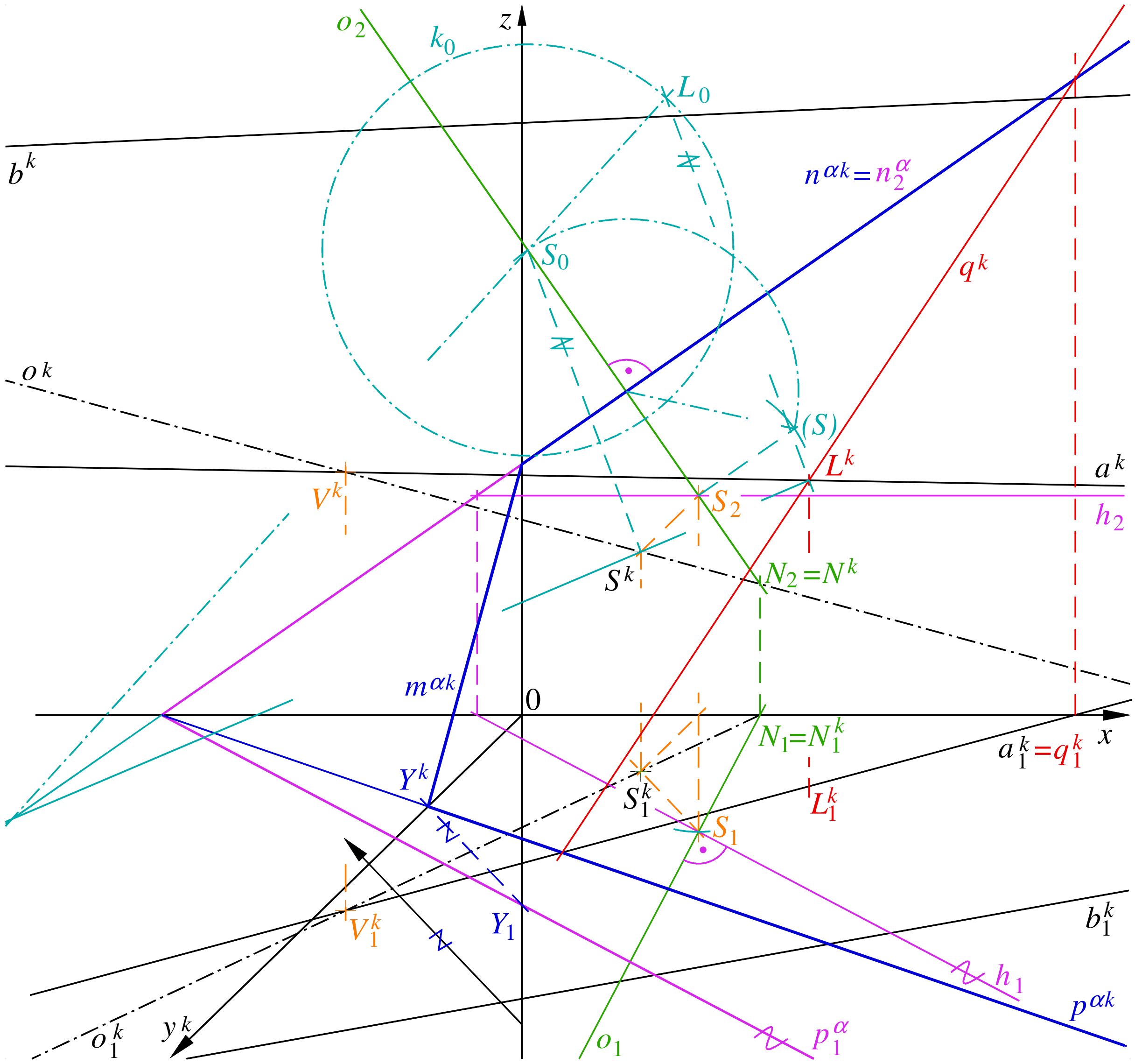
Rovinu α zobrazíme v kosoúhlém promítání. Kosoúhlý průmět $n^{\alpha k}$ její nárysné stopy n^α splývá s jejím nárysem n_2^α, tj. $n_2^\alpha = n^{\alpha k}$.

Kosoúhlý průmět $p^{\alpha k}$ její půdorysné stopy p^α získáme například pomocí kosoúhlého průmětu (kosoúhlého půdorysu) $Y^k = Y_1^k$ průsečíku Y půdorysné stopy p^α s osou y souřadnicového systému. Půdorys Y_1 bodu Y je přitom průsečíkem přímek p_1^α a $y_1 = z$.



Zobrazíme bod, který leží na hraniční kružnici podstavy kužele. Jedná se o průsečík přímky a a roviny podstavy α.

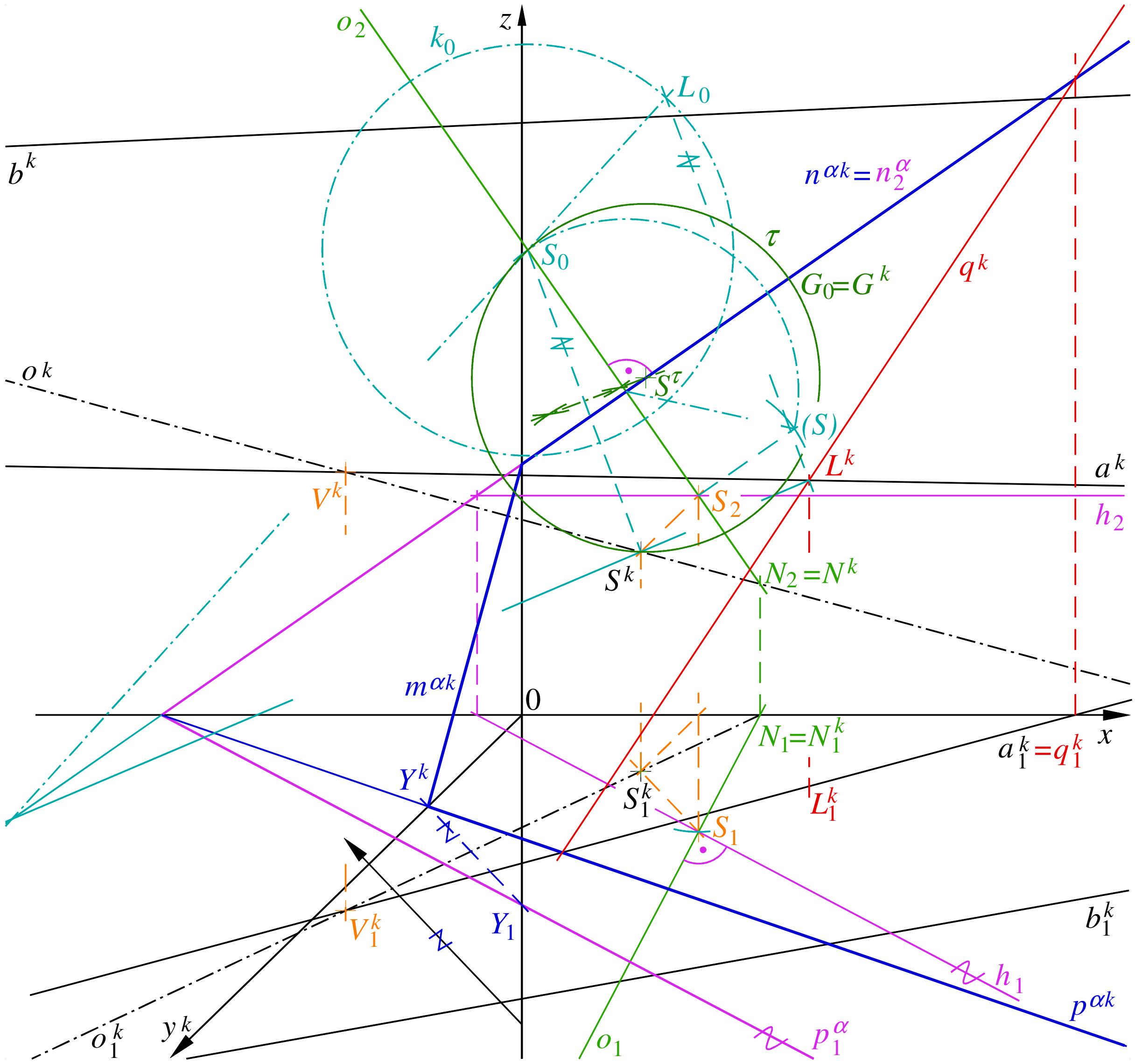
Označíme ho L a získáme ho například pomocí krycích přímek a, q, kde přímka q leží v rovině α a $a_1^k = q_1^k$. Pomocí půdorysného a nárysného stopníku přímky q zobrazíme její kosoúhlý průmět q^k a jeho průsečík L^k s kosoúhlým průmětem a^k přímky a je kosoúhlým průmětem bodu L. Jeho kosoúhlý půdorys L_1^k můžeme (ale nemusíme) nalézt na kosoúhlém půdorysu a_1^k přímky a pomocí ordinály.



Otočíme rovinu α kolem její nárysné stopy $n^\alpha = n_2^\alpha = n^{\alpha k}$ do nárysny.

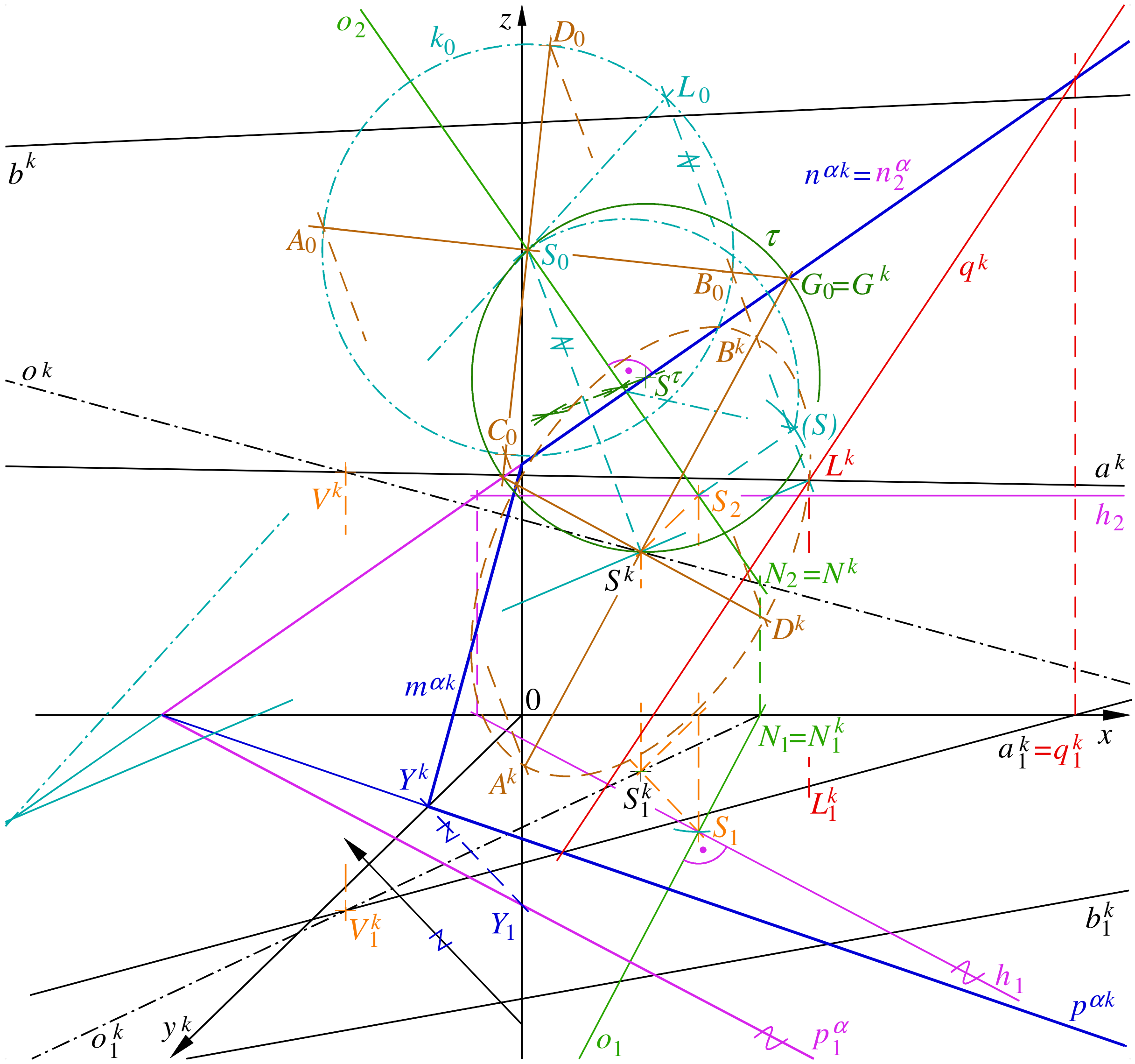
Nejprve otočíme například bod S. Pracujeme přitom s přidruženým Mongeovým promítáním, tj. s půdorysem S_1 a nárysem S_2 bodu S. Získáme sklopený bod (S) a následně otočený bod S_0.

Pomocí osové afinity, jejíž osou je přímka $n^\alpha = n_2^\alpha = n^{\alpha k}$ a v níž se bod S_0 zobrazí na bod S^k, nalezneme otočený bod L_0. Sestrojíme kružnici k_0 o středu S_0, jež prochází bodem L_0.



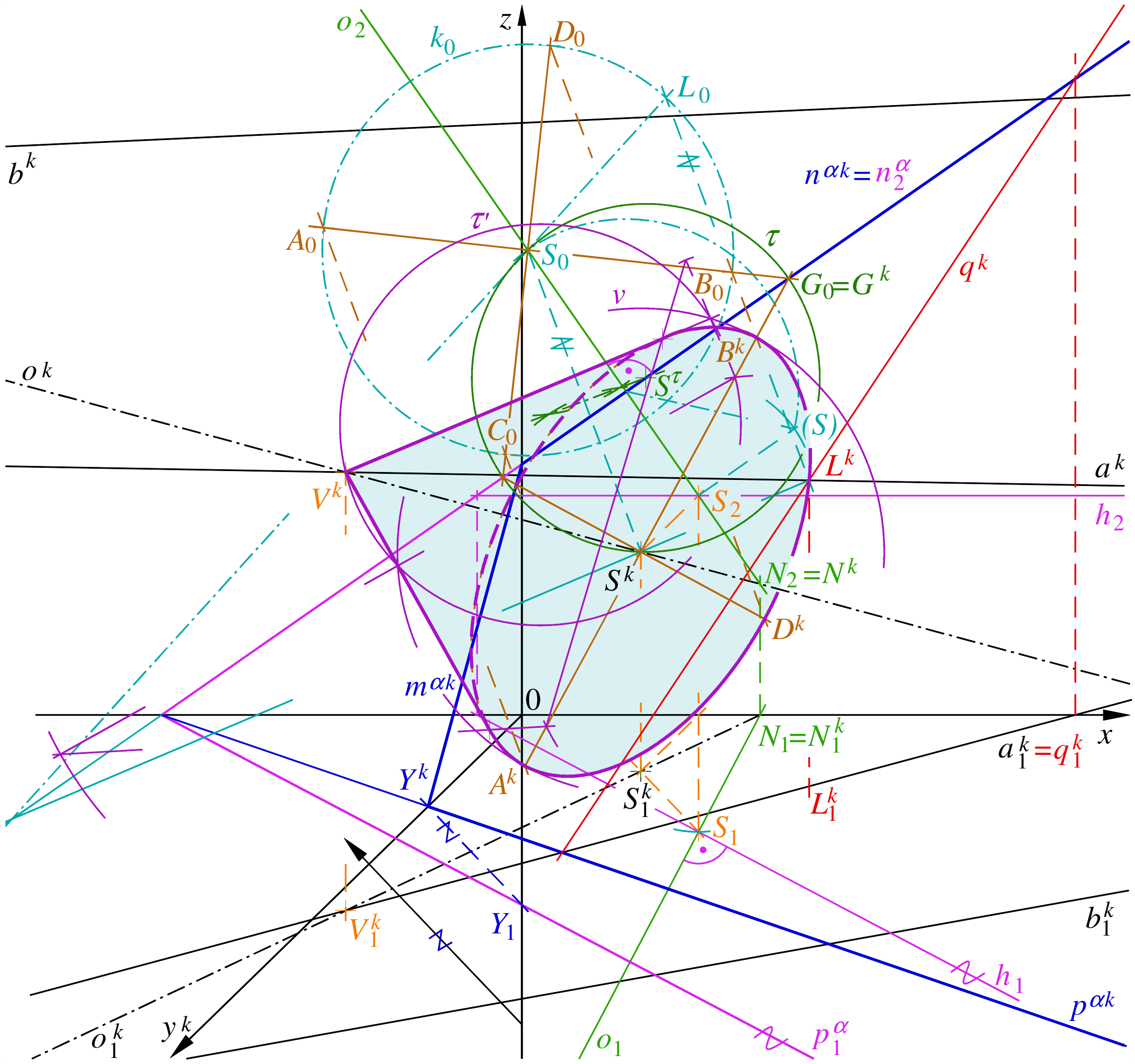
Ve výše popsané osové afinitě zobrazíme kružnici k_0, tj. získáme elipsu o středu S^k, která je kosoúhlým průmětem hraniční kružnice podstavy.

Abychom se vyhnuli Rytzově konstrukci, nalezněme takové sdružené (kolmé) průměry kružnice k_0, které se zobrazí na sdružené a zároveň kolmé průměry elipsy, tj. na její osy. K tomu využijeme Thaletovu kružnici τ o středu S^{τ}, která prochází bodem S_0, a tedy i bodem S^k.



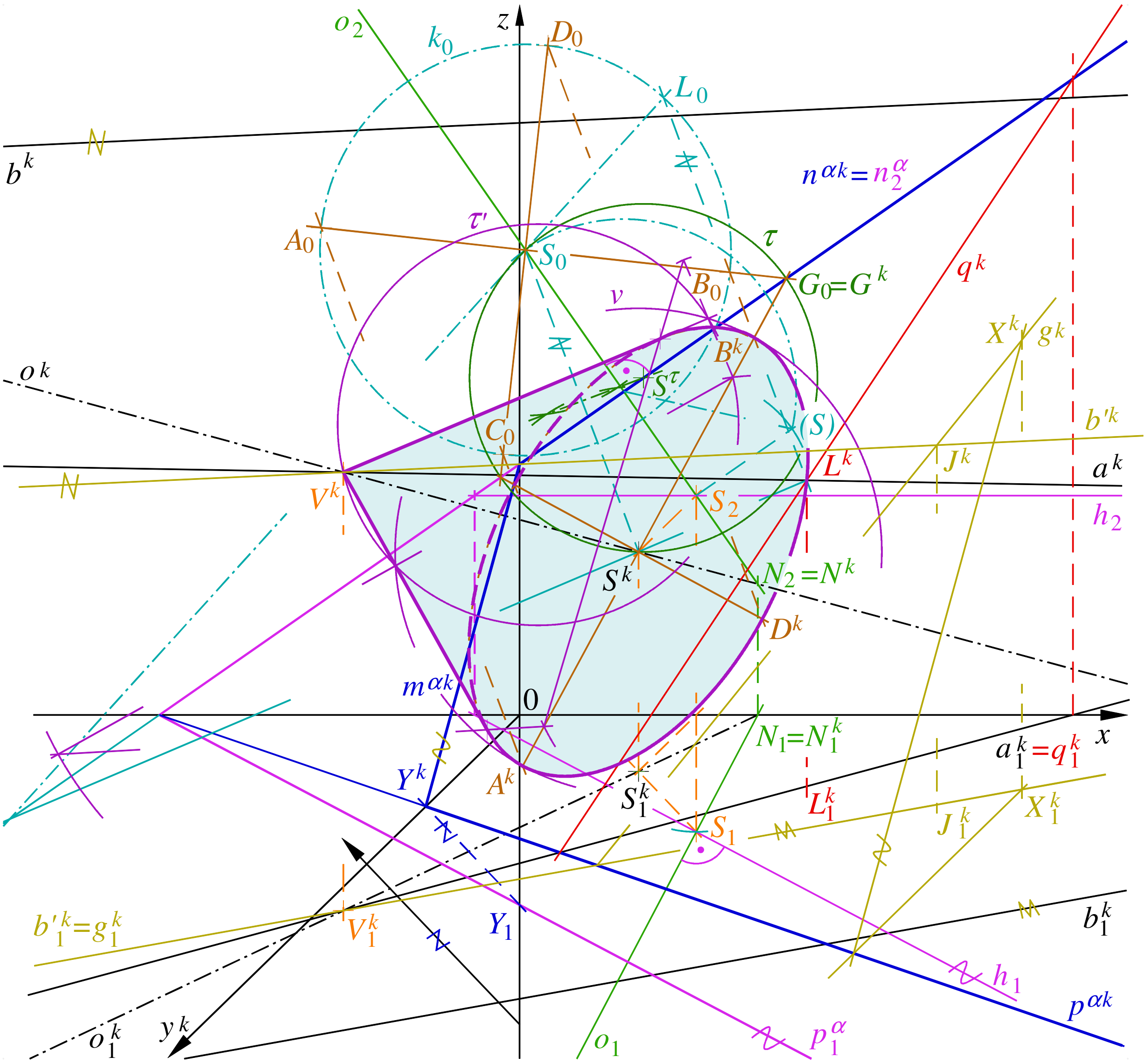
Průsečíky Thaletovy kružnice τ a osy afinity $n^{\alpha} = n_2^{\alpha} = n^{\alpha k}$ jsou samodružnými body hledaných sdružených (kolmých) průměrů kružnice, které se zobrazí na osy elipsy. (Jeden z průsečíků je na obrázku označen $G_0 = G^k$. Druhý z průsečíků je rovněž dostupný, ale upozorněme, že ho ani ke konstrukci nepotřebujeme, neboť stačí využít kolmosti průměrů kružnice, resp. elipsy.)

Sestrojme tedy sdružené (kolmé) průměry kružnice k_0, které se zobrazí na osy elipsy. Průsečíky těchto průměrů s kružnicí k_0 označme A_0, B_0, C_0 a D_0 a sestrojme jejich obrazy A^k, B^k, C^k, D^k, což jsou vrcholy hledané elipsy. Sestrojíme tuto elipsu.



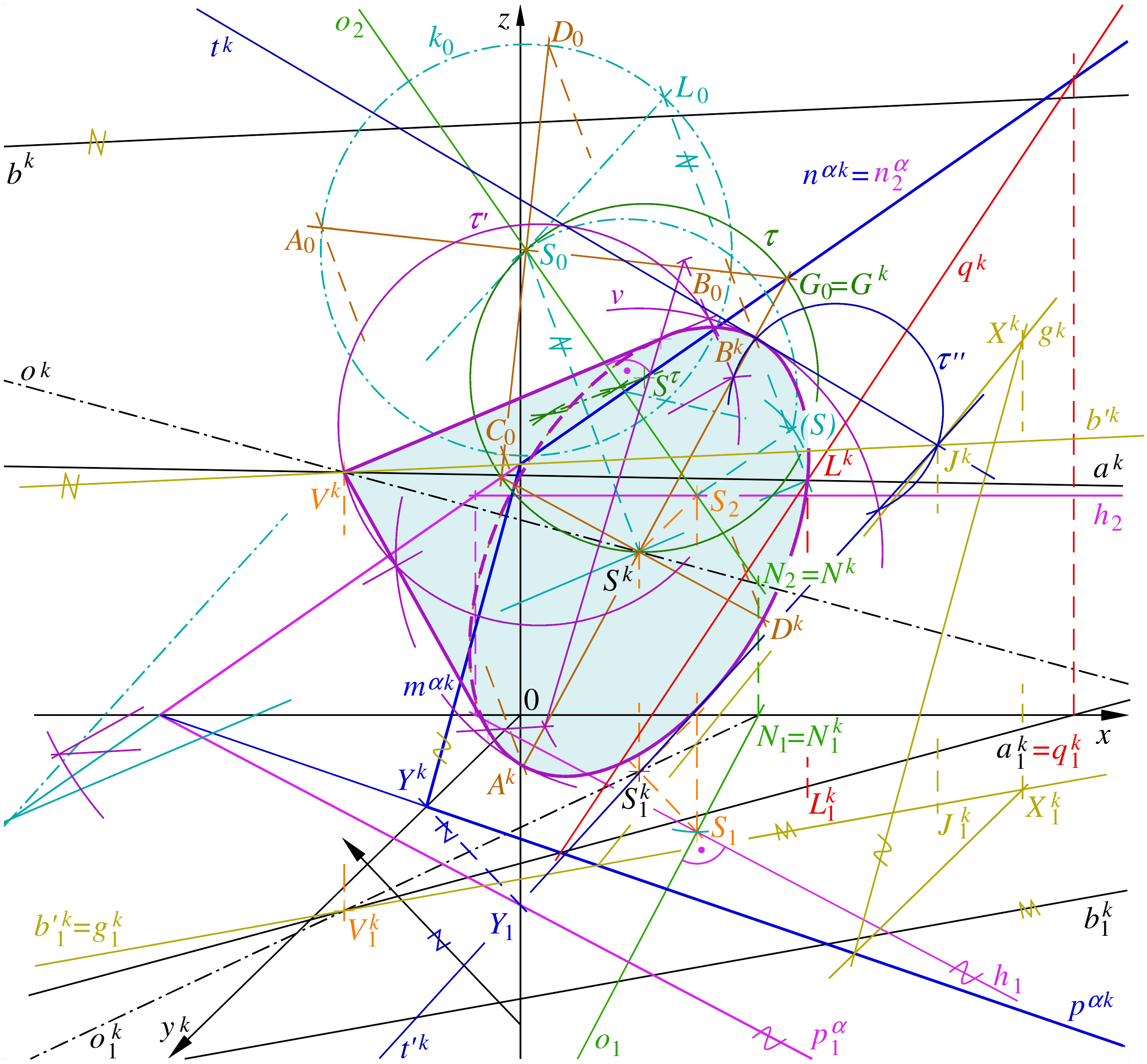
Nyní sestrojíme zbývající části zdánlivého obrysu kužele, tj. části tečen elipsy vedené bodem V^k. Využijeme k tomu ohniskové vlastnosti elipsy. Nalezneme proto ohniska elipsy a narýsujeme její vrcholovou kružnici v. Sestrojíme Thaletovu kružnici τ' nad průměrem, jehož krajními body jsou V^k a libovolné z ohnisek. Průsečíky Thaletovy kružnice τ' a vrcholové kružnice v jsou paty kolmic vedených ohnisky elipsy na hledané tečny. Jsou to tedy body tečen, které lze nyní sestrojit. Body dotyku tečen a elipsy nalezneme s využitím bodů souměrně sdružených s ohnisky podle jejích tečen, přesněji řečeno pomocí spojnic těchto bodů s druhým z ohnisek.

Tím je kosoúhlý průmět kužele určen.



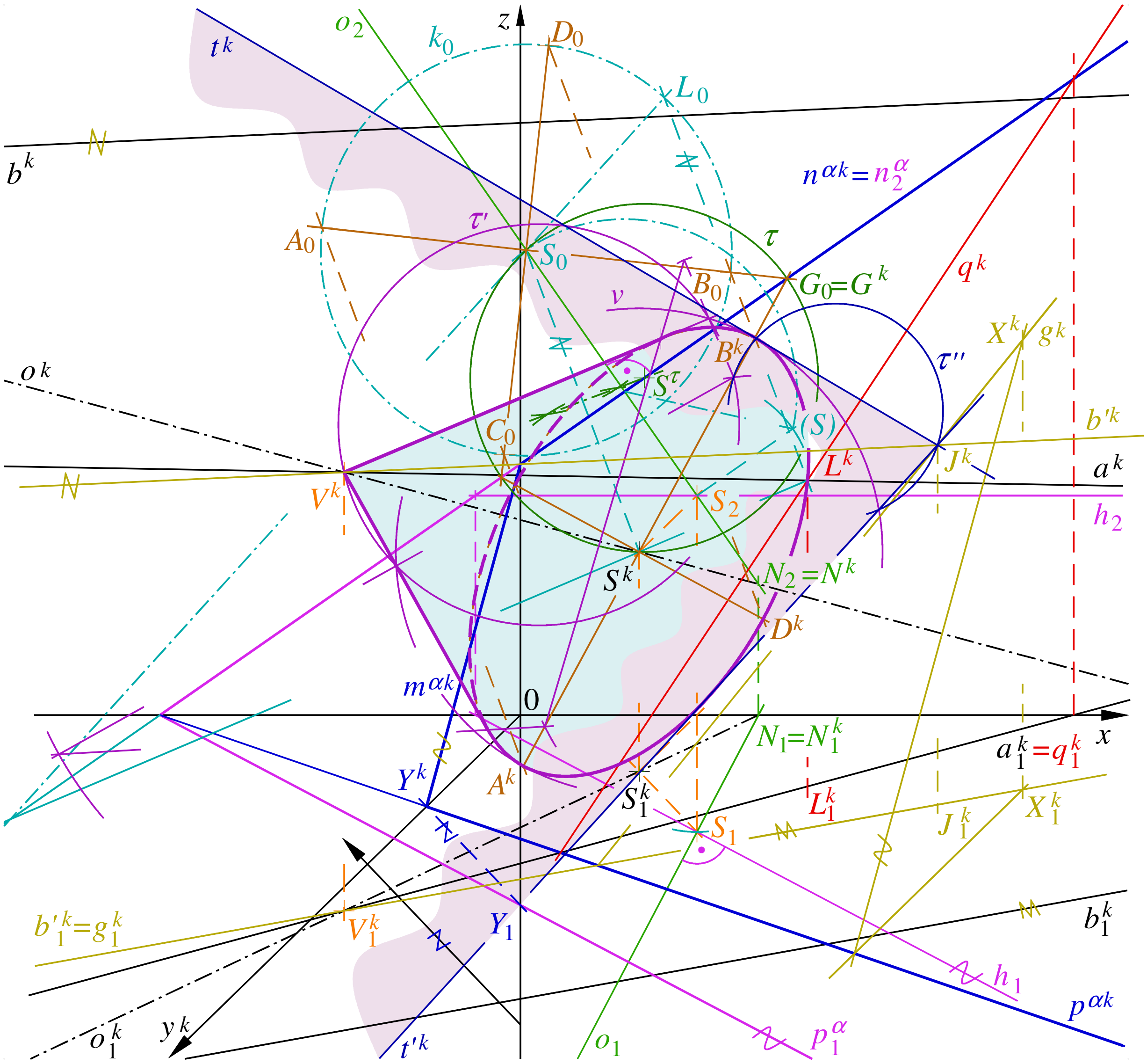
Na závěr hledejme tečnou rovinu tělesa rovnoběžnou s danou přímkou b. Tato rovina musí určitě obsahovat vrchol V kužele, resp. přímku b' rovnoběžnou s přímkou b, která bodem V prochází. Kosoúhlý průmět b'^k, resp. kosoúhlý půdorys $b_1'^k$ přímky b' prochází kosoúhlým průmětem V^k, resp. kosoúhlým půdorysem V_1^k bodu V a je rovnoběžný s kosoúhlým průmětem b^k, resp. s kosoúhlým půdorysem b_1^k přímky b.

Průsečík J přímky b' s rovinou α sestrojíme například pomocí krycích přímek b' a g, pro něž $b_1'^k = g_1^k$. Pro nalezení kosoúhlého průmětu g^k přímky g roviny α využijeme její půdorysný stopník a jeden její obecný bod X (na kosoúhlém půdorysu g_1^k přímky g zvolíme kosoúhlý půdorys X_1^k bodu X a pomocí hlavní přímky roviny α sestrojíme jeho kosoúhlý průmět X^k). Kosoúhlý průmět J^k bodu J je průsečíkem kosoúhlých průmětů b'^k, g^k přímek b', g. (Kosoúhlý půdorys J_1^k bodu J lze získat pomocí ordinály, není však nutné ho sestrojovat.)



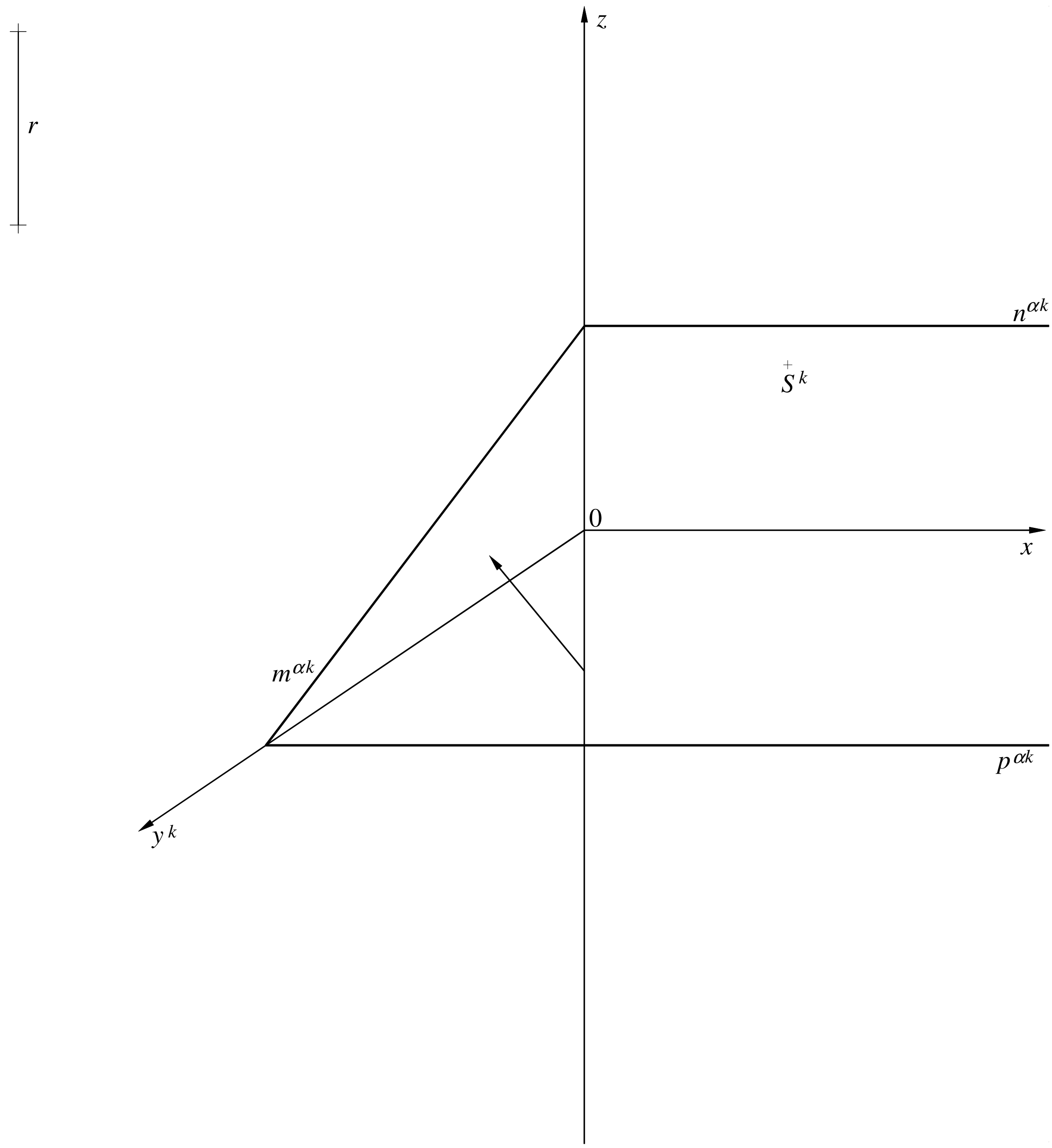
Jelikož bod J nenáleží podstavě kužele, existují dvě tečné roviny kužele rovnoběžné s přímkou b. Každá z nich je určena přímkou b' a jednou z tečen t, t' kruhové podstavy, které jsou vedeny bodem J. Kosoúhlé průměty t^k, t'^k tečen t, t' jsou tečnami sestrojené elipsy vedenými bodem J^k. Sestrojíme je pomocí vrcholové kružnice v a Thaletovy kružnice τ'' sestrojené nad průměrem, jehož krajními body jsou J^k a jedno z ohnisek. Body dotyku nalezneme využitím bodů souměrně sdružených s ohnisky elipsy podle jejích tečen.

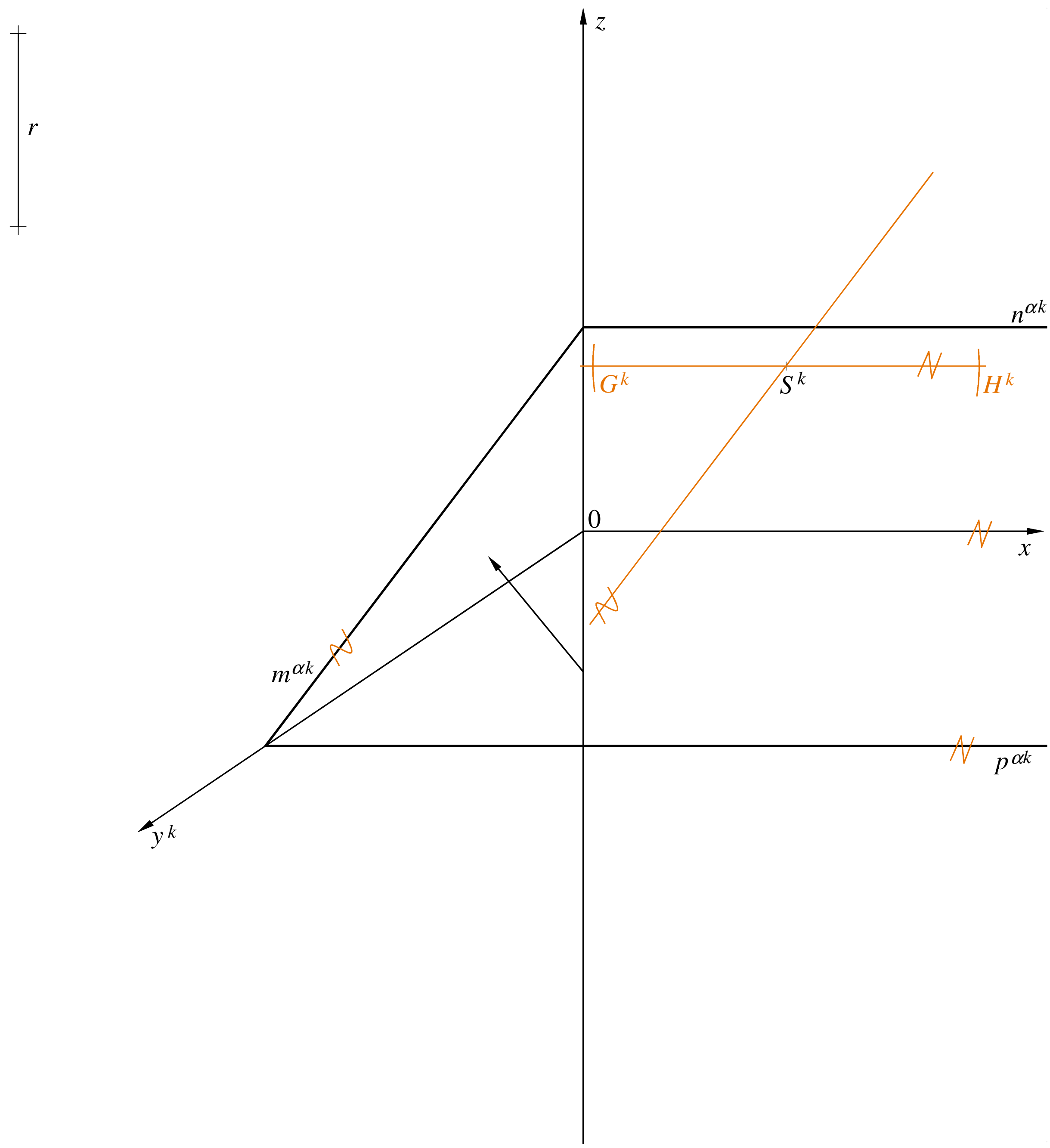
Hledanými kosoúhlými průměty dvou přímek, které určují tečnou rovinu, jsou tedy kosoúhlé průměty b'^k, t^k přímek b', t, resp. kosoúhlé průměty b'^k, t'^k přímek b', t'.



Na tomto obrázku jsou pro lepší názornost zvýrazněny části průmětů tečných rovin.

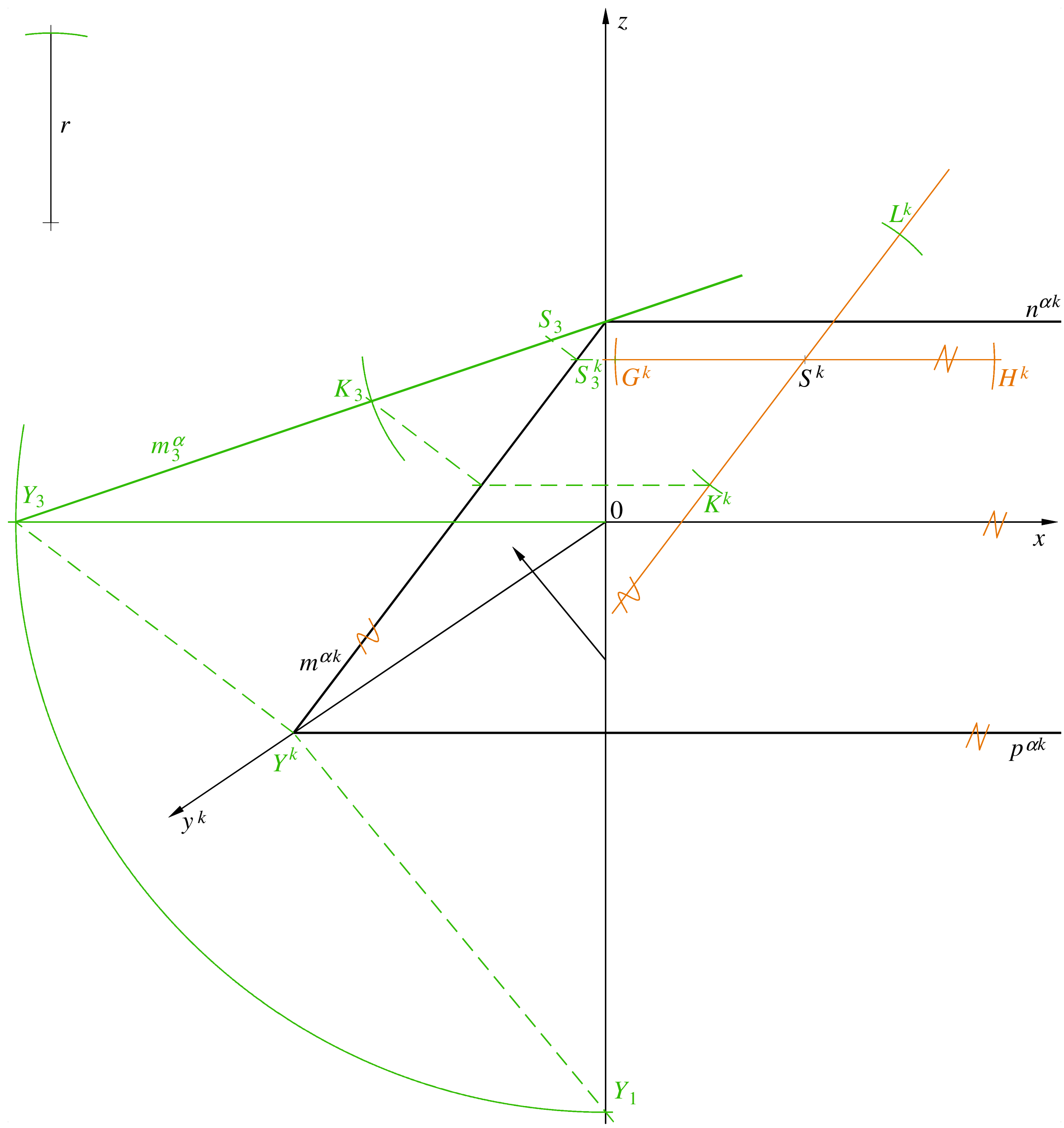
Příklad 5. V daném kosoúhlém promítání sestrojte kosoúhlý průmět rovnostranného kužele. Podstava kužele leží v rovině α, poloměr podstavy kužele je r, její střed S. Vrchol V kužele je výše než bod S, tj. $z^V > z^S$.



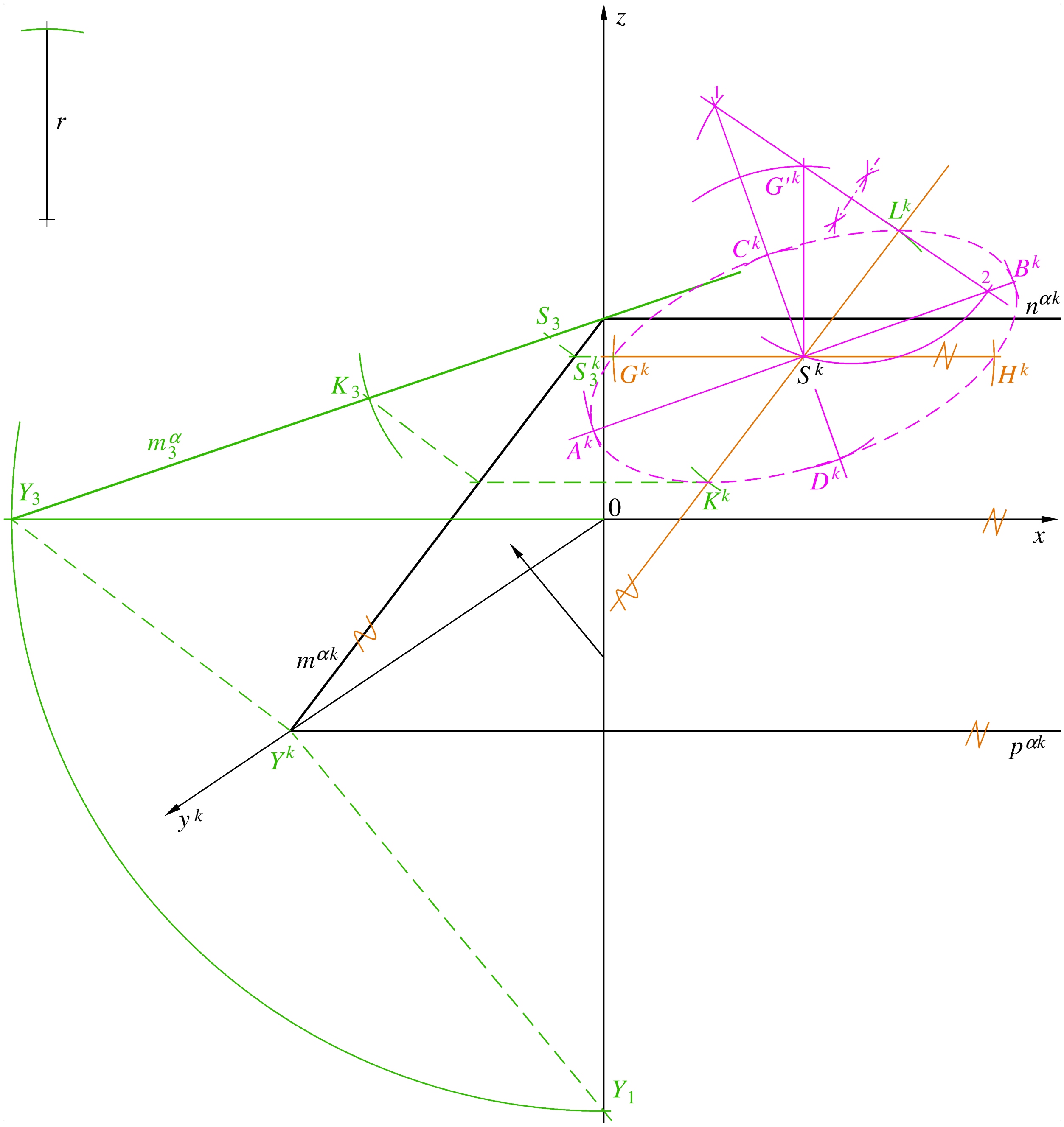


Sestrojíme kosoúhlý průmět podstavy kužele, kterým je elipsa a její vnitřní část. Středem elipsy je kosoúhlý průmět S^k středu S podstavy. Elipsu určíme jejími sdruženými průměry, kterými jsou kosoúhlé průměty dvou sdružených (kolmých) průměrů hraniční kružnice podstavy. Budeme uvažovat průměry kružnice, z nichž jeden je rovnoběžný s půdorysnou (a tedy i nárysnou) stopou roviny α a druhý je rovnoběžný se stopou bokorysnou. Kosoúhlé průměty těchto průměrů jsou rovnoběžné s kosoúhlými průměty zmíněných stop.

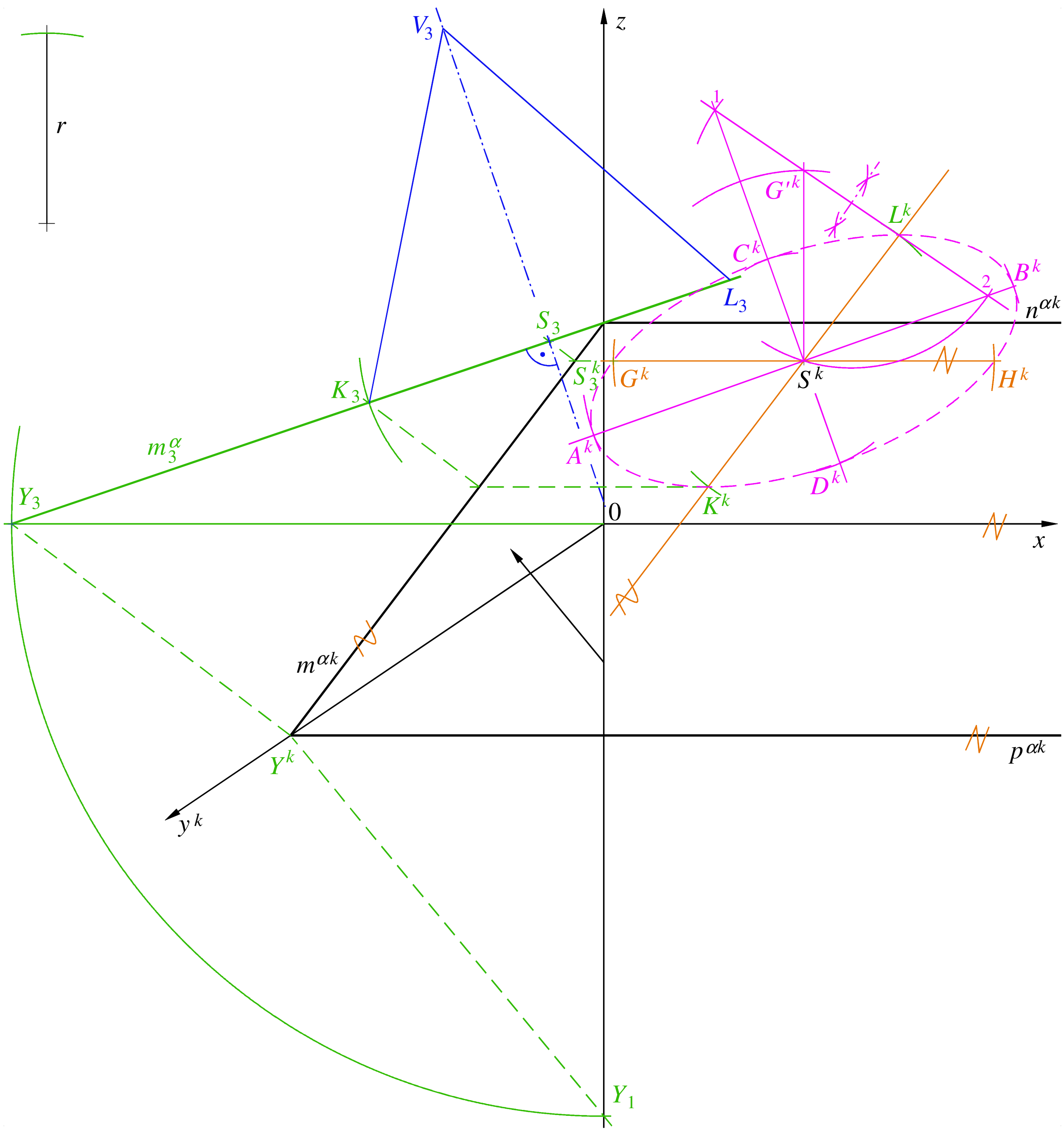
Na kosoúhlém průmětu průměru vodorovného s půdorysnou stopou roviny α se zachovávají vzdálenosti, proto krajní body G^k, H^k průměru leží ve vzdálenosti r od bodu S^k.



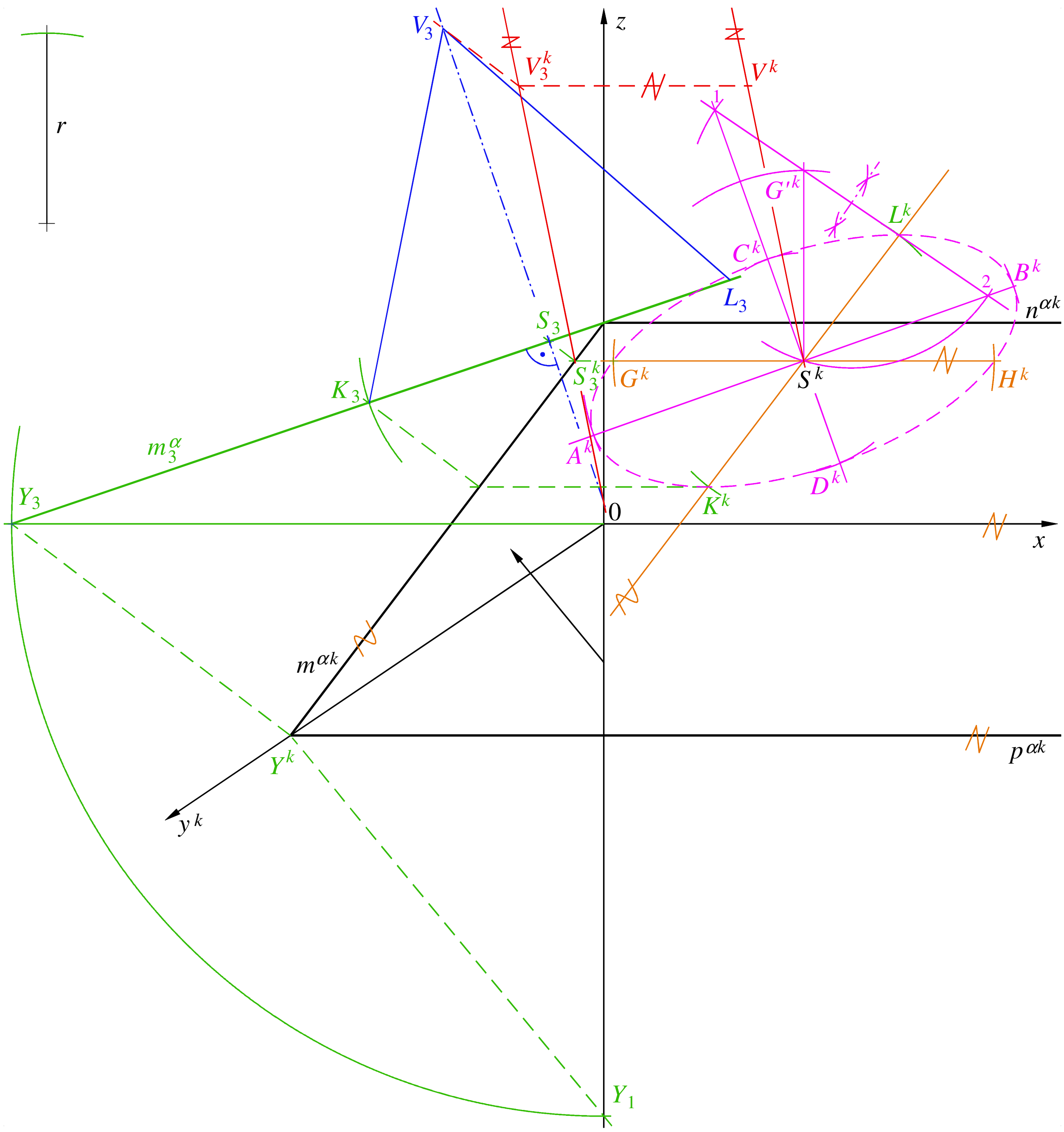
Pro krajní body K^k, L^k druhého průměru elipsy se jejich vzdálenost r od bodu S^k zkreslí. Zkreslení zjistíme pomocí třetího průmětu α_3 roviny α, který splývá s třetím průmětem m_3^α její bokorysné stopy a který získáme pomocí třetího průmětu Y_3 průsečíku Y roviny α s osou y a pomocí třetího průmětu průsečíku roviny α s osou z (tento bod splývá se svým třetím průmětem). Nalezneme třetí průmět S_3 bodu S a od něj naneseme vzdálenost r na třetí průmět $\alpha_3 = m_3^\alpha$ roviny α. Získáme třetí průmět K_3 bodu K a následně krajní bod K^k průměru elipsy. Druhý krajní bod L^k průměru elipsy nalezneme buď zcela analogicky nebo jako obraz bodu K^k ve středové souměrnosti o středu S^k.



Jelikož jsou průměry G^kH^k, K^kL^k sdruženými průměry elipsy, můžeme k nalezení jejích hlavních vrcholů A^k, B^k a vedlejších vrcholů C^k, D^k využít Rytzovu konstrukci.

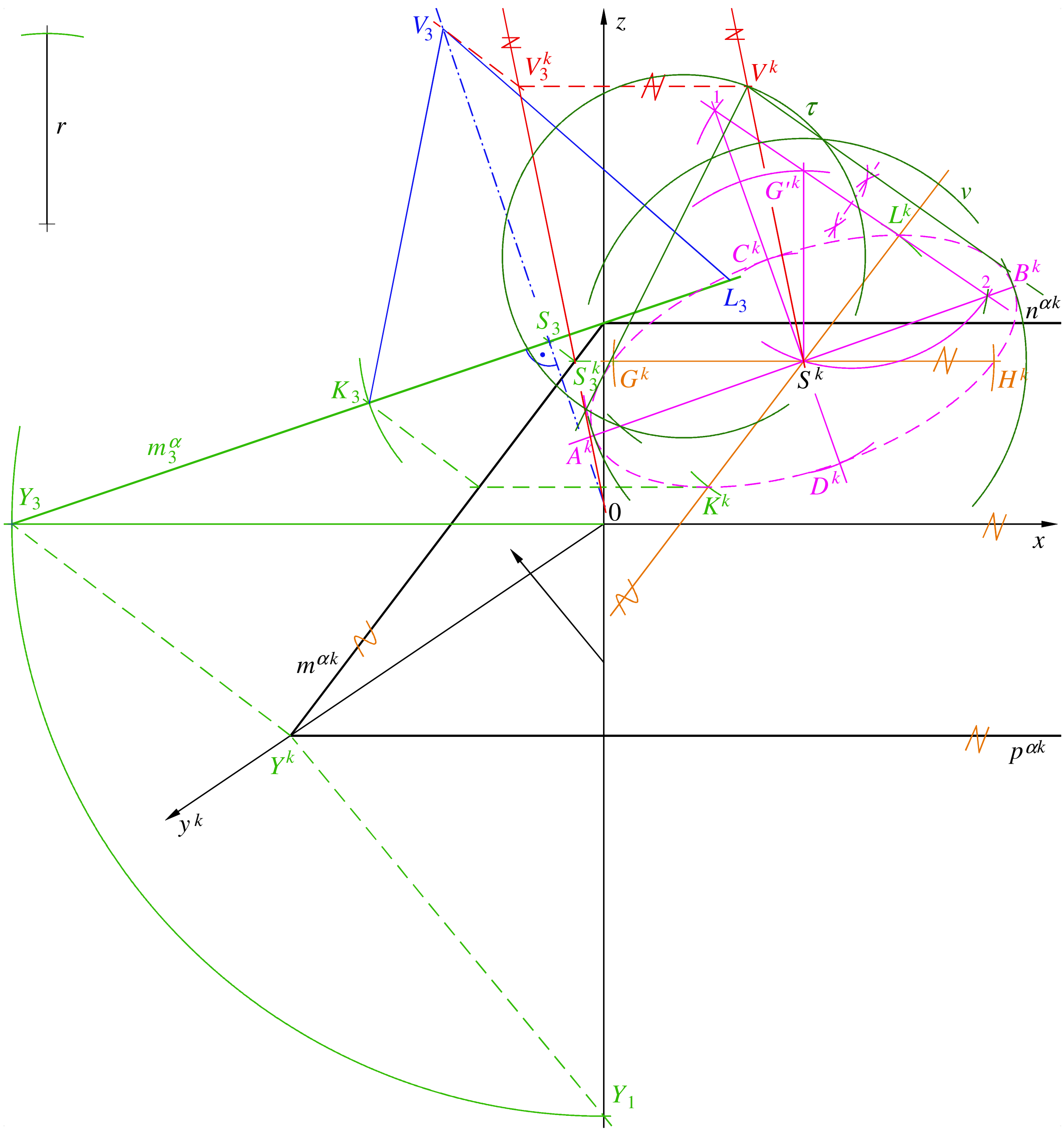


K sestrojení kosoúhlého průmětu V^k vrcholu V využijeme třetí průmět kužele. Jelikož je tento kužel rovnostranný, je jeho třetím průmětem rovnostranný trojúhelník $K_3L_3V_3$, jehož strana K_3L_3 leží na třetím průmětu $\alpha_3 = m_3^\alpha$ roviny α (vyhovíme přitom podmínce $z^V > z^S$). Sestrojíme rovněž třetí průmět S_3V_3 osy kužele.

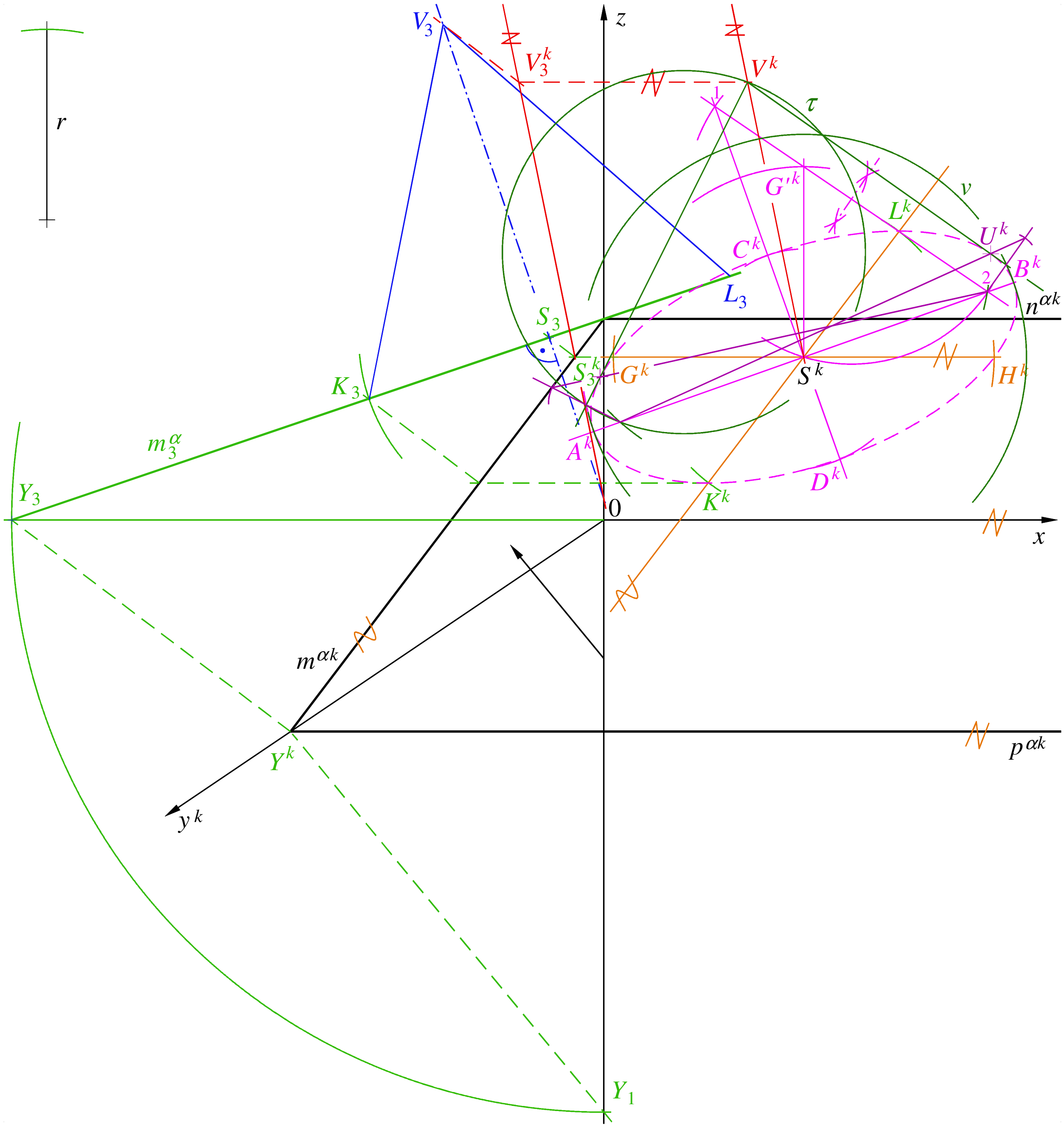


Nyní nalezneme kosoúhlý bokorys $S_3^k V_3^k$ osy kužele. K sestrojení kosoúhlého bokorysu V_3^k vrcholu V přitom využijeme průsečík třetího průmětu S_3V_3 osy kužele s osou z souřadnicového systému (třetí průměty a kosoúhlé bokorysy bodů na ose z splývají) a rovnoběžnosti přímek $S_3S_3^k$ a $V_3V_3^k$.

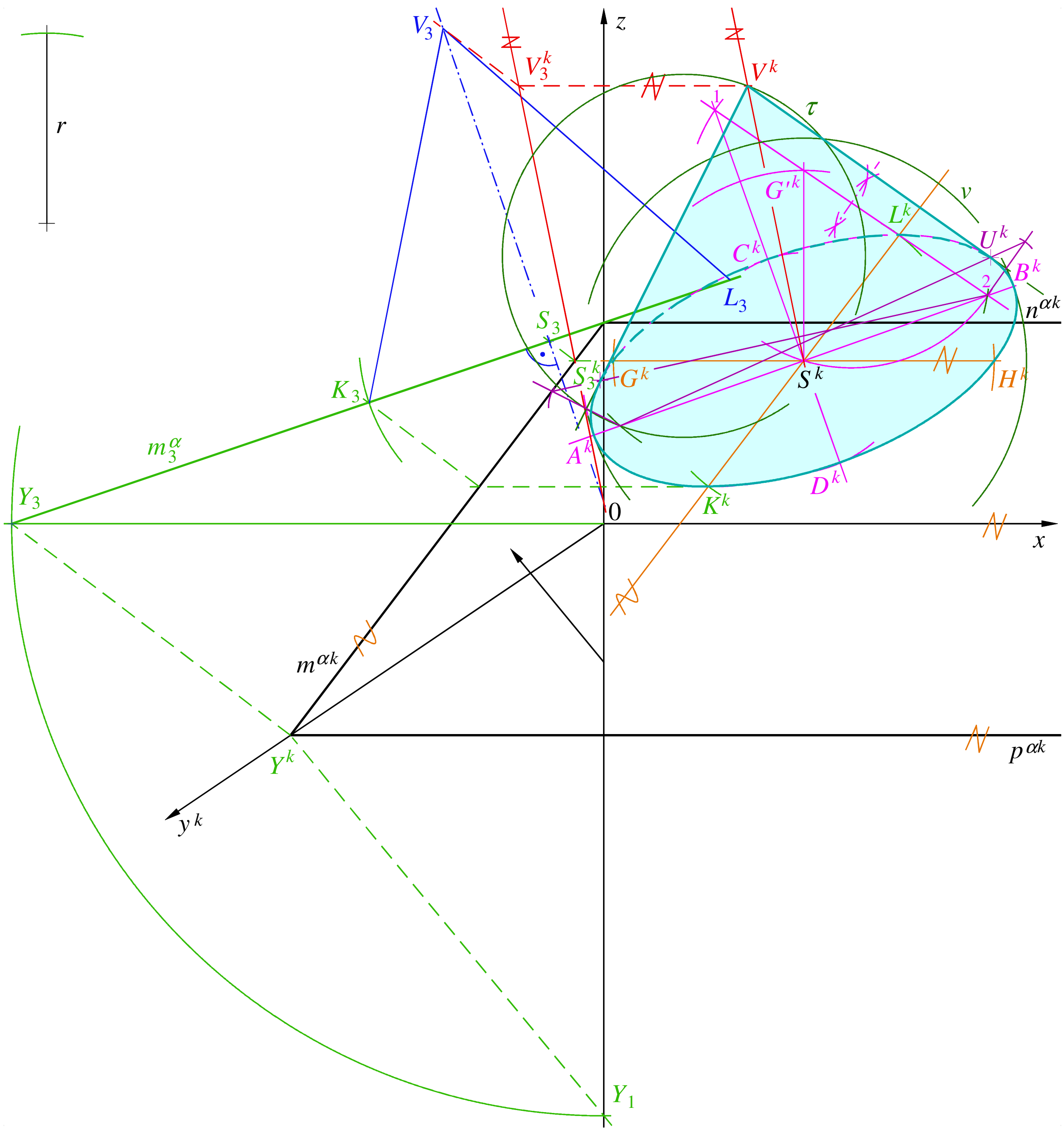
Sestrojíme kosoúhlý průmět V^k vrcholu V kužele. Přímky S^kV^k a $S_3^kV_3^k$ jsou rovnoběžné a platí $\left|S_3^kV_3^k\right| = \left|S^kV^k\right|$.



Pomocí vrcholové kružnice v sestrojené elipsy a pomocí Thaletovy kružnice τ sestrojené na průměrem, jehož krajními body jsou V^k a jedno z ohnisek elipsy, sestrojíme tečny elipsy procházející bodem V^k.



S využitím bodů souměrně sdružených s ohnisky elipsy podle právě sestrojených tečen nalezneme jejich body dotyku (jeden z bodů dotyku je na obrázku označen U^k).



Úseky na tečnách tvoří zbývající části zdánlivého obrysu kužele. Na závěr určíme viditelnost tělesa a případně jeho kosoúhlý průmět zvýrazníme vybarvením.