PRŮNIKY TĚLES

(především mnohostěnů)

Martina Škorpilová

Matematicko-fyzikální fakulta Univerzity Karlovy

Praha

Studijní text je věnován průnikům těles s důrazem na průnik mnohostěnů (hranolů a jehlanů). Na úvodních stranách je uvedena teorie potřebná k řešení příkladů z uvažované problematiky. Hlavní náplní materiálu jsou konkrétní řešené a podrobně komentované úlohy. Poslední prezentovaný příklad je ukázkou, jak lze uvedené metody modifikovat pro průnik mnohostěnu s válcem či kuželem (na stejném principu je možné sestrojit i průnik dvojice válců, resp. dvojice kuželů, resp. válce a kužele).

Studované téma je na Matematicko-fyzikální fakultě Univerzity Karlovy přednášeno a cvičeno v předmětu *Deskriptivní geometrie I*, který je standardně vyučován pro budoucí učitele matematiky a deskriptivní geometrie v zimním semestru 1. ročníku. Vzhledem ke skutečnostem, že předmět je značně rozsáhlý, co se obsahu i časové dotace týče (4 hodiny přednášek a 3 hodiny cvičení), a ke studiu deskriptivní geometrie se přihlašují rovněž studenti bez znalostí zobrazovacích metod ze střední školy, věřím, že tento studijní text pomůže učivo snáze pochopit. Příklady z této problematiky se řeší také ve 2. ročníku v předmětu *Seminář z deskriptivní geometrie I* a mohou ho tak v případě problémů s řešením úloh využít i zkušenější studenti, kteří by měli mít teorii již pevně zažitou.

PRŮNIKY TĚLES A PLOCH

Průnikem dvou *těles*, resp. *ploch* je množina všech společných bodů daných geometrických útvarů.

Průnikem může být prázdná množina, jeden bod nebo jednorozměrný, dvourozměrný či trojrozměrný útvar.

V našem textu se zaměříme na průnik jehlanů a hranolů, resp. jehlanových a hranolových ploch. Budeme přitom vždy uvažovat průnik dvojice daných geometrických útvarů.

Příklady budou řešeny v kótovaném a v Mongeově promítání, tj. v zobrazovacích metodách, které jsou probírány v předmětu *Deskriptivní geometrie I.* Dále uvedený princip lze však použít i v ostatních zobrazovacích metodách.

Průniky jehlanů a hranolů, resp. hranolových a jehlanových ploch

Průnikem hranolů a jehlanů, resp. hranolových a jehlanových ploch[1] může být jakákoliv možnost uvedená výše pro tělesa a plochy. Průnikem může tedy být prázdná množina (geometrické útvary se neprotínají), jeden bod (např. vrchol jehlanu náleží stěně hranolu a všechny ostatní body jehlanu nenáležejí hranolu), jednorozměrný útvar (úsečka – např. hrana jehlanu je součástí stěny hranolu a všechny ostatní body jehlanu nenáležejí hranolu; přímka – např. hranolové plochy se dotýkají podél svých hran), dvourozměrný útvar (např. jediná stěna jehlanu je součástí stěny hranolu) nebo trojrozměrný útvar (mnohostěn v případě těles nebo prostorová lomená čára v případě ploch).

Ve všech dále uvedených příkladech nebudeme uvažovat speciální vzájemné polohy daných těles či ploch, průnikem tedy bude vždy trojrozměrný útvar. Nebudeme řešit ani úlohy, v nichž se protínají některé hrany dvou daných těles, ani příklady, kdy jsou tělesa (plochy) zadána ve speciální poloze vůči průmětnám. Všechny právě vyloučené případy jsou totiž často řešitelné i jednodušší metodou než dále prezentovaným postupem.

Průnikem hranolů a jehlanů v obecné poloze je mnohostěn. Místo mnohostěnu však v příkladech sestrojujeme pouze průnik povrchů těchto těles, tj. *průnikovou* (*průsečnou*) *čáru*, což je lomená čára, ve které se protínají stěny těles (tato průniková čára přitom může mít při některých typech průniků dvě části – viz níže). Postup hledání průniku hranolů a jehlanů, resp. hranolových a jehlanových ploch se tedy příliš neliší; u průniku těles sestrojujeme navíc (existují-li) průnik podstavy každého tělesa s druhým tělesem. Z tohoto důvodu budeme dále – kvůli snadnějšímu vyjadřování – mluvit pouze o průniku těles.

Vrcholy průnikové čáry leží na hranách daných těles. Jedná se o průsečíky hran každého z těles se stěnami tělesa druhého. Podstatou sestrojení průniku těles je tedy základní úloha: sestrojení průsečíku přímky s rovinou. Spojnice těchto průsečíků jsou úsečky (strany průnikové čáry), které leží na průsečnicích rovin obsahujících stěny těles.

V zadání příkladů nesmíme řešitelům odtajnit, které hrany těles (resp. jejich části) budou po sestrojení průniku vidět a které ne. Každé z těles tedy zadáváme – co se viditelnosti jeho hran týče – nezávisle na poloze druhého tělesa. Stejné pravidlo používáme u obrázků ilustrujících teorii.

[1] Budeme-li psát o průniku hranolů a jehlanů, myslíme tím průnik hranolu s hranolem, jehlanu s jehlanem nebo hranolu s jehlanem (obdobně pro průnik hranolových a jehlanových ploch).

Úplný a částečný průnik

Tzv. *úplný průnik* nastává, pokud všechny hrany jednoho z těles protínají stěny druhého tělesa. V tomto případě se průniková čára „rozpadá“ na dvě části – všechny hrany jednoho tělesa „někde do druhého tělesa vchází“ (jedna část) a „někde z něj vychází“ (druhá část).

V případě tzv. *částečného průniku* (neboli *záseku*) existují na každém z těles hrany, které druhé těleso protínají, a zároveň hrany, které druhé těleso neprotínají. Tentokrát má průniková čára jednu část. (Pokud bychom uvažovali i případ, v němž se protínají hrany daných těles, řadili bychom ho mezi částečné průniky. Průniková čára by poté procházela některými body dvakrát. Těchto tzv. *dvojných bodů* by bylo tolik, kolik by existovalo dvojic navzájem se protínajících hran.)

KONSTRUKCE PRŮNIKU MNOHOSTĚNŮ

Jak již bylo řečeno, podstatou sestrojení průniku dvou mnohostěnů je nalezení průsečíků hran každého z těles se stěnami tělesa druhého, což odpovídá sestrojení průsečíků přímek, na nichž leží hrany jednoho tělesa, s rovinami, v nichž leží stěny tělesa druhého.

Sestrojení průsečíku Q přímky a s rovinou α patří mezi základní konstrukce deskriptivní geometrie. Postup je následující: přímkou a proložíme vhodně zvolenou rovinu λ, sestrojíme průsečnici q rovin α, λ a nakonec sestrojíme průsečík Q průsečnice q s danou přímkou a. Při sestrojování průniků těles tedy můžeme tento postup opakovat pro každou hranu a poté nalezené průsečíky správně pospojovat. Je však zřejmé, že toto může vyžadovat značný počet čar, mnoho času a problémy se spojováním vrcholů průnikové čáry ve správném pořadí. Naší snahou je proto v tomto postupu udělat jednotný systém (prokládat přímkami vhodné roviny týchž vlastností) a rovněž zaznamenávat při řešení pořadí, v jakém budou nalezené průsečíky hran a stěn spojeny.

Prokládání rovin hranami těles

Nejprve bočními hranami obou těles proložíme vhodně zvolenou soustavu rovin. V případě průniku dvou jehlanů volíme roviny vrcholové pro obě dvě tělesa, v případě průniku dvou hranolů sestrojujeme roviny směrové pro obě tělesa a při průniku jehlanu a hranolu prokládáme roviny vrcholové pro jehlan a směrové pro hranol.

Pojďme si jednotlivé případy popsat podrobněji, přičemž budeme navíc rozlišovat, zda daná tělesa mají podstavy ve stejných rovinách, nebo ne (dostaneme tedy celkem šest případů).

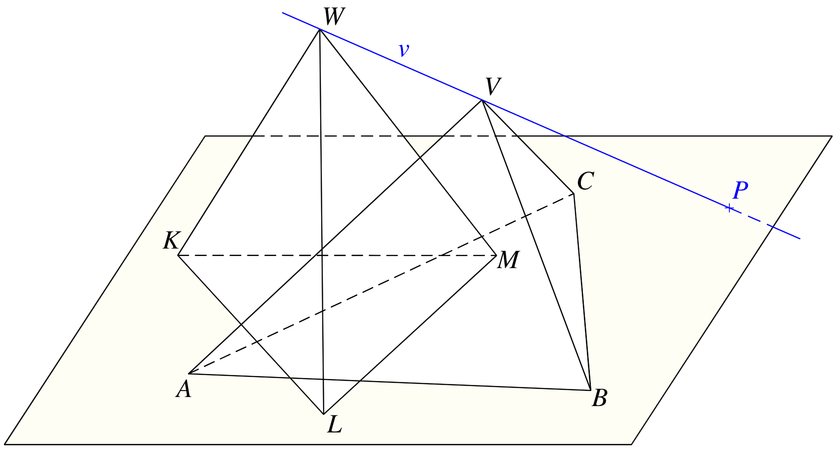
Pokud sestrojujeme **průnik dvou jehlanů s podstavami v téže rovině** (viz obr. na str. 5), chceme jednotlivými bočními hranami těles proložit roviny procházející oběma vrcholy. Roviny tedy musí procházet spojnicí v vrcholů V a W. Sestrojíme průsečík P přímky v s rovinou, v níž leží podstavy těles. Spojnice bodu P s vrcholy podstav jsou průsečnice hledaných rovin s rovinou podstav. Každá z rovin svazku je tedy určena přímkou v a jednou z těchto průsečnic.

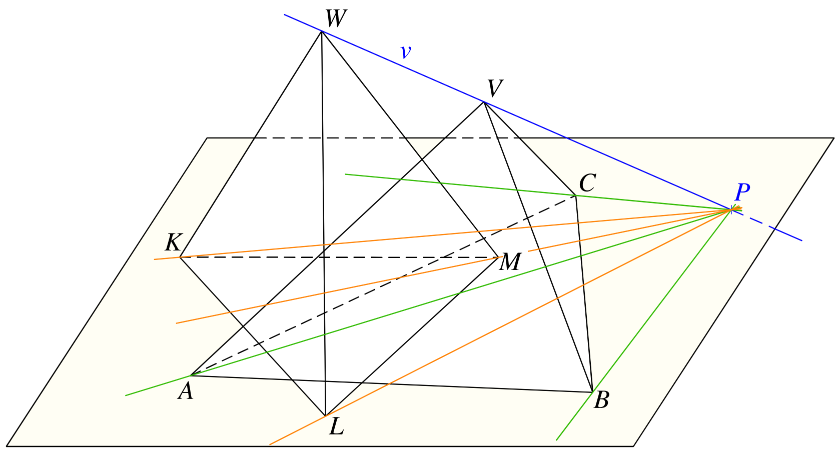
Některá ze spojnic bodu P s vrcholem jedné podstavy neprotíná druhou podstavu, tj. příslušná proložená rovina má s druhým tělesem prázdný průnik, a tedy hrana procházející uvažovaným vrcholem nemá s druhým tělesem žádný průsečík. Hrana leží v tzv. *liché části*, tj. v části tělesa, která se neúčastní průniku (jedná se o část tělesa „od této hrany po rovinu“, která patří svazku prokládaných rovin a která je tečnou rovinou druhého tělesa mající nejmenší vzdálenost od uvažované hrany).

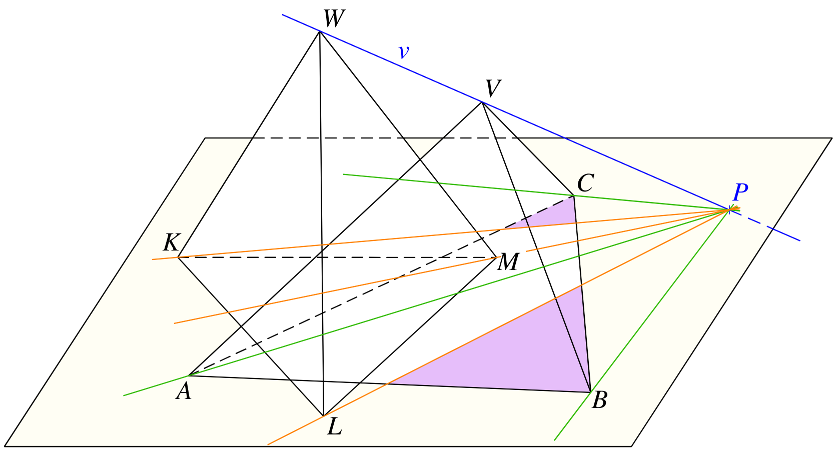
Na obr. na str. 5 neprotíná přímka PB podstavu KLM jehlanu $KLMW$, rovina VPB má s jehlanem $KLMW$ prázdný průnik. Lichá část je vymezena hranou BV jehlanu $ABCV$

a tečnou rovinou LPW jehlanu $KLMW$. Obdobně přímka PC neprotíná podstavu KLM jehlanu $KLMW$, rovina VPC má s jehlanem $KLMW$ prázdný průnik. Druhá lichá část je vymezena hranou CV jehlanu $ABCV$ a tečnou rovinou KPW jehlanu $KLMW$.

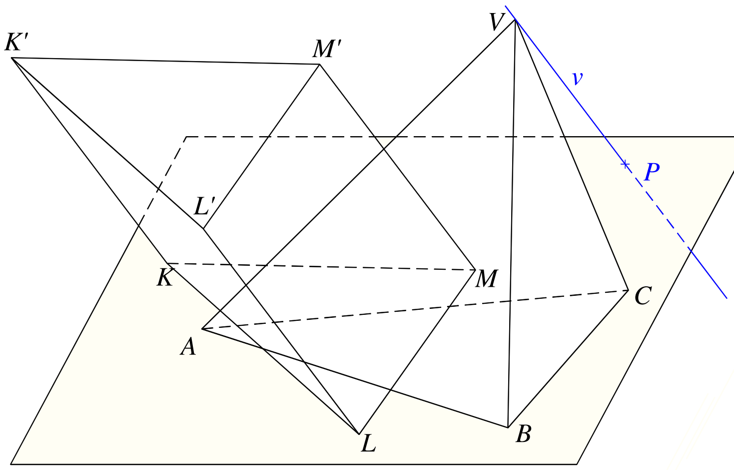
Části podstav(y) těles(a), které náležejí lichým částím, znázorňujeme šrafováním, případně vybarvením (viz poslední obr. na str. 5). Podle lichých částí snadno usoudíme na typ průniku. Pokud jsou liché části na témže tělese, jedná se o úplný průnik (průniková čára má dvě části). Pokud jsou na na obou tělesech, jedná se o průnik částečný (průniková čára má jednu část). V našem konkrétním příkladě na obr. na str. 5 patří obě liché části jehlanu $ABCV$, proto se jedná o průnik úplný.

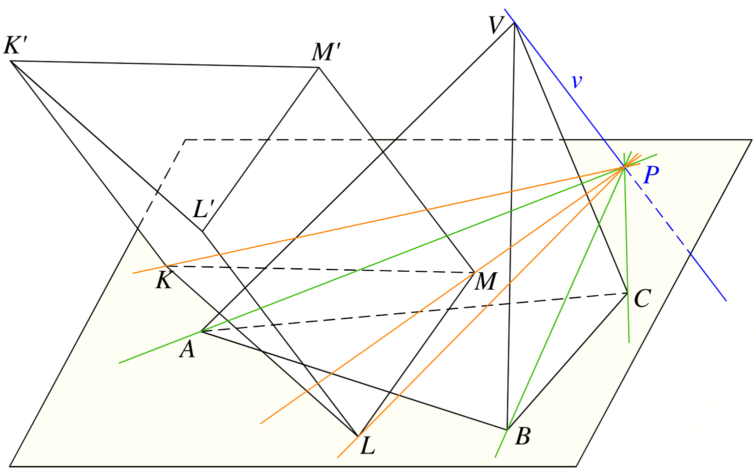


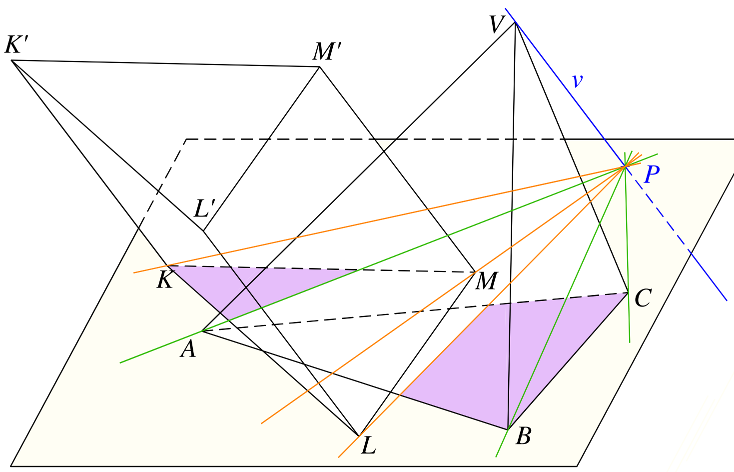




V případě **průniku jehlanu a hranolu s podstavami v téže rovině** (obr. na str. 6) prokládáme jednotlivými bočními hranami těles roviny, které procházejí vrcholem jehlanu a jsou rovnoběžné se směrem bočních hran hranolu.







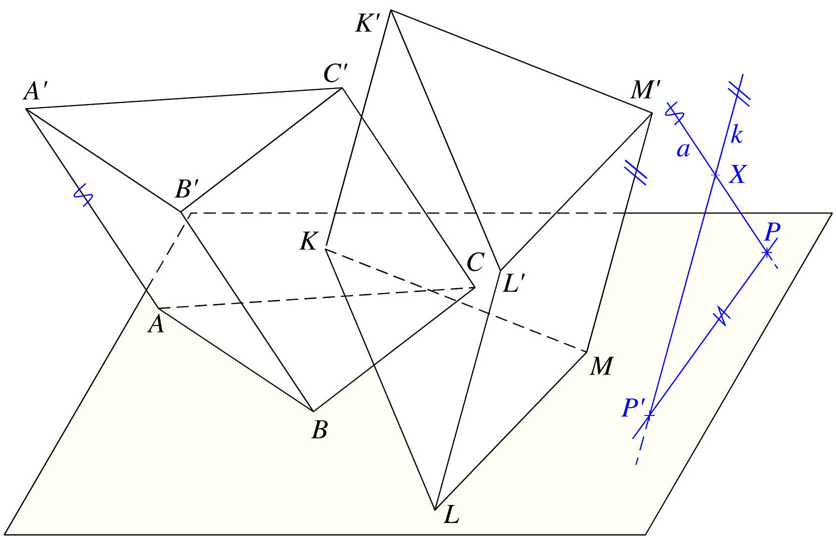
Roviny tedy musí procházet přímkou v, která prochází vrcholem V jehlanu a je rovnoběžná např. s přímkou MM' (jedná se o spojnici v vrcholu V jehlanu a „vrcholu“ hranolu, který je v nekonečnu). Spojnice průsečíku P přímky v s rovinou, v níž leží podstavy těles, s vrcholy podstav jsou průsečnice hledaných rovin s rovinou podstav. Každá z rovin svazku je určena přímkou v a jednou z průsečnic.

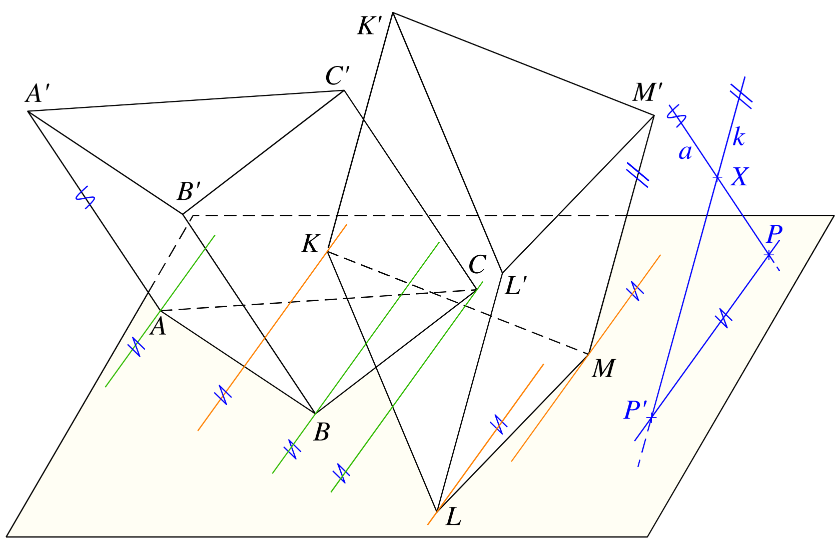
Opět určíme liché části. Pro konkrétní příklad na obr. na str. 6 leží v jedné liché části hrany BV, CV jehlanu a v druhé liché části hrana KK' hranolu. Liché části jsou součástí dvou těles, jedná se tedy o částečný průnik.

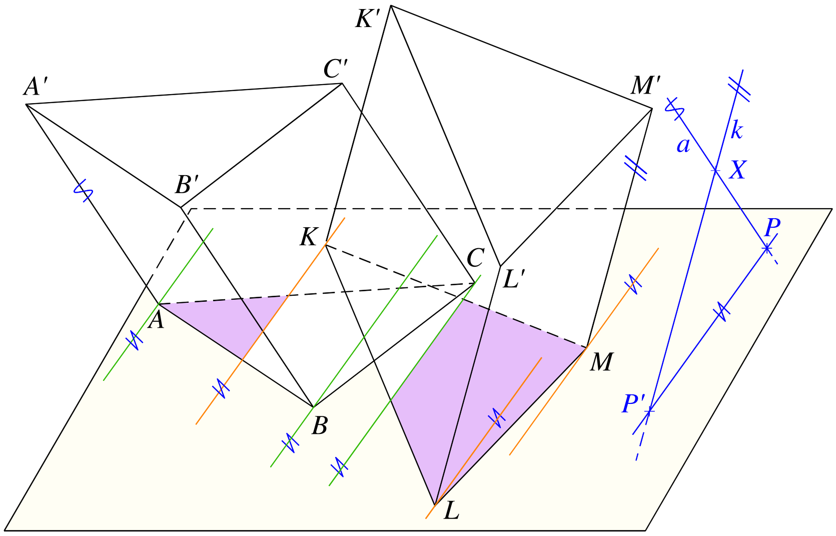
Sestrojujeme-li **průnik dvou hranolů s podstavami v téže rovině** (obr. na str. 7 a 8), prokládáme jednotlivými bočními hranami těles roviny směrové pro oba hranoly (tj. roviny rovnoběžné s bočními hranami obou hranolů).

Nejprve určíme nějakou rovinu této vlastnosti. V prostoru zvolíme libovolný bod X (v příkladech se volí bod X nejčastěji na hraně jednoho z těles) a vedeme jím dvě přímky tak, aby jedna byla rovnoběžná s bočními hranami jednoho tělesa a druhá s bočními hranami druhého tělesa. Těmito různoběžkami určená rovina je směrová pro oba hranoly. Spojnice průsečíků obou přímek s rovinou podstav určuje směr průsečnic prokládaných rovin s rovinou podstav, tj. směr přímek, které vedeme všemi vrcholy podstav.

V našem příkladě vedeme zvoleným bodem X rovnoběžku a, resp. k s hranou AA', resp. MM'. Sestrojíme průsečíky P, P' přímek a, k s rovinou podstav hranolů a vrcholy podstav vedeme rovnoběžky s přímkou PP'. Rovinu proloženou např. hranou BB' určuje jednak tato hrana a dále rovnoběžka s přímkou PP' jdoucí vrcholem B.

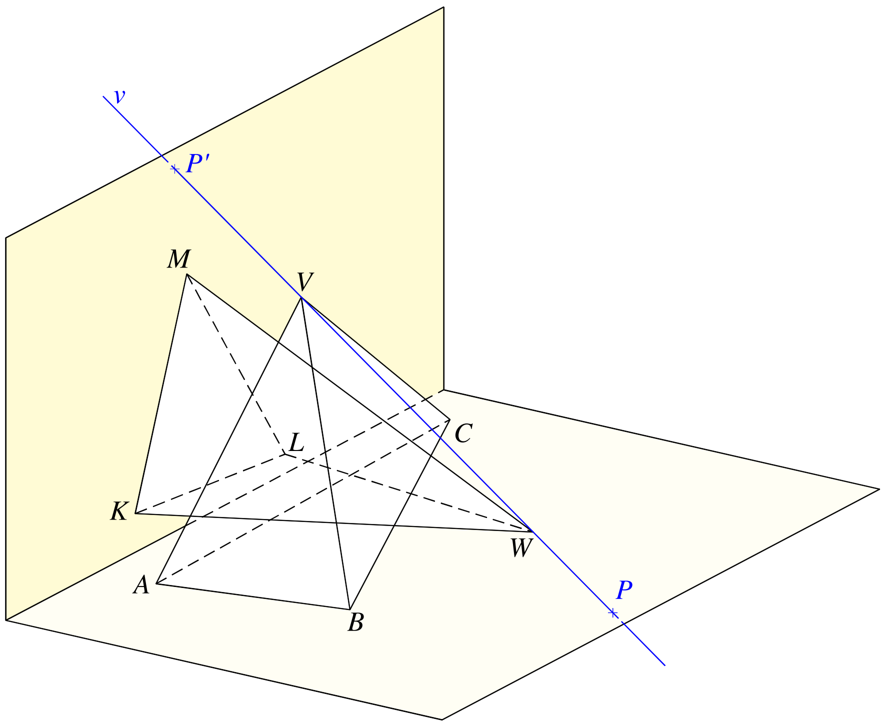


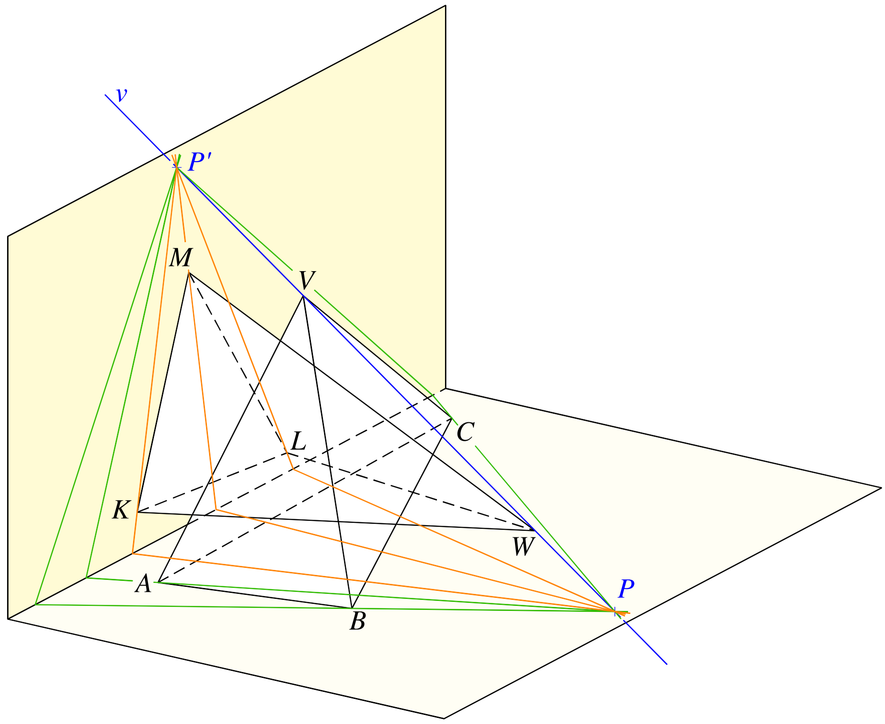


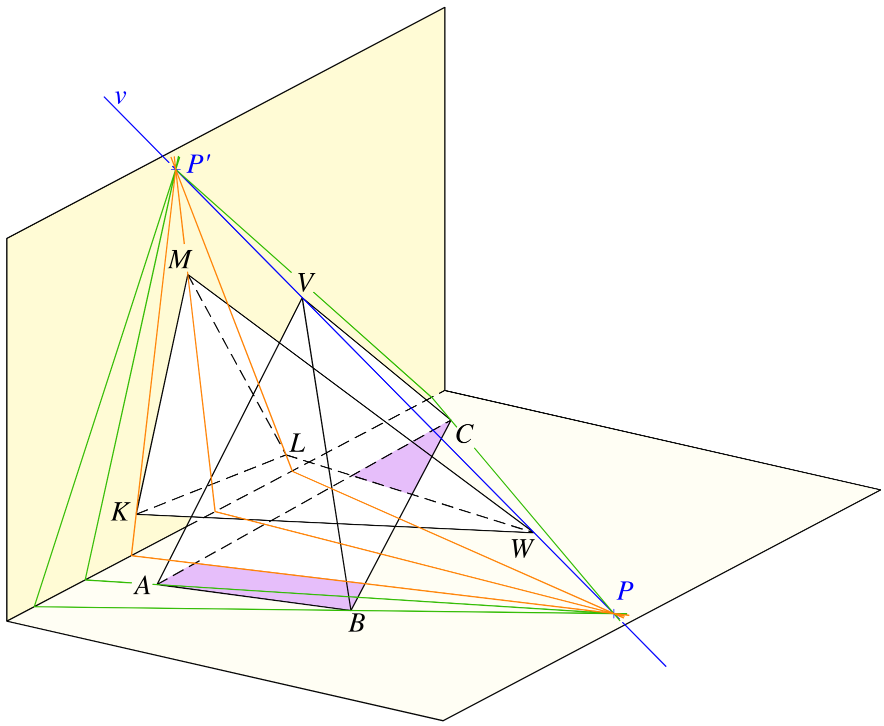


Liché části těles zobrazených na obr. na str. 8 (nahoře) patří oběma tělesům (v jedné liché části jsou hrany LL' a MM' hranolu $KLMK'L'M'$, v druhé liché části je hrana AA' hranolu $ABCA'B'C'$). Průnik je tudíž částečný.

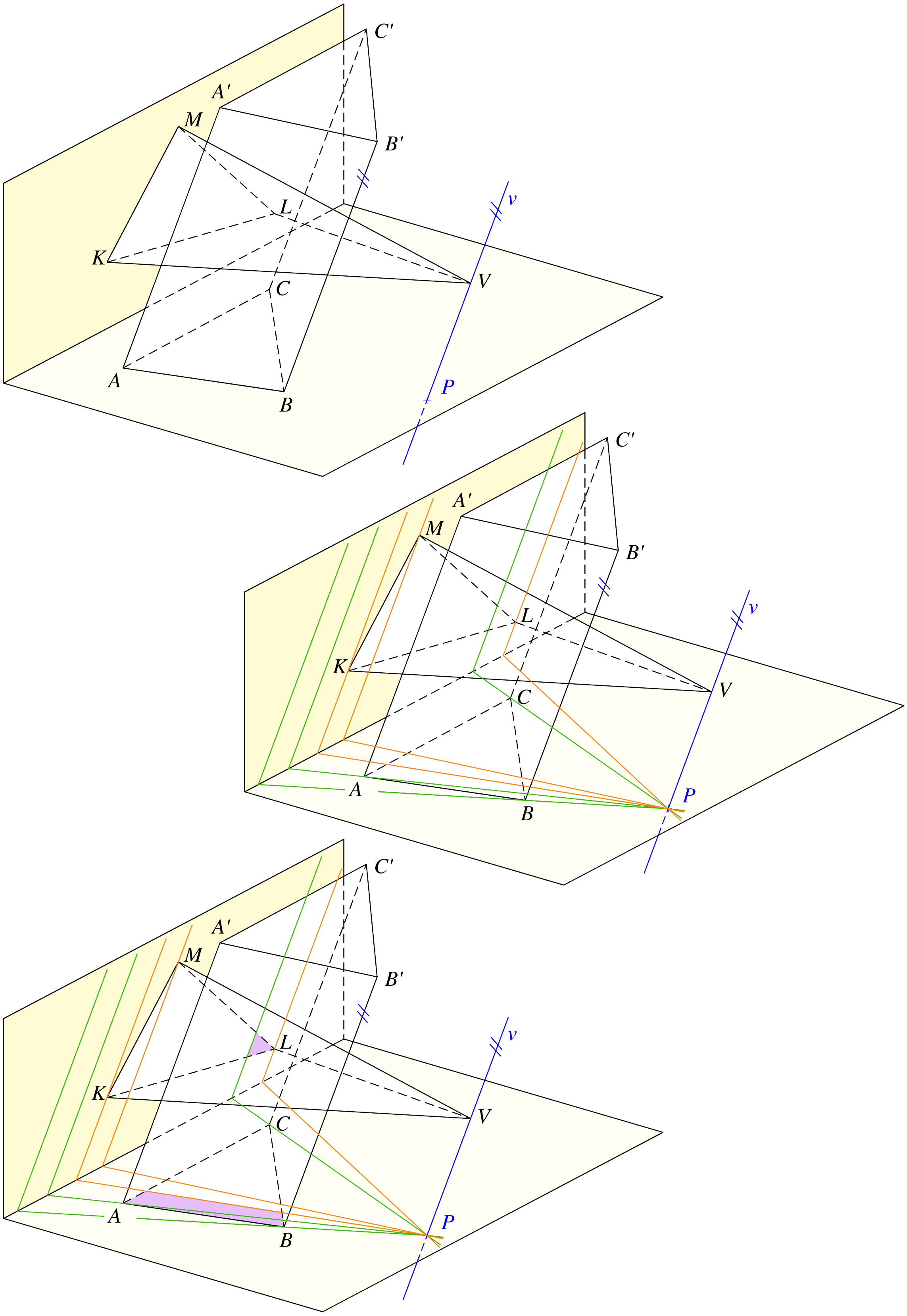
Sestrojujeme-li **průnik dvou jehlanů s podstavami v různých rovinách** (obr. na str. 8 a 9), prokládáme roviny procházející spojnicí v vrcholů jehlanů. Tentokrát určíme průsečíky P, P' přímky v s oběma rovinami podstav a rovněž průsečnici těchto rovin. Poté spojíme průsečík P s vrcholy podstavy, která leží ve stejné rovině jako bod P. Průsečíky těchto spojnic s průsečnicí rovin podstav dále spojíme s bodem P'. Zcela analogicky postupujeme s průsečíkem P' a s vrcholy druhé podstavy. Každá z prokládaných rovin je určená přímkou v a spojnicí průsečíku P, resp. P' s vrcholem příslušné podstavy.



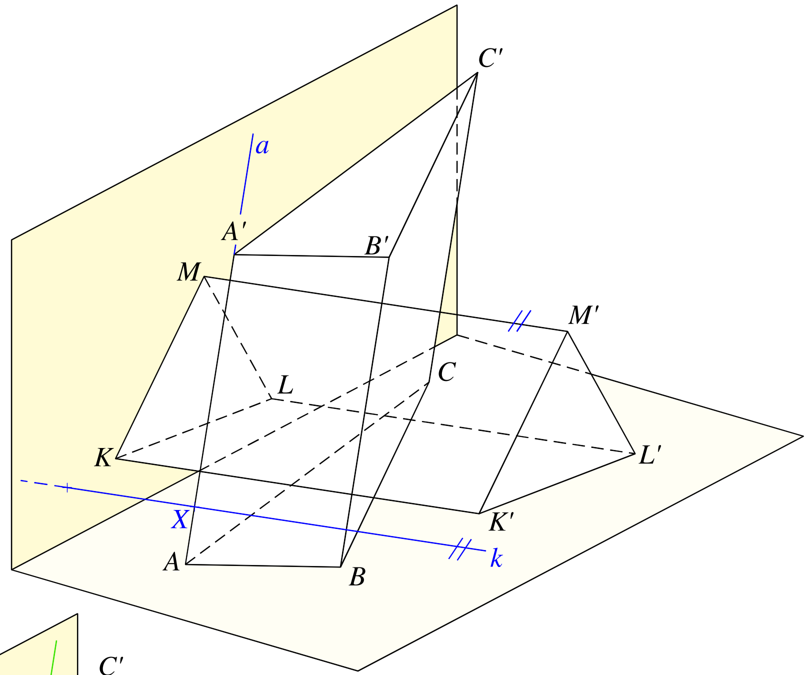




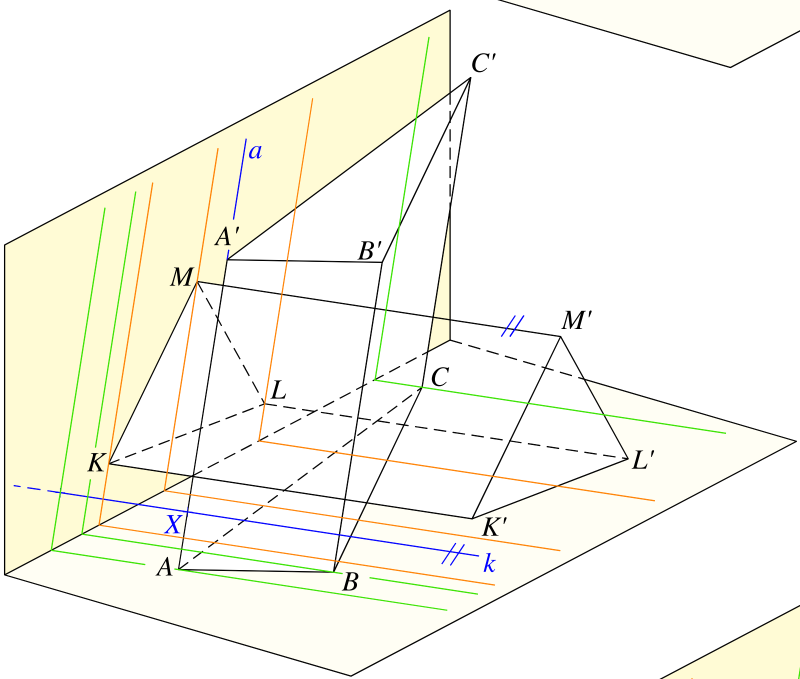
Při hledání **průniku jehlanu a hranolu s podstavami v různých rovinách** (obr. na str. 10) prochází společná přímka v všech prokládaných rovin vrcholem jehlanu a je rovnoběžná s bočními hranami hranolu (tj. v je spojnicí vrcholu jehlanu a „vrcholu“ hranolu, který je v nekonečnu). Dále bychom postupovali naprosto stejně jako v předcházejícím případě. Obr. na str. 10 znázorňují speciální polohu, v níž jsou boční hrany hranolu rovnoběžné s rovinou podstavy jehlanu. Průsečík P' přímky v s rovinou podstavy jehlanu je v nekonečnu, a proto jsou průsečnice prokládaných rovin s rovinou podstavy jehlanu navzájem rovnoběžné přímky.



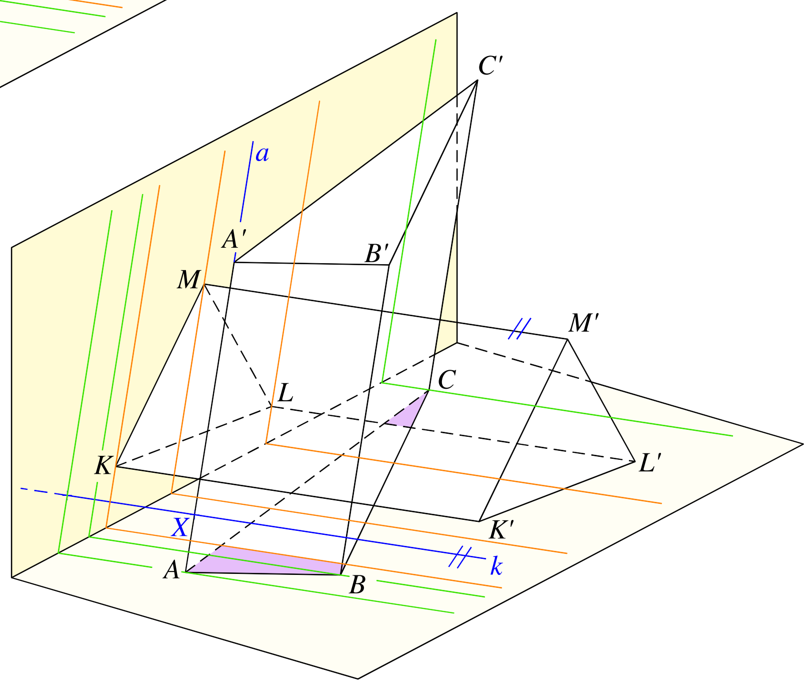
Sestrojujeme-li **průnik dvou hranolů s podstavami v různých rovinách** (obr. na str. 11), vedeme zvoleným bodem X (volíme ho nejčastěji na boční hraně jednoho z hranolů) rovnoběžky a, k s bočními hranami každého z těles. Rovinu určenou různoběžkami a, k označíme λ. Dále sestrojíme průsečnice roviny λ s rovinami podstav mnohostěnů. Jednotlivými vrcholy podstav těles (a tedy i hranami těles) vedeme roviny rovnoběžné s rovinou λ.



C′
a
A′
B′
M
M′
L
C
K
L′
K′
X
k
A
B



C′
a
A′
B′
M
M′
L
C
K
L′
K′
X
k
A
B

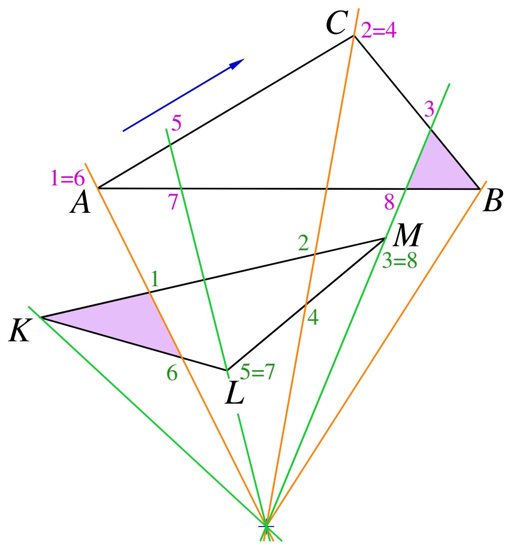


C′
a
A′
B′
M
M′
L
C
K
L′
K′
X
k
A
B

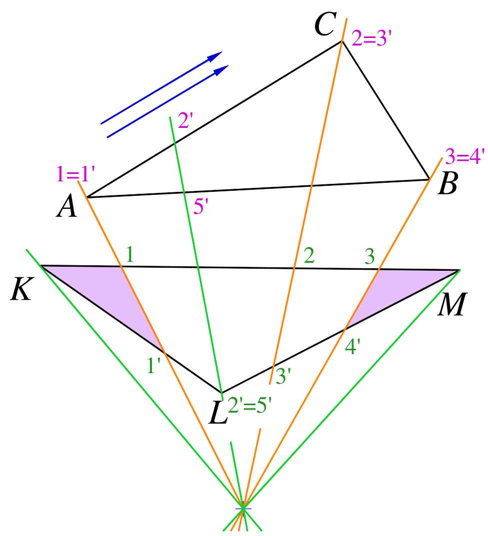
Číslování podstav

Nyní je nutné určit, v jakém pořadí budeme dosud nesestrojené průsečíky hran každého z těles s tělesem druhým spojovat. Toto provedeme pomocí tzv. *číslování podstav*. Není totiž nutné určovat pořadí hran, ale stačí uvažovat pořadí vrcholů podstav, kterými hrany procházejí. Zajímají nás přitom pouze vrcholy neležící v lichých částech.

Popišme nejprve postup při číslování postav v případě částečného průniku těles (obr. na str. 12 vlevo). Některý z vrcholů neležících v liché části zvolíme za výchozí, označíme ho číslem 1. Na obrázku je tímto výchozím bodem zvolen vrchol A. Totéž číslo 1 si současně napíšeme na straně druhé podstavy tak, aby obě čísla 1 ležela v téže proložené rovině (volíme jednu ze dvou možností, kde číslo 1 napsat). Dále zvolíme, v jakém směru budeme od vrcholu A dále postupovat. Na obrázku je zvolen směr k vrcholu C. Tím je číslování podstav jednoznačně určeno. Postupujeme současně po obvodu obou podstav od čísel 1 tak, abychom se dostali do téže proložené roviny ve stejný okamžik. Pokud dospějeme do vrcholu (na jakékoliv podstavě), označíme ho číslem 2. Číslo 2 napíšeme rovněž na stranu druhé podstavy tak, aby obě čísla 2 byla ve stejné proložené rovině. Takto postupujeme dále, přičemž pokud dospějeme na jedné z podstav k liché části, změníme na této podstavě směr postupu (do liché části nesmíme „vstoupit“). Na druhé z podstav však postupujeme dále, tj. směr nezměníme. Pokračujeme tak dlouho, dokud není každá strana (či její část ležící mimo lichou část) projeta dvakrát (při posledním kroku přitom k výchozímu vrcholu již číslo nepíšeme). Pokud jsme číslovali správně, musí být v každém vrcholu podstavy, který neleží v liché části, právě dvě čísla. A tato čísla leží ve stejné proložené rovině na stranách druhé podstavy.



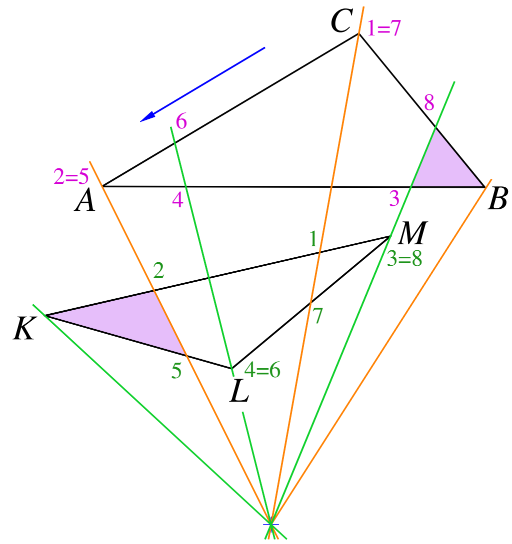
částečný průnik



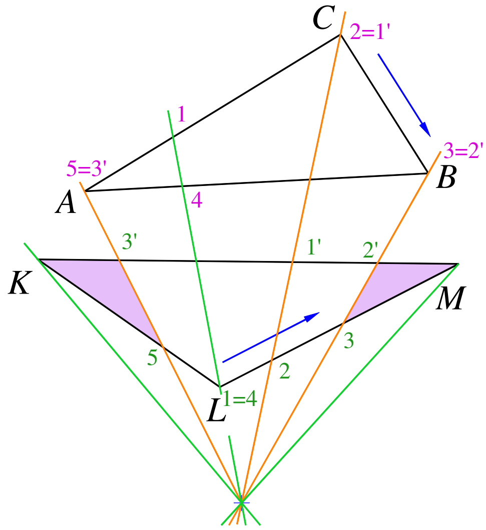
úplný průnik

V případě úplného průniku těles (obr. na str. 12 vpravo) číslujeme postavy na stejném principu. Tentokrát však liché části rozdělí náš pohyb po obvodu podstavy s lichými částmi na dva samostatné úseky (průniková čára bude složena ze dvou částí). Tyto dva úseky je nutné číslovat zvlášť, tj. po projetí prvního úseku s čísly 1, 2, …, n začít číslovat znovu pomocí čísel $1'$, $2'$, …, m (vrchol $1'$ můžeme, ale nemusíme volit ve vrcholu 1; rovněž směr obíhání na každém úseků může, ale nemusí být stejný). I v případě úplného průniku platí, že každý vrchol podstavy neležící v liché části má právě dvě čísla, přičemž stejná dvojice čísel leží ve stejné proložené rovině i na stranách druhé podstavy.

Další z přípustných číslování týchž podstav je uvedeno na následujícím obrázku:



částečný průnik



úplný průnik

Sestrojení průnikové čáry

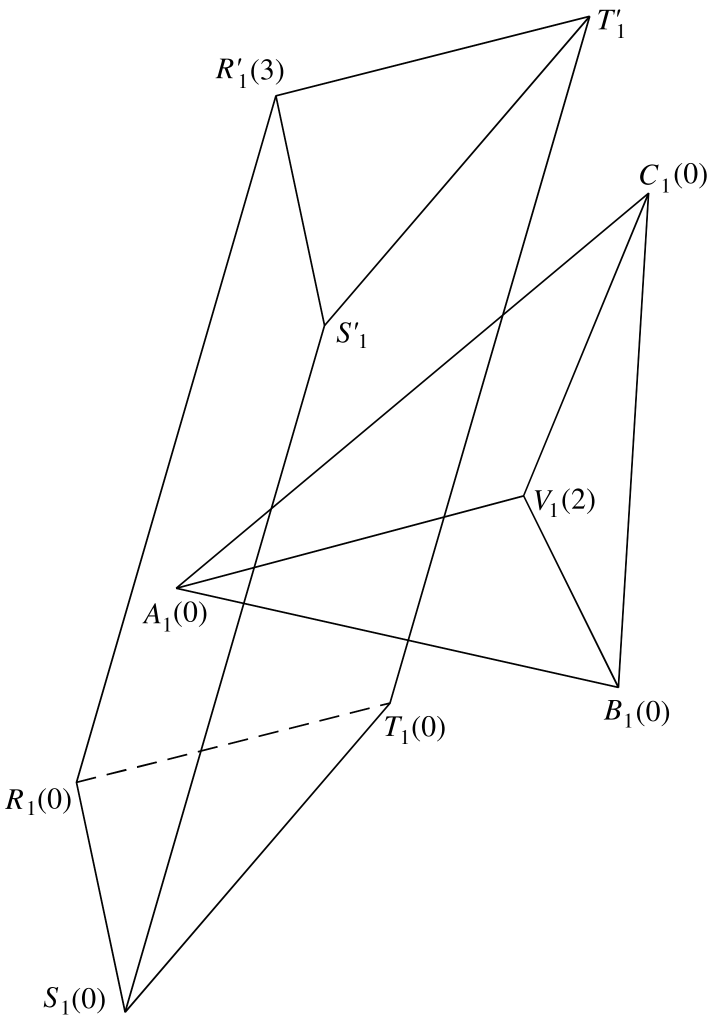
Nalezneme postupně průsečíky hran jednoho tělesa s povrchem tělesa druhého, tj. konstruujeme průsečíky přímek s rovinami. Tyto průsečíky jsou vrcholy hledané průnikové čáry. Boční hranou (neležící v liché části) mnohostěnu, která prochází vrcholem $k = l$, jsme již proložili rovinu. Nyní sestrojíme řez druhého tělesa touto rovinou. Bude se jednat o obdélník (hranol), resp. trojúhelník (jehlan), jehož dva vrcholy jsou také k, l (tentokrát však neleží ve vrcholech podstav, ale jsou vnitřními body podstavných hran hranolu, resp. jehlanu). Průsečík odpovídající číslům 1 a 1 označíme I. Obdobně sestrojíme průsečíky II, III atd.

Sestrojíme průnikovou čáru spojením jejích vrcholů v tom pořadí, v jakém jsou očíslovány (v případě úplného průniku musíme nalézt obě části průnikové čáry).

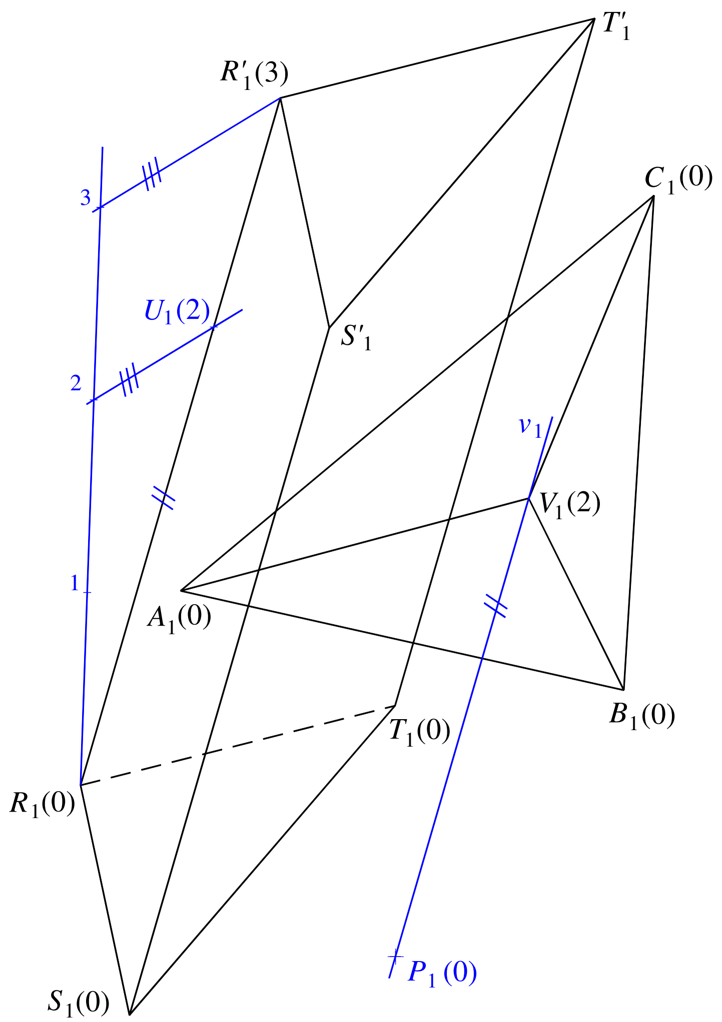
Nakonec rozhodneme o viditelnosti jednotlivých stran průnikové čáry v daném průmětu. Leží-li strana průnikové čáry ve stěnách těles, které jsou v uvažovaném průmětu obě viditelné, je v tomto průmětu viditelná i strana průnikové čáry. V opačném případě je strana neviditelná.

Nyní přistupme k řešení konkrétních příkladů.

Příklad 1: V kótovaném promítání sestrojte průnik těles.

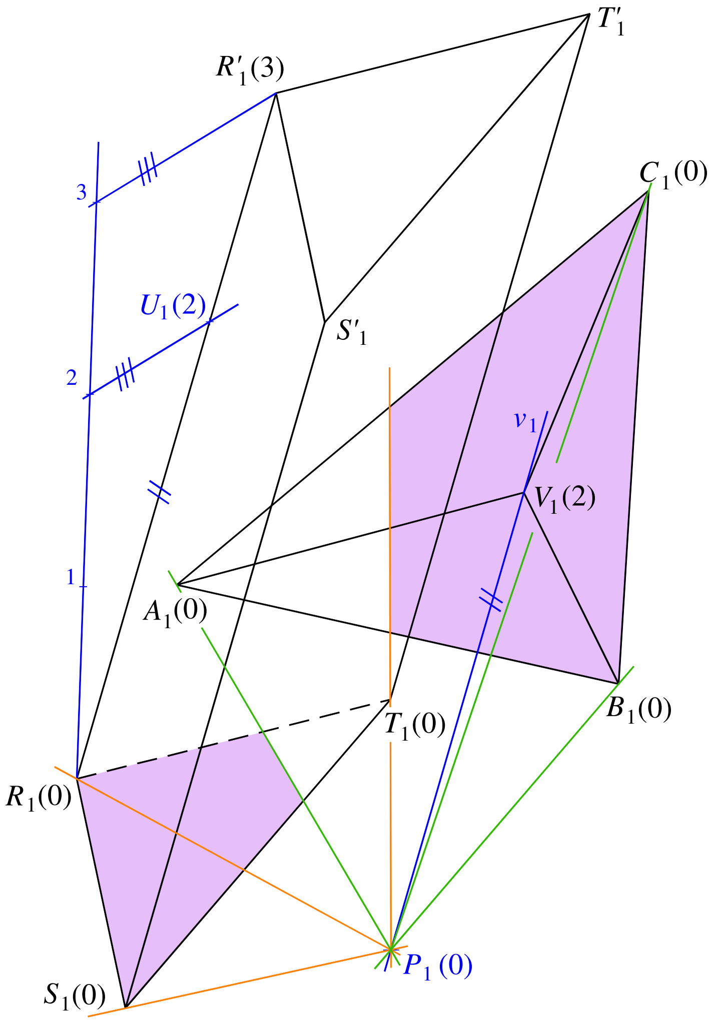


Řešení:

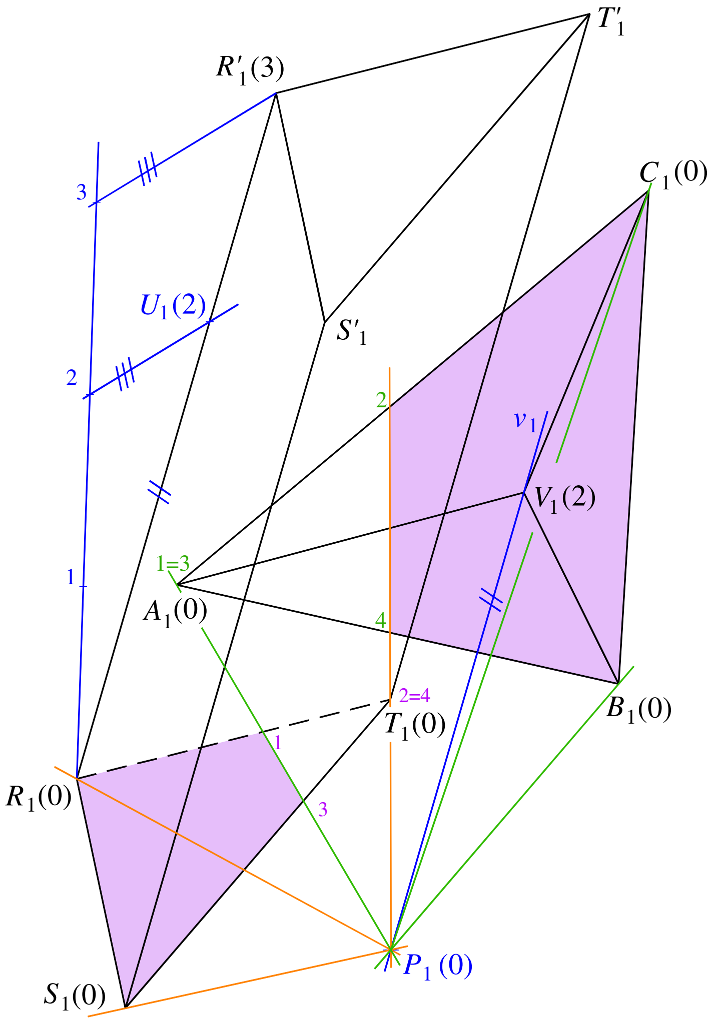


Jedná se o průnik jehlanu a hranolu s podstavami v téže rovině. Vrcholem V jehlanu proto vedeme přímku v rovnoběžnou s bočními hranami hranolu. Její pravoúhlý průmět v_1 směru s pravoúhlých průmětů bočních hran hranolu prochází kótovaným průmětem $V_1(2)$ vrcholu V.

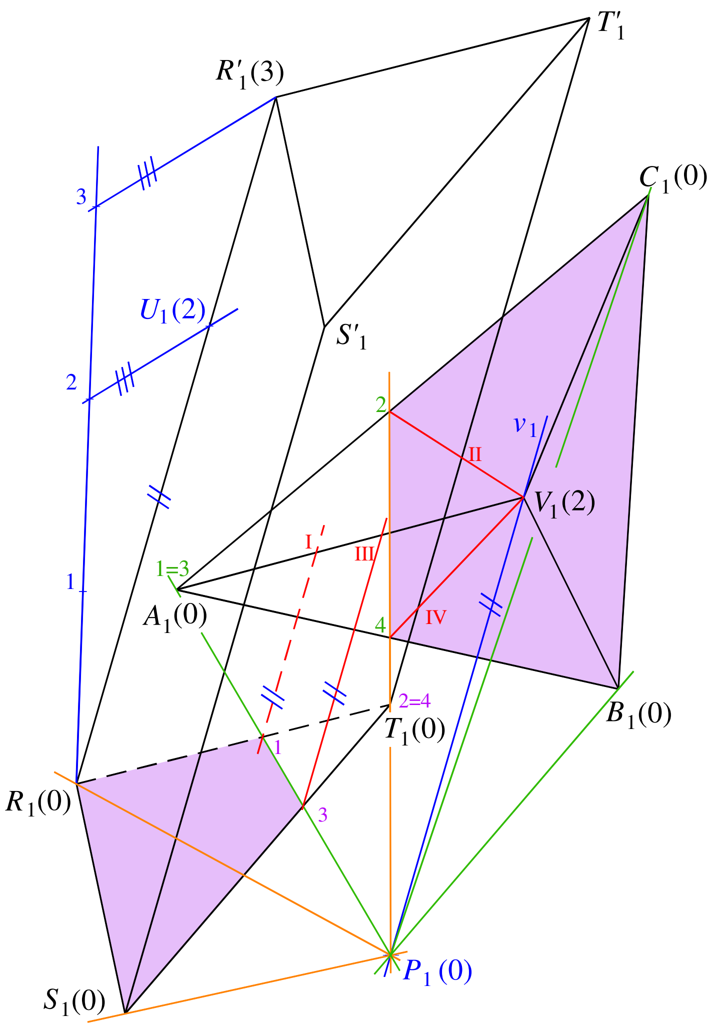
Zobrazíme průsečík přímky v s rovinou podstav. Jelikož podstavy leží přímo v průmětně π, hledáme kótovaný průmět $P_1(0)$ stopníku přímky v. Na pravoúhlý průmět v_1 přímky v naneseme od bodu $V_1(2)$ příslušným směrem dvojnásobek intervalu přímek směru s, přičemž interval zjistíme například pomocí hrany RR' (interval je roven vzdálenosti průmětů $U_1(2)$, $R'_1(3)$ bodů U, R').



Nyní bod $P_1(0)$ spojíme s vrcholy podstav ležících v průmětně. Je však zřejmé, že by postačilo sestrojit přímky $P_1(0)A_1(0)$ a $P_1(0)T_1(0)$. Vrcholy R, S, C, B totiž leží v lichých částech, které zvýrazníme na podstavách. Jelikož liché části patří oběma tělesům, jedná se o částečný průnik neboli zásek.



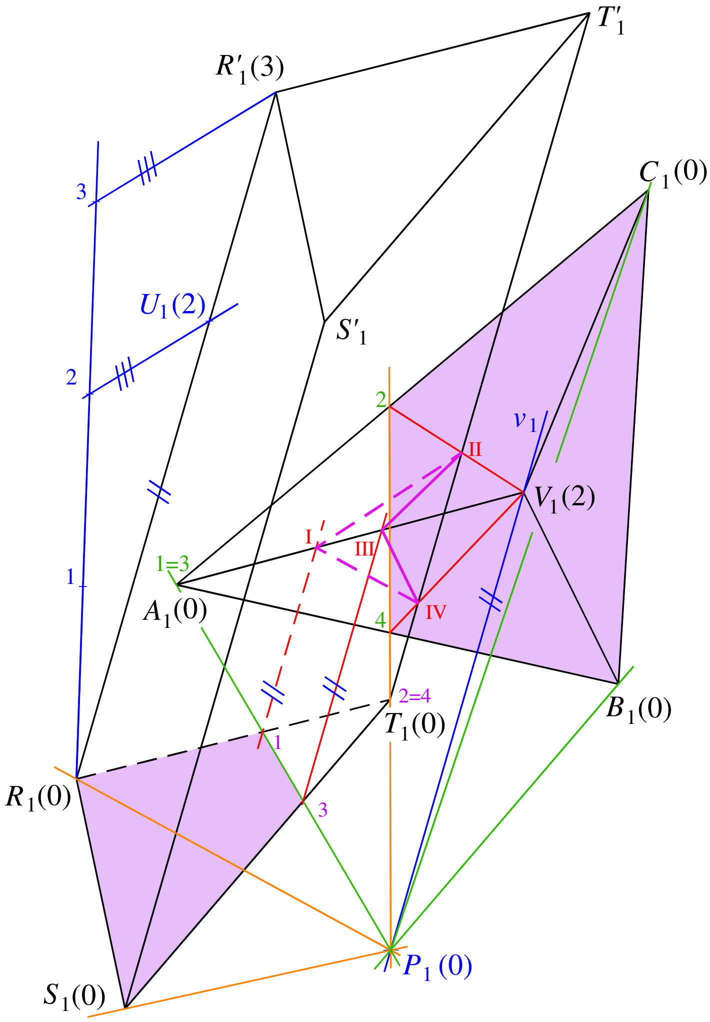
Podstavy očíslujeme. Za výchozí vrchol 1 zvolíme např. bod A, číslem 1 označíme rovněž průsečík přímek $P_1(0)A_1(0)$ a $R_1(0)T_1(0)$ (případně přímek $P_1(0)A_1(0)$ a $S_1(0)T_1(0)$). Zvolíme směr postupu od vrcholu A – např. k vrcholu C. Po očíslování zkontrolujeme, zda je vrchol A, resp. T neležící v liché části označen dvěma čísly a zda jsou na stranách druhé z podstav tatáž čísla na spojnicích $P_1(0)A_1(0)$, resp. $P_1(0)T_1(0)$.



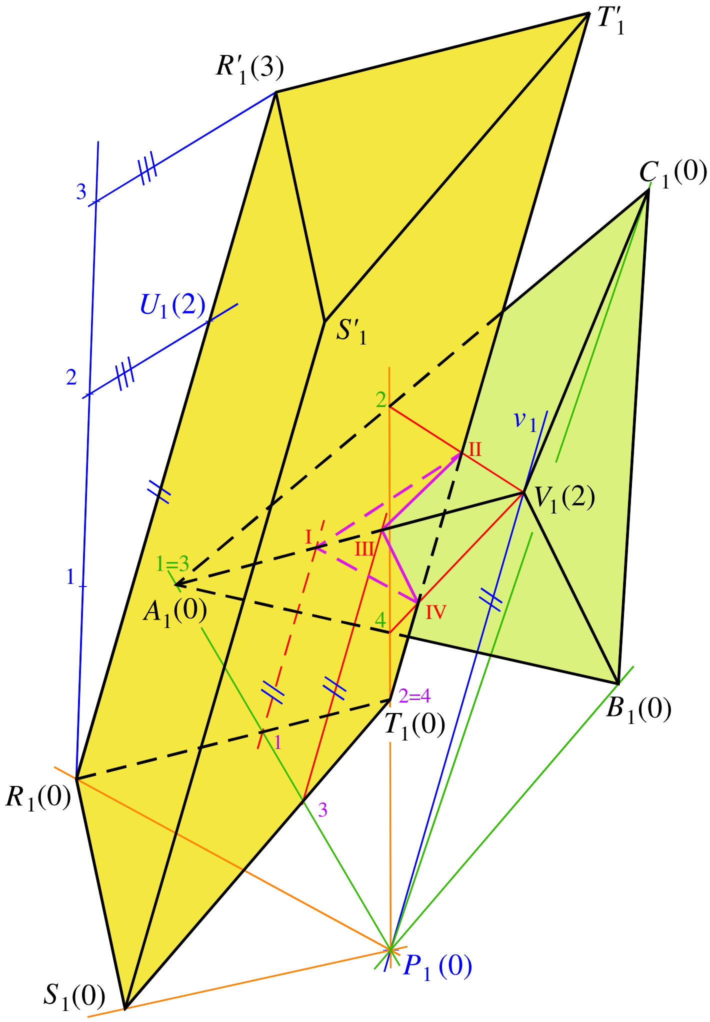
Sestrojíme pravoúhlé průměty řezů těles proloženými rovinami (není však nutné zobrazovat celé řezy). V případě jehlanu spojíme bod 2 a také bod 4 na jeho podstavě s kótovaným průmětem $V_1(0)$ jeho vrcholu. V případě hranolu vedeme body 1 a 3 na jeho podstavě přímky směru s průmětů jeho bočních hran.

Bod I je průsečíkem hrany jdoucí vrcholem 1 podstavy jehlanu a úsečky směru s, jejíž krajní bod 1 leží na podstavné hraně RT hranolu (zmíněná úsečka je průmětem řezu stěny $RTT'R'$ hranolu rovinou, která je proložena hranou AV jehlanu).

Obdobně sestrojíme body II, III a IV.

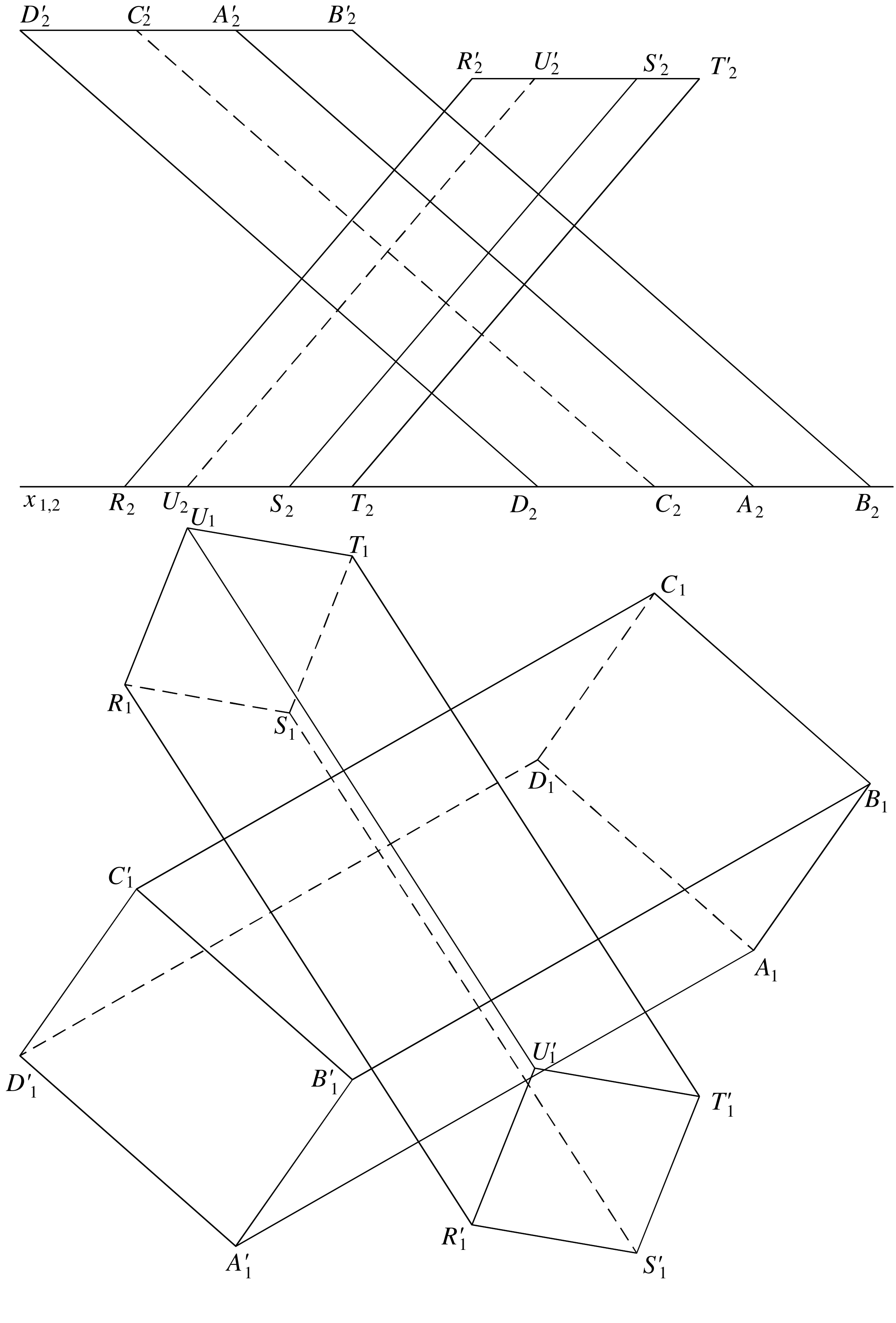


Sestrojené body I, II, III, IV spojíme uzavřenou lomenou čarou. Všechny stěny jehlanu, v nichž leží strany průnikové čáry, jsou při pravoúhlém promítání do průmětny π viditelné. O viditelnosti stran průnikové čáry proto rozhodne pouze viditelnost stěn hranolu. Stěna $STT'S'$ viditelná je, zatímto stěna $RTT'R'$ viditelná není. Tudíž spojnice bodů II a III a spojnice bodů III a IV viditelné jsou (leží ve stěně $STT'S'$), zatímco spojnice bodů I a II a spojnice bodů I a IV viditelné nejsou (leží ve stěně $RTT'R'$).

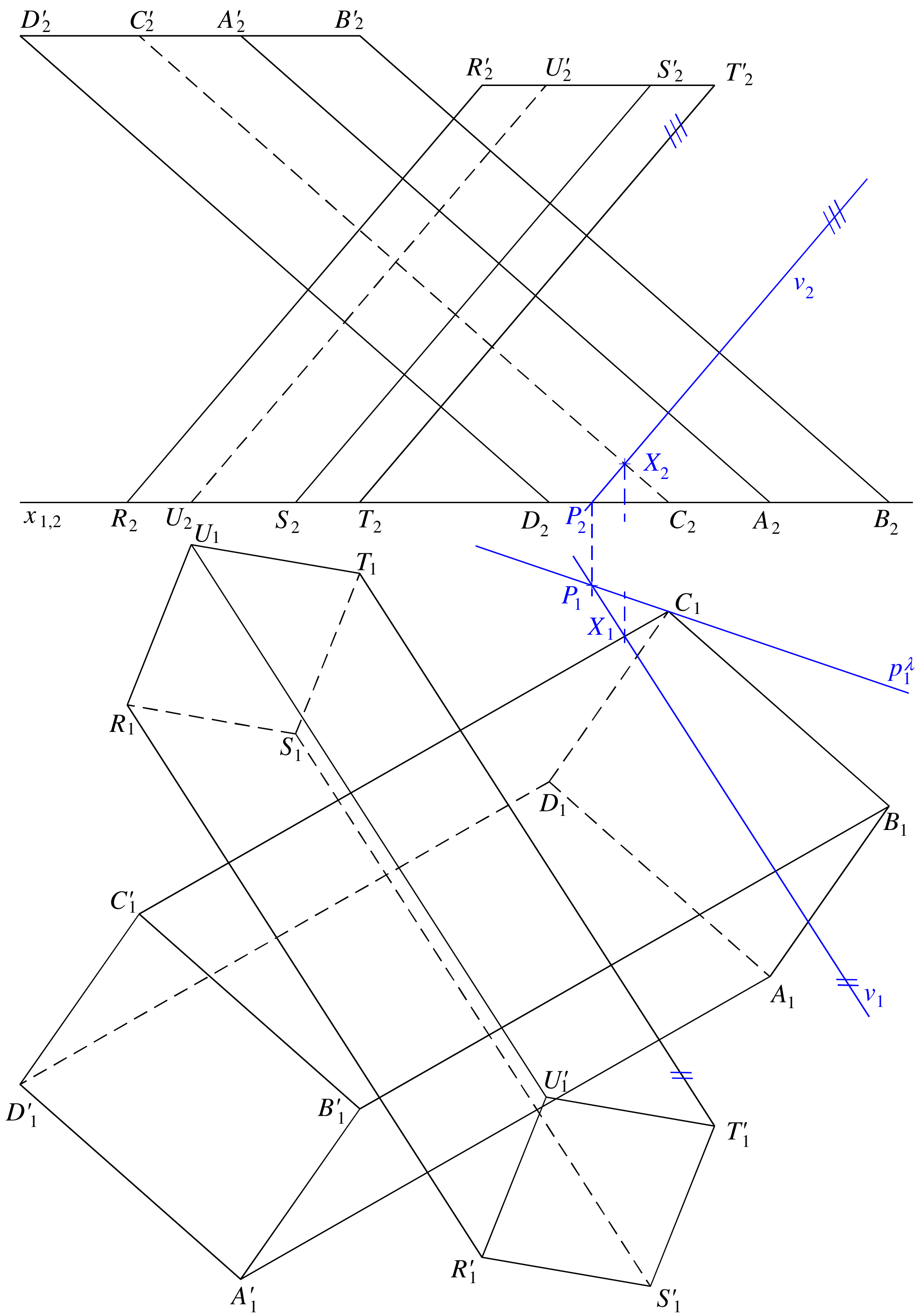


Nakonec rozhodneme o viditelnosti částí hran mnohostěnů a případně průměty těles vybarvíme.

Příklad 2: V Mongeově promítání sestrojte průnik těles.

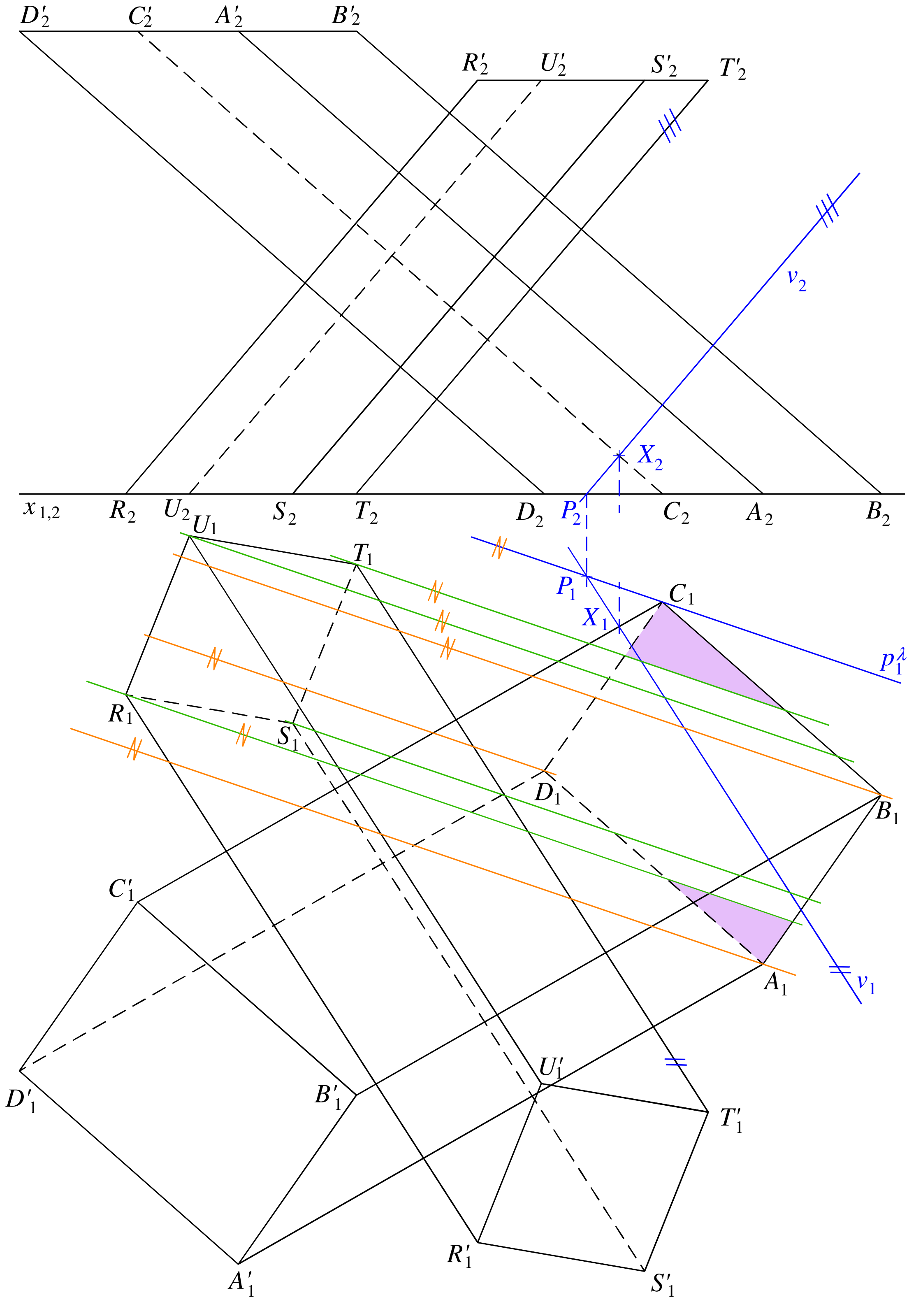


Řešení:



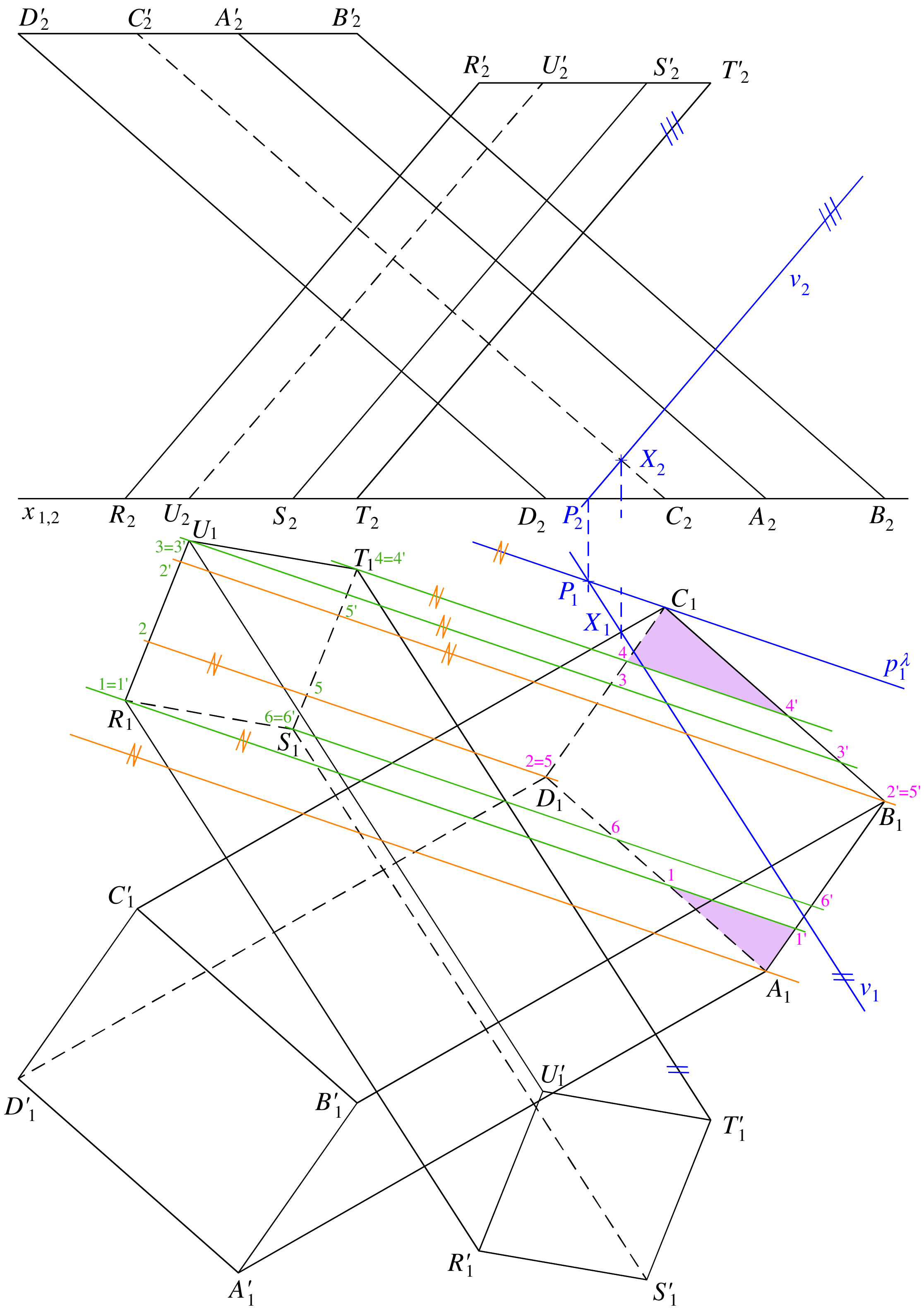
Sestrojujeme průnik dvojice hranolů, které mají podstavy $ABCD$ a $RSTU$ v jedné rovině (konkrétně v půdorysně).

Například na hraně CC' zvolíme bod X, kterým vedeme přímku v rovnoběžnou s bočními hranami druhého tělesa. Rovinu určenou přímkami v a CC' označíme λ a zobrazíme půdorys p_1^λ její půdorysné stopy (půdorysným stopníkem přímky CC' je bod C).

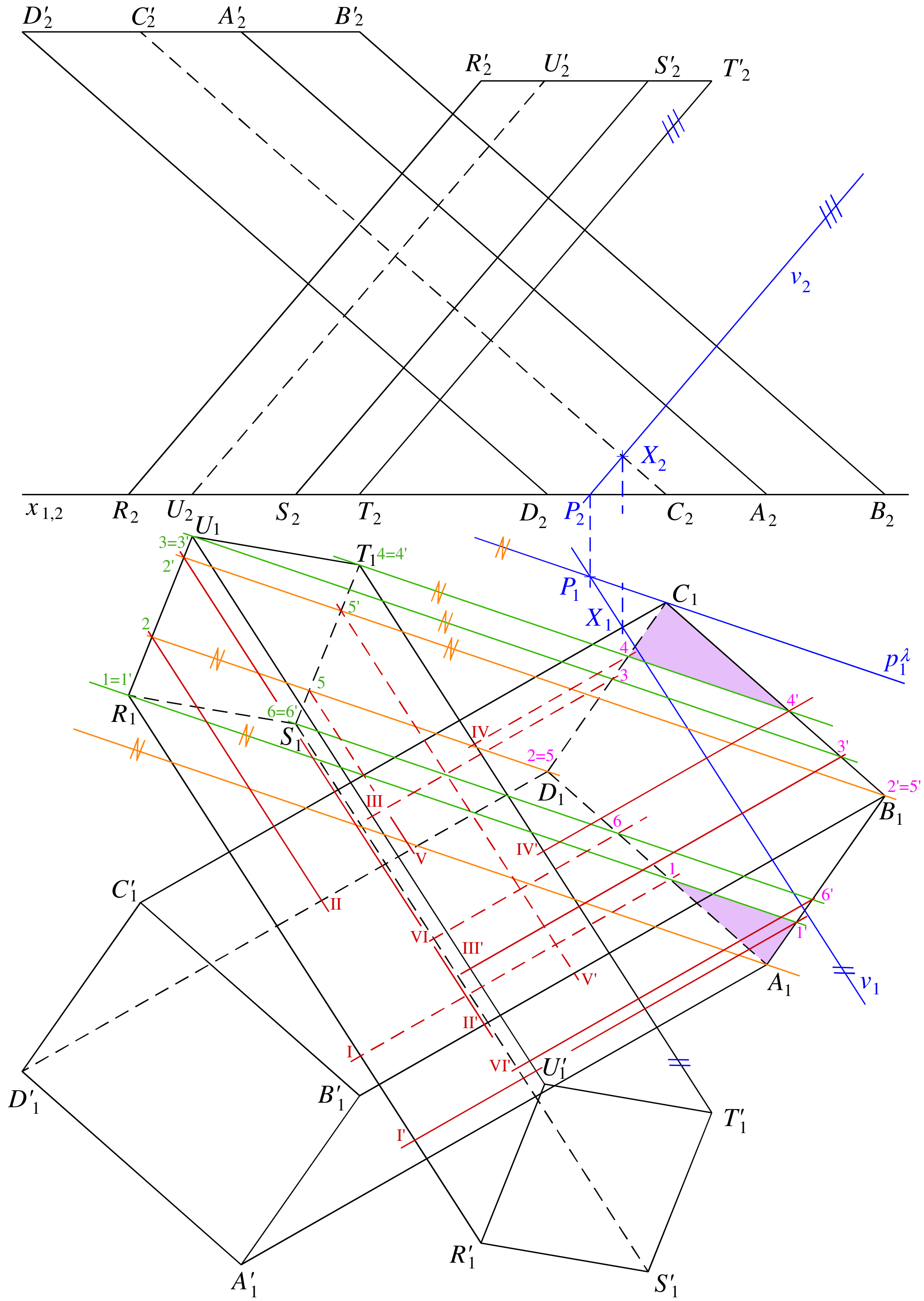


Bočními hranami obou těles proložíme roviny, které jsou rovnoběžné s rovinou λ (tj. jsou směrové pro oba mnohostěny). Stačí přitom sestrojit pouze půdorysy jejich půdorysných stop, které procházejí půdorysy vrcholů podstav $ABCD$ a $RSTU$ a jsou rovnoběžné s přímkou p_1^λ.

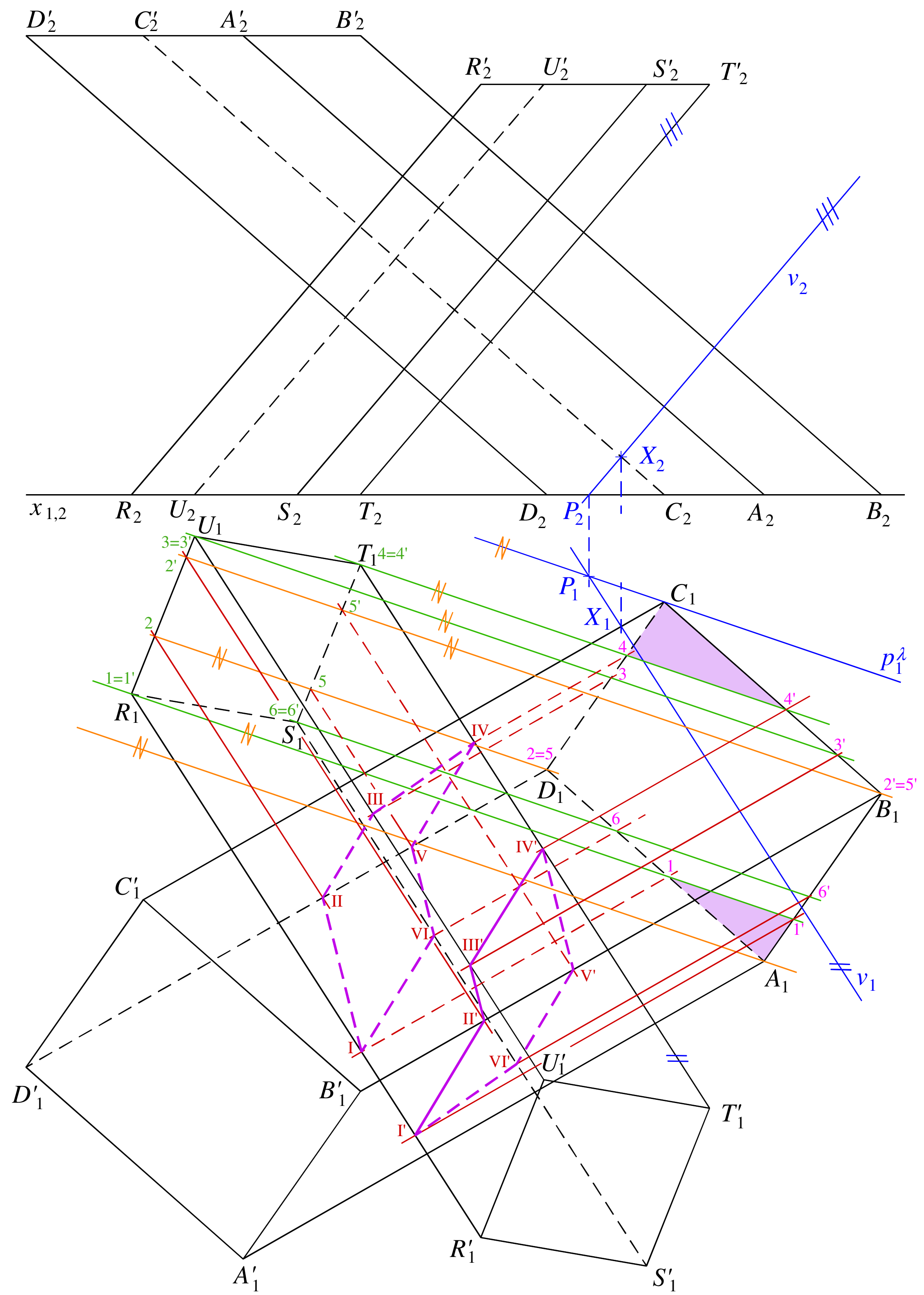
Určíme a zvýrazníme liché části. Leží na témže tělese, proto se jedná o průnik úplný (průniková čára bude mít dvě části).



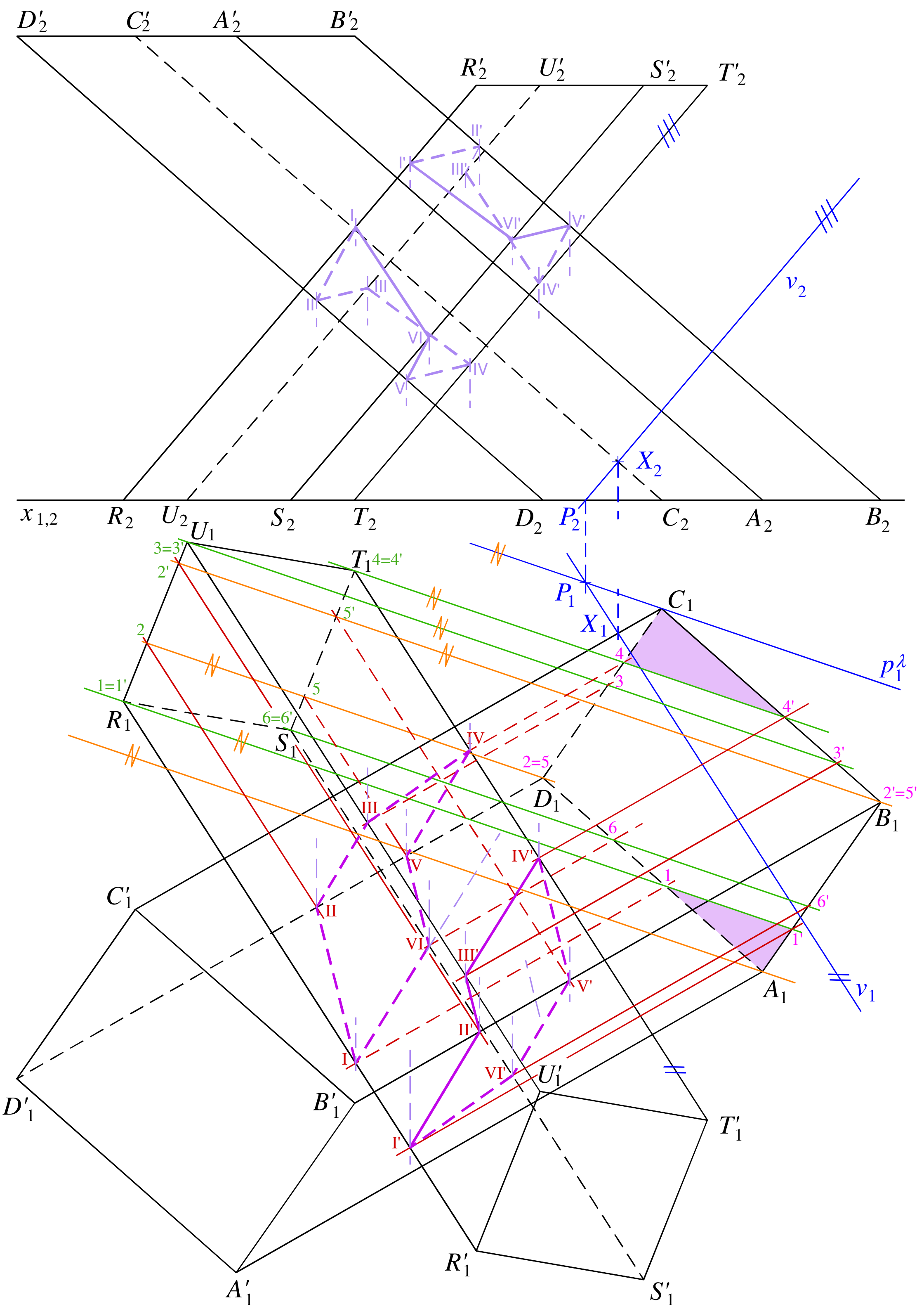
Provedeme očíslování podstav. Za výchozí vrchol (pro obě části průnikové čáry) zvolíme např. bod R.



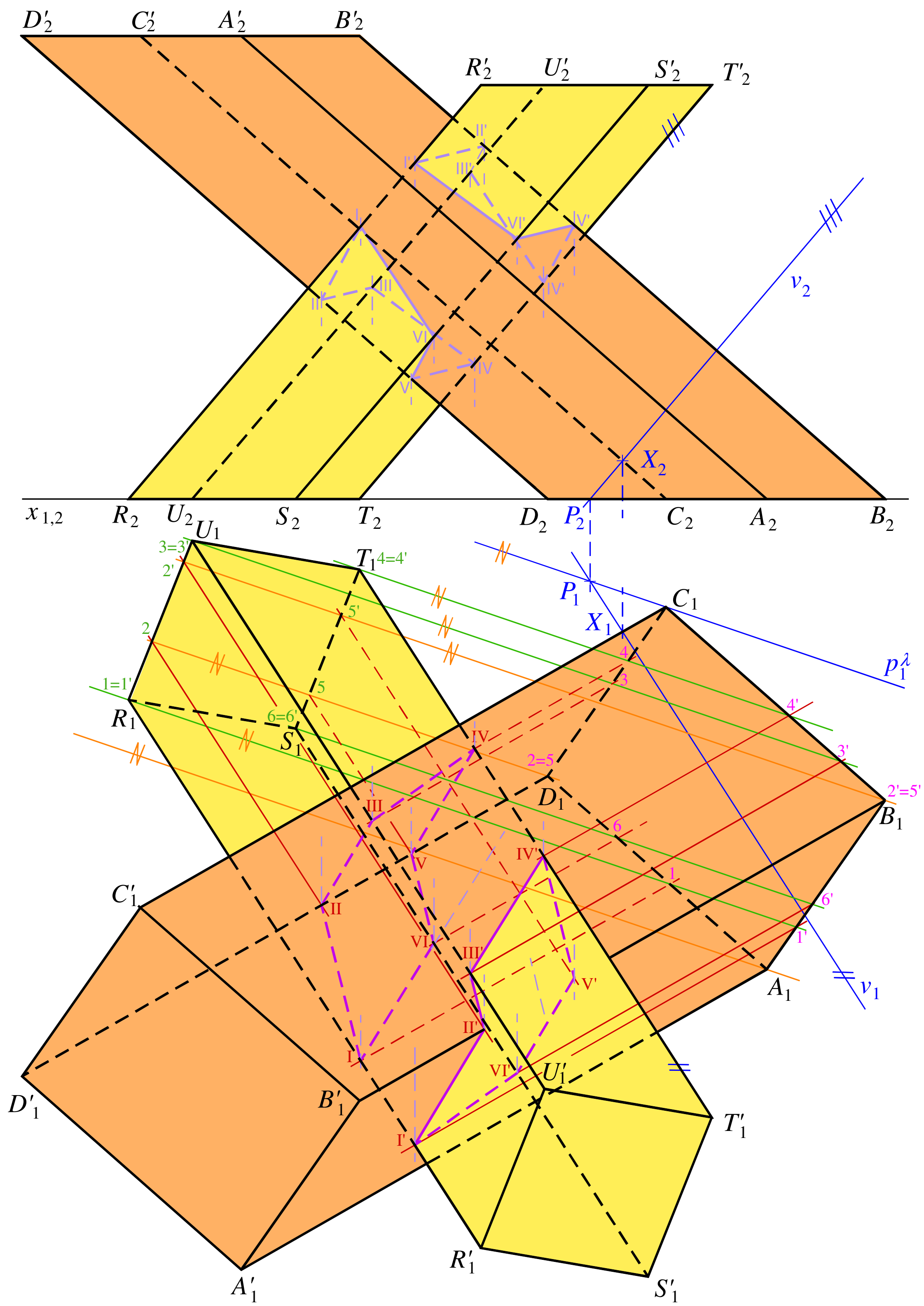
Řezy hranolů směrovými rovinami jsou obdélníky, z nichž každý má dvě své strany rovnoběžné s bočními hranami příslušného hranolu. Očíslovanými body, které nejsou vrcholy podstav, proto vedeme rovnoběžky s průměty bočních hran příslušného tělesa. Průsečík takovéto přímky procházející číslem 1 a průmětu hrany druhého tělesa, která prochází vrcholem 1, je bod I. Obdobně získáme další průsečíky II až VI, resp. I'až VI'.



Spojením průsečíků získáme půdorysy dvou částí průnikové čáry. Při promítání do půdorysny jsou viditelné stěny $ABB'A'$, $BCC'B'$ jednoho hranolu a stěny $TUU'T'$, $URR'U'$ hranolu druhého. Viditelné jsou půdorysy těch stran průnikové čáry, které leží současně ve dvou viditelných stěnách.

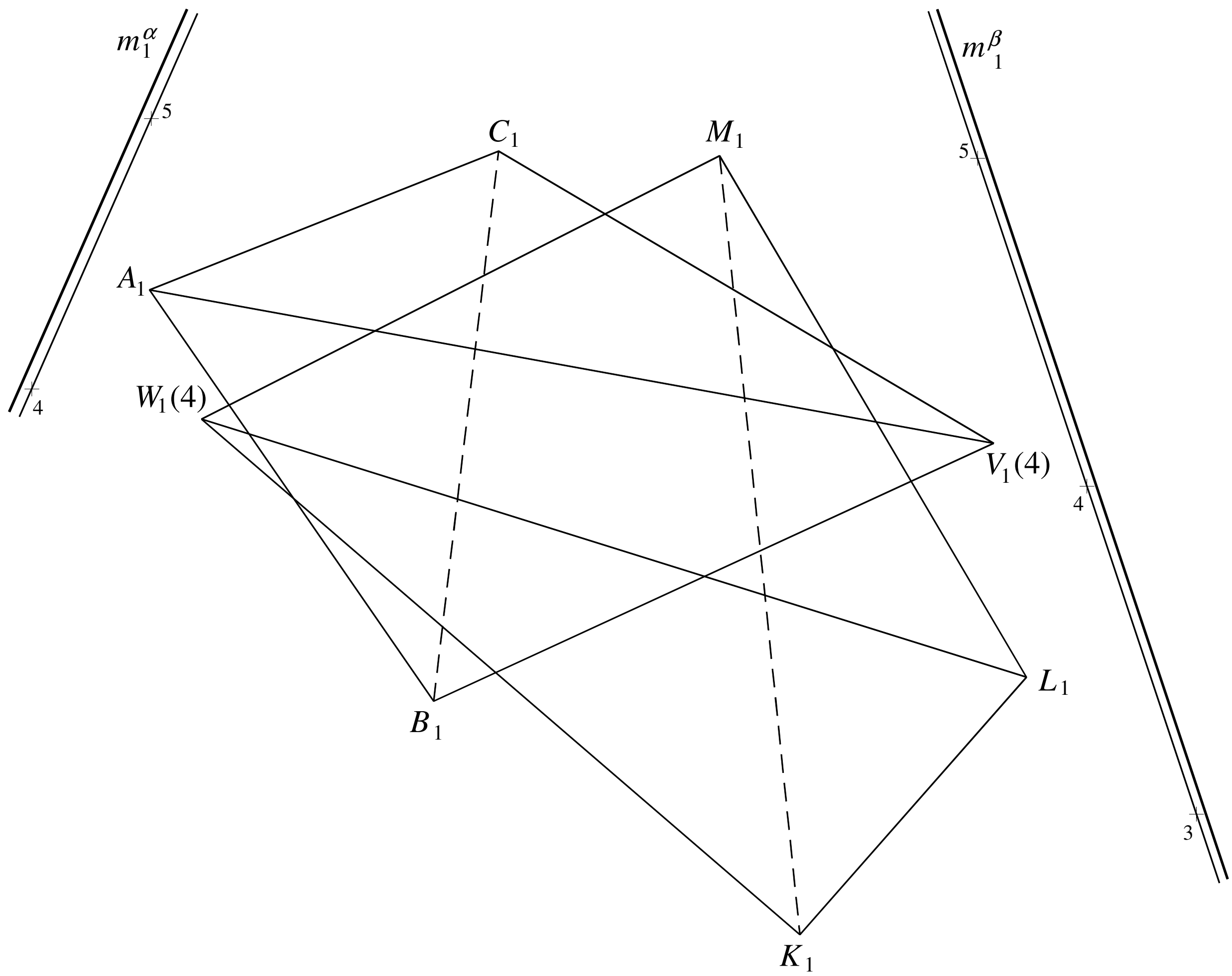


Pomocí ordinál získáme na nárysech příslušných hran nárysy bodů I, II, III, IV, V, VI, resp. I', II', III', IV', V', VI' (kvůli čitelnosti nejsou u půdorysů a nárysů těchto bodů uvedeny dolní indexy). Získané body opět ve správném pořadí spojíme. Při určování viditelnosti nárysů stran průnikové čáry je tentokrát rozhodující viditelnost stěn hranolů při promítání do nárysny (viditelné jsou stěny $STT'S'$, $RSS'R'$ a dále stěny $ABB'A'$, $DAA'D'$). V jakých stěnách strana průnikové čáry leží však vidíme v půdorysu.

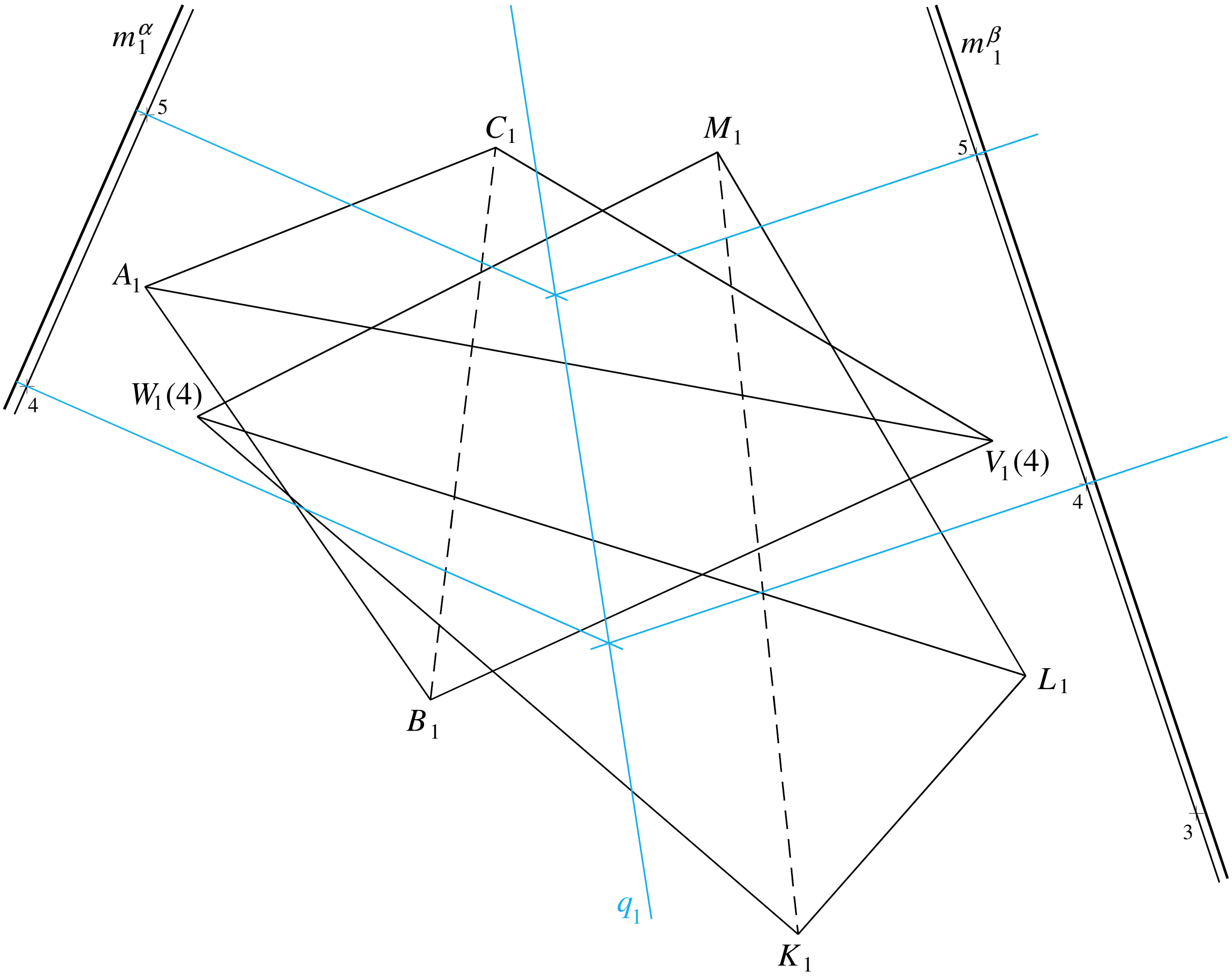


Nezbývá než určit viditelnost hran těles (či jejich částí) jak v půdorysu, tak v nárysu. Názornost výsledného obrázku se zvětší vybarvením hranolů.

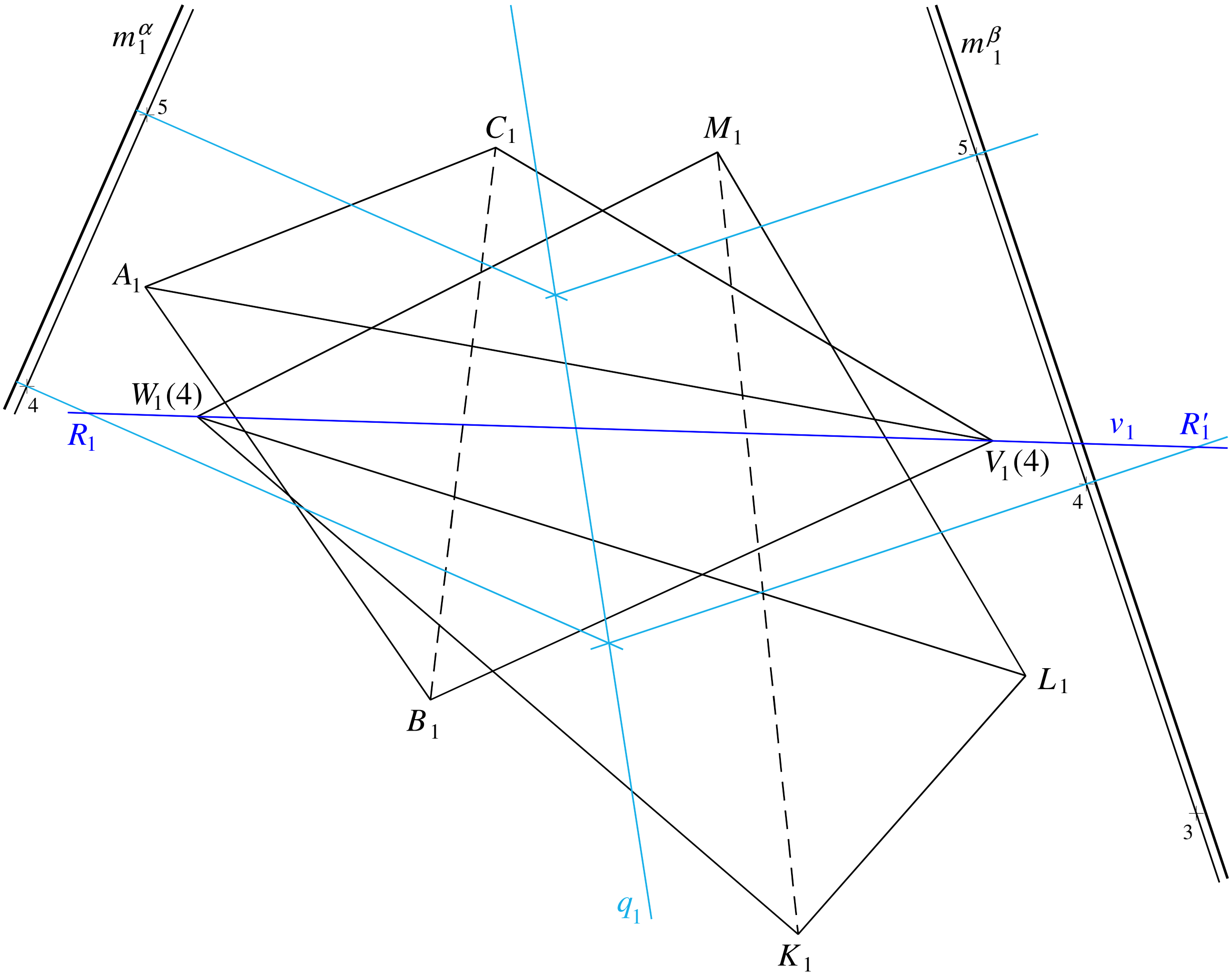
Příklad 3: V kótovaném promítání sestrojte průnik těles, jejichž podstavy ABC a KLM leží po řadě v rovinách α a β.



Řešení:

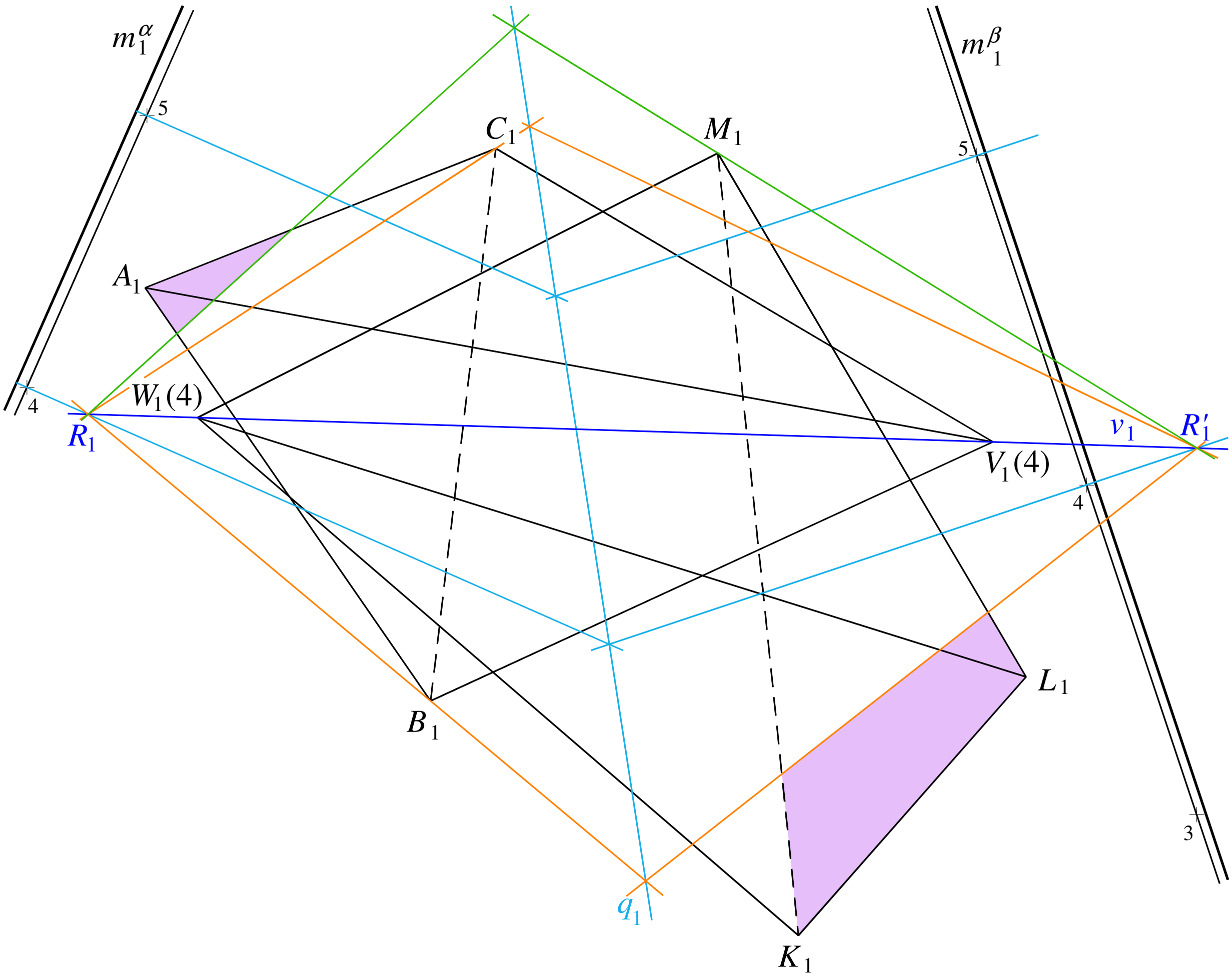


Jedná se o dva jehlany s podstavami v různých rovinách. Nejprve sestrojíme pravoúhlý průmět q_1 průsečnice q rovin podstav, tj. rovin α a β.



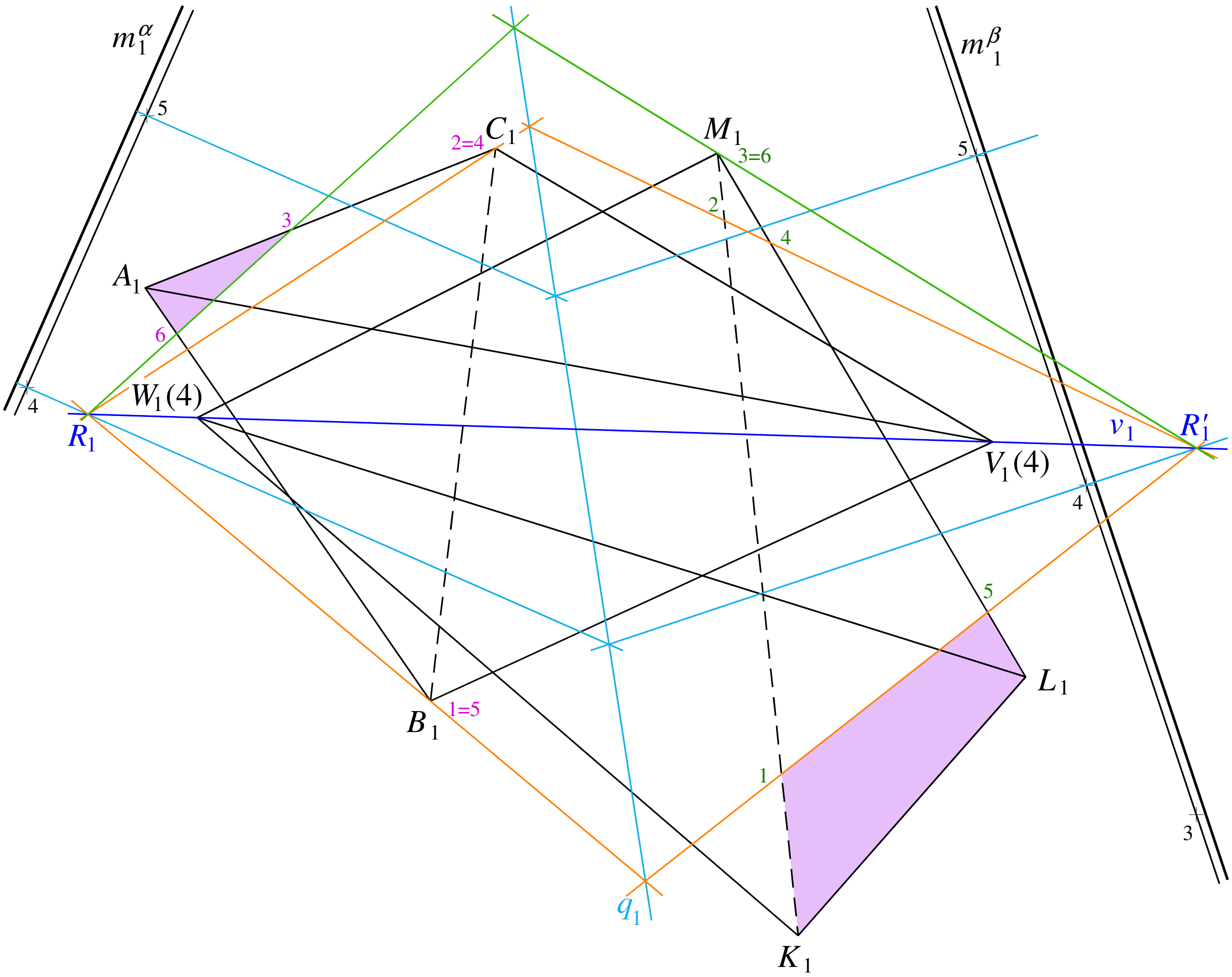
Sestrojíme pravoúhlý průmět v_1 spojnice v vrcholů V, W jehlanů a dále pravoúhlé průměty R_1, R'_1 průsečíků R, R' přímky v s rovinami podstav.

Prokládané roviny jsou vrcholové pro oba jehlany, procházejí přímkou v. Řezy těles těmito rovinami jsou trojúhelníky.

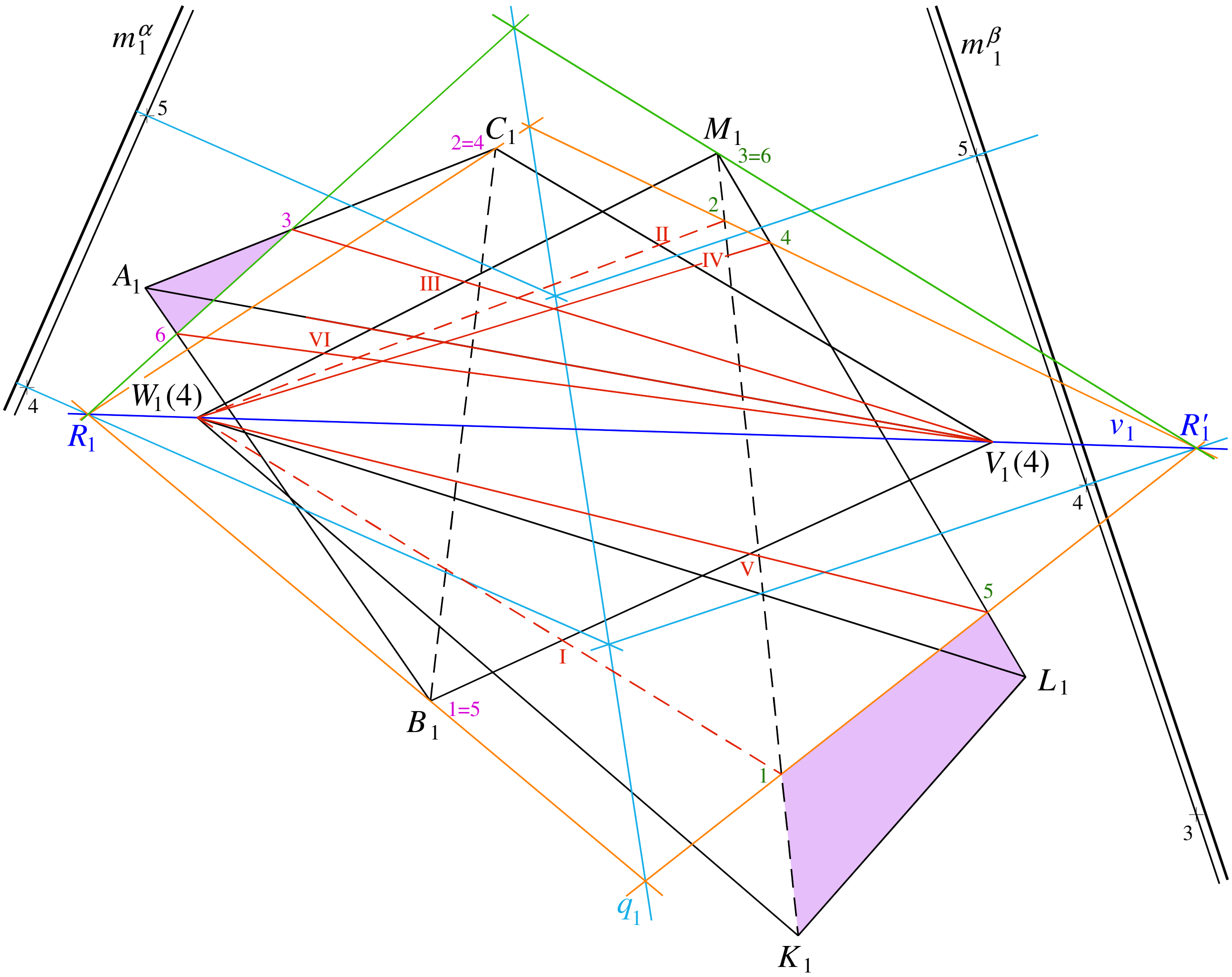


Bod R_1 spojíme s pravoúhlými průměty B_1, C_1 vrcholů B, C podstavy, která leží v rovině α (na obrázků není spojnice s bodem A_1, neboť vrchol A zřejmě leží v liché části). Sestrojíme průsečíky těchto spojnic s přímkou q_1, které spojíme s bodem R_1'.

Analogicky bod R_1' spojíme s pravoúhlým průmětem M_1 vrcholu M podstavy ležící v rovině β (spojnice s body K_1, L_1 jsou zbytečné, neboť vrcholy K, L evidentně leží v liché části). Průsečík přímky $R_1'M_1$ s přímkou q_1 spojíme s bodem R_1. Určíme a zvýrazníme liché části. Protože patří dvěma tělesům, jehlany se pronikají částečně (průniková čára má jedinou část).

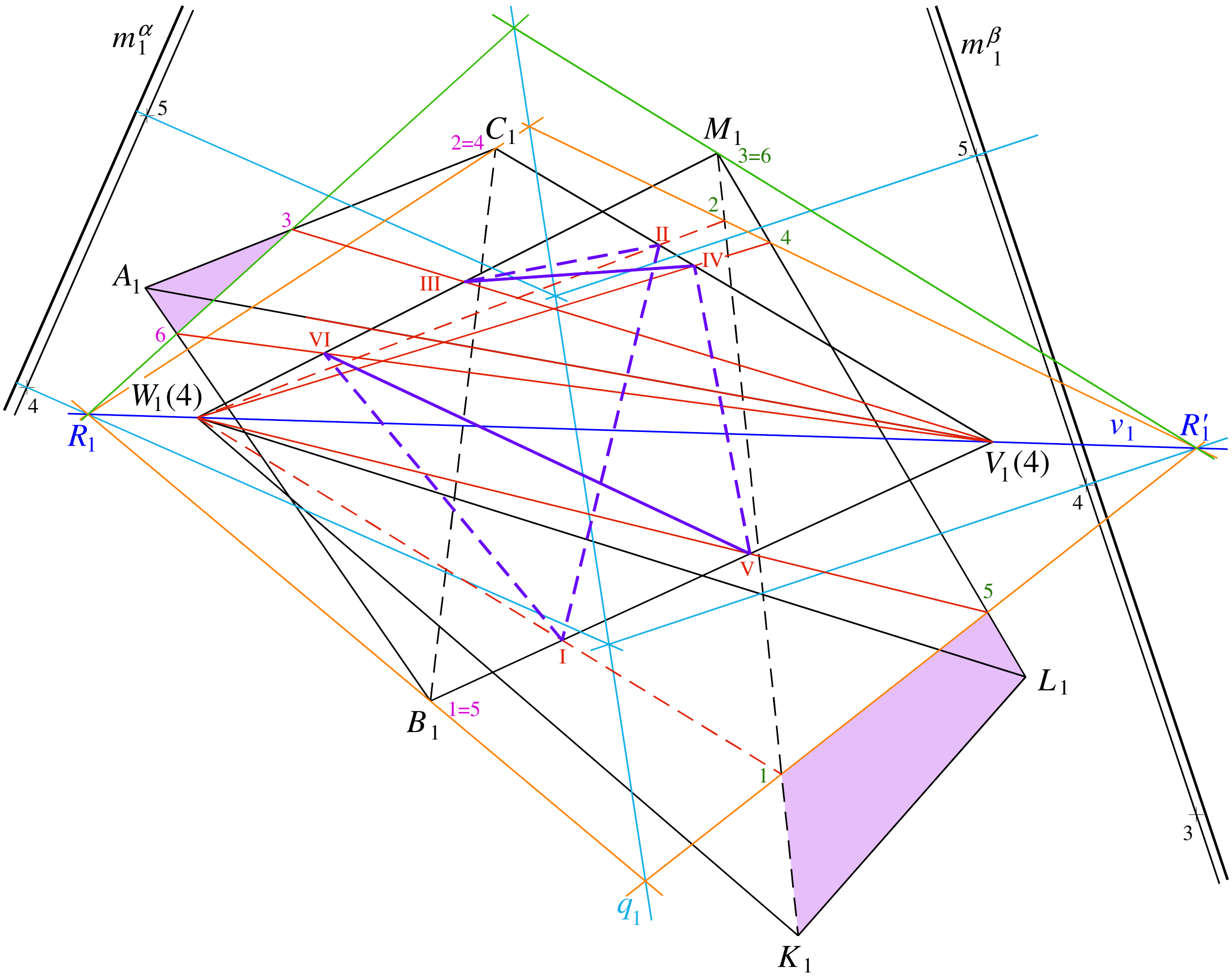


Očíslujeme podstavy jehlanů.

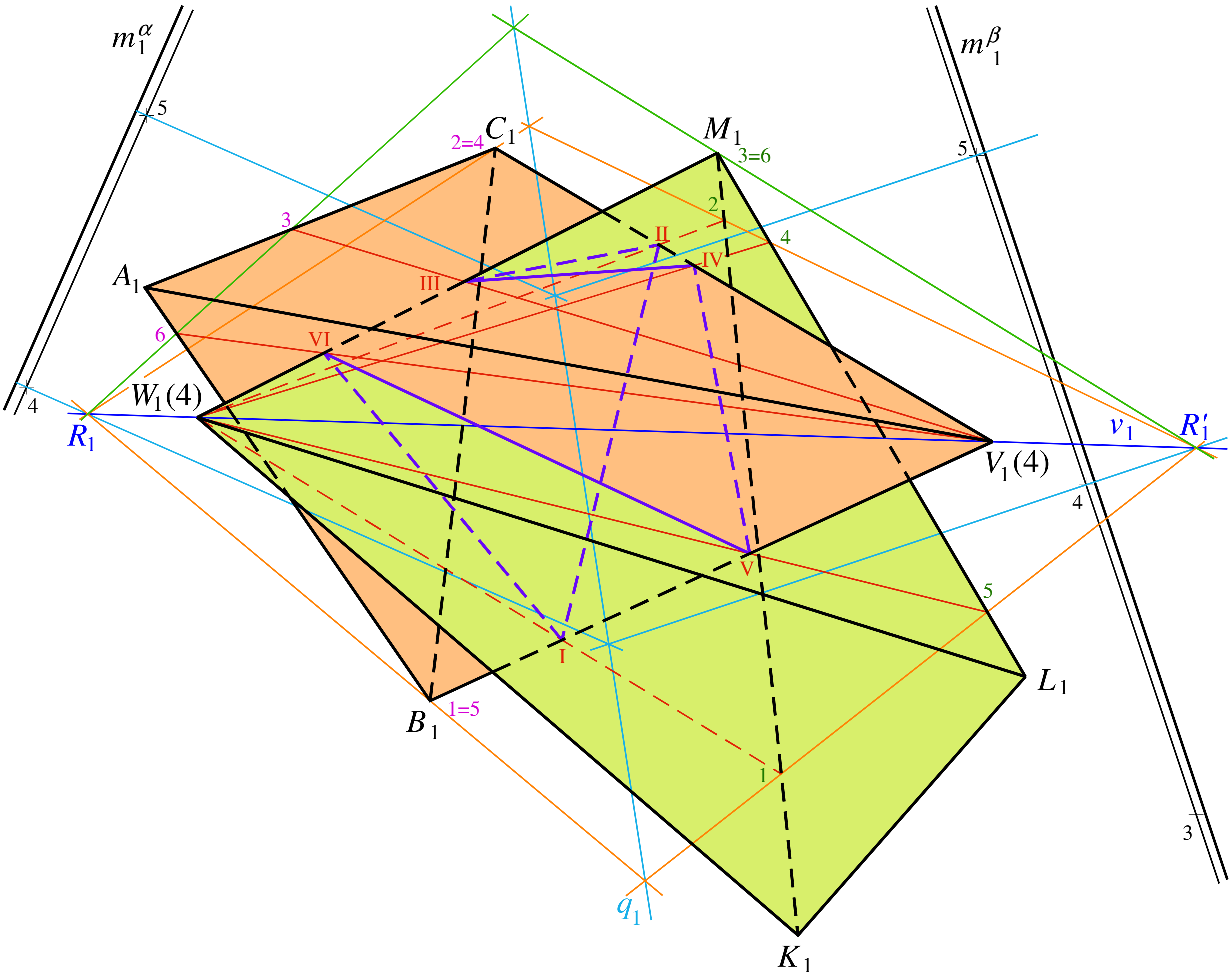


Očíslované body, které nejsou současně vrcholy podstav, spojíme s průmětem vrcholu příslušného jehlanu (tím jsme sestrojili průměty řezů stěn jehlanů proloženými rovinami).

Sestrojíme body I, II, III, IV, V a VI.

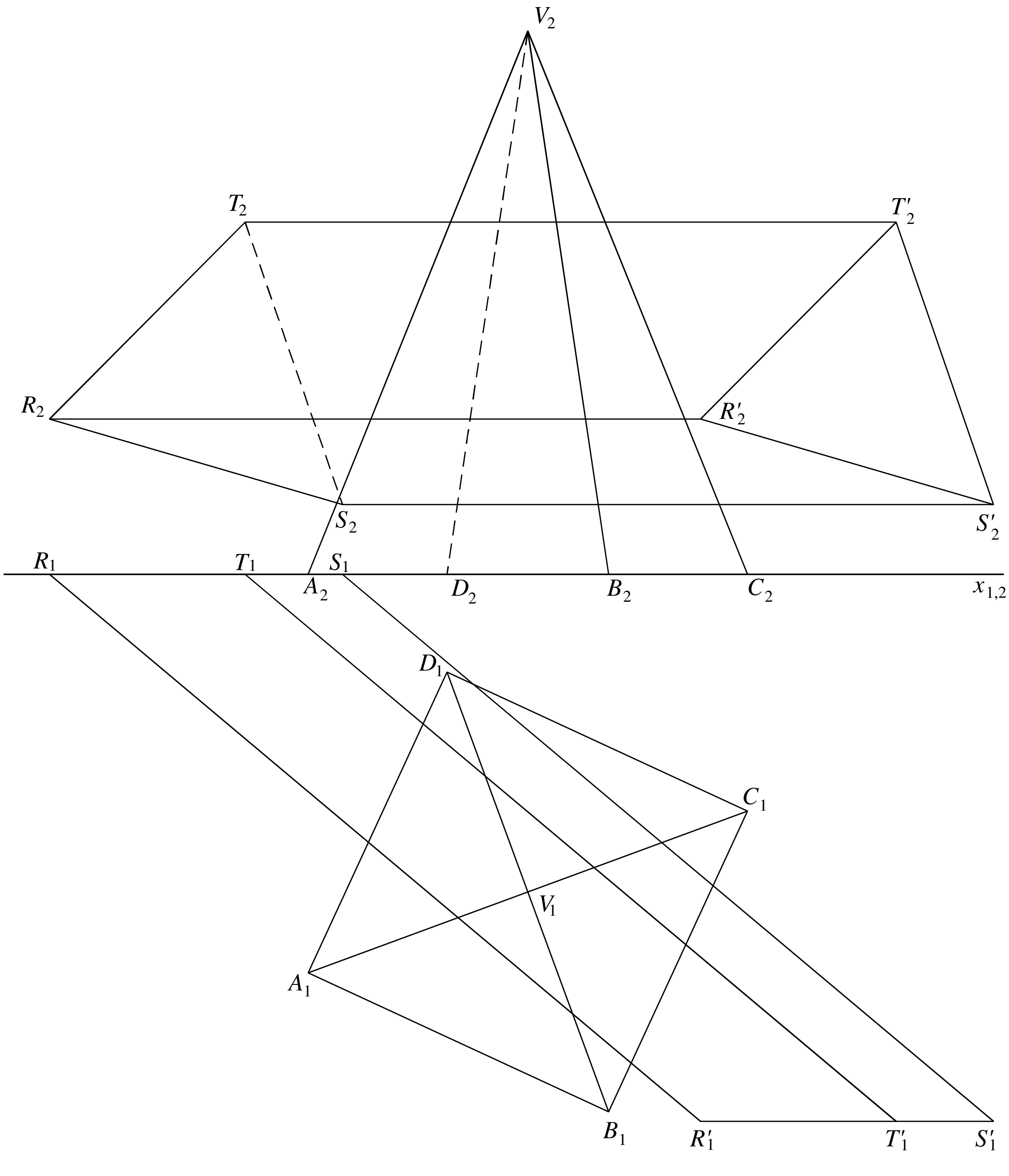


Spojíme body I, II, III, IV, V, VI. Viditelné jsou stěny ABV, CAV jednoho tělesa a KLW a LMW druhého tělesa (stěna KLW přitom leží v liché části). Viditelné jsou tedy pouze spojnice bodů III, IV a dále bodů V, VI.

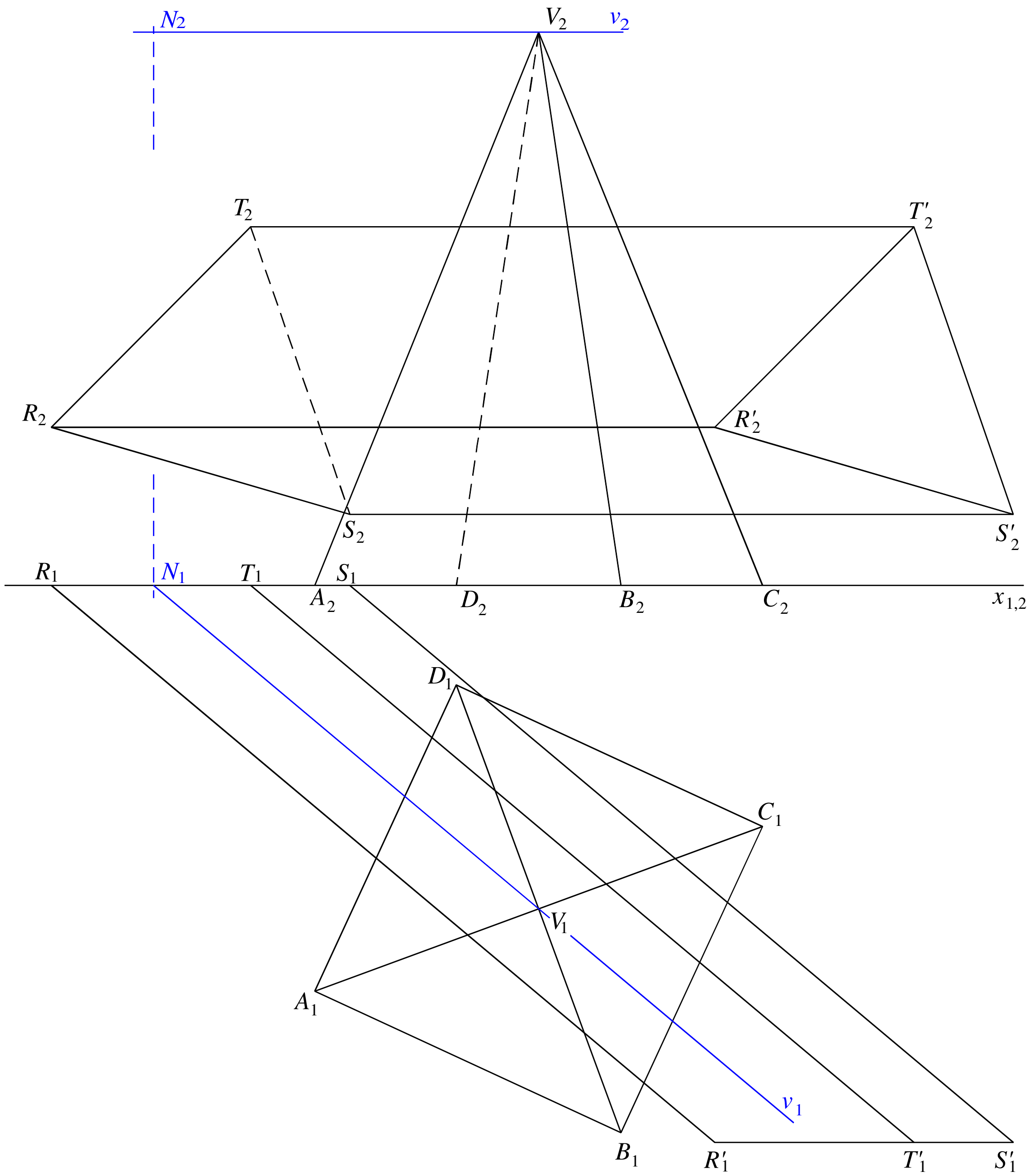


Zvýrazníme viditelné části hran jehlanů a tělesa případně vybarvíme.

Příklad 4: V Mongeově promítání sestrojte průnik těles.

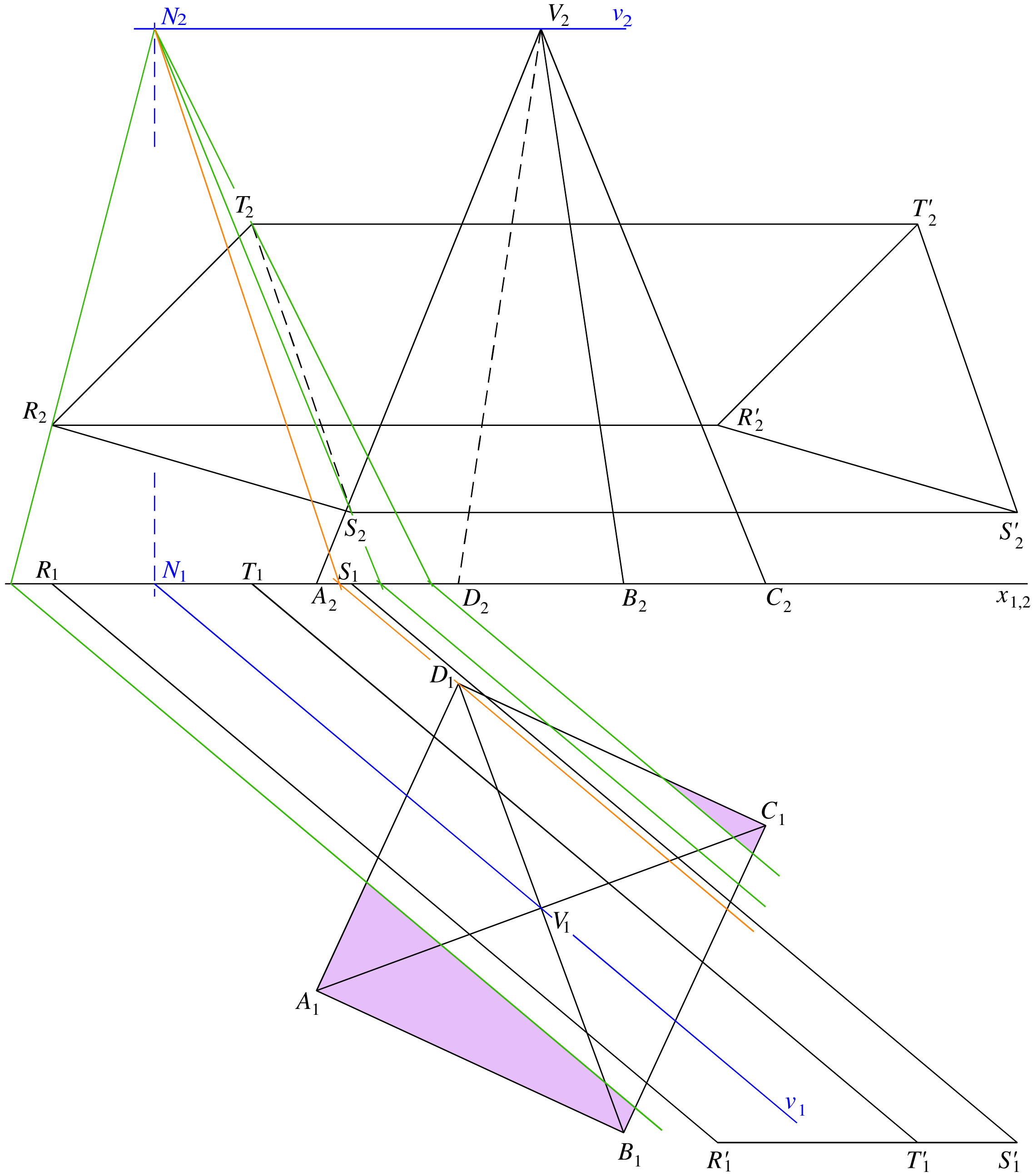


Řešení:



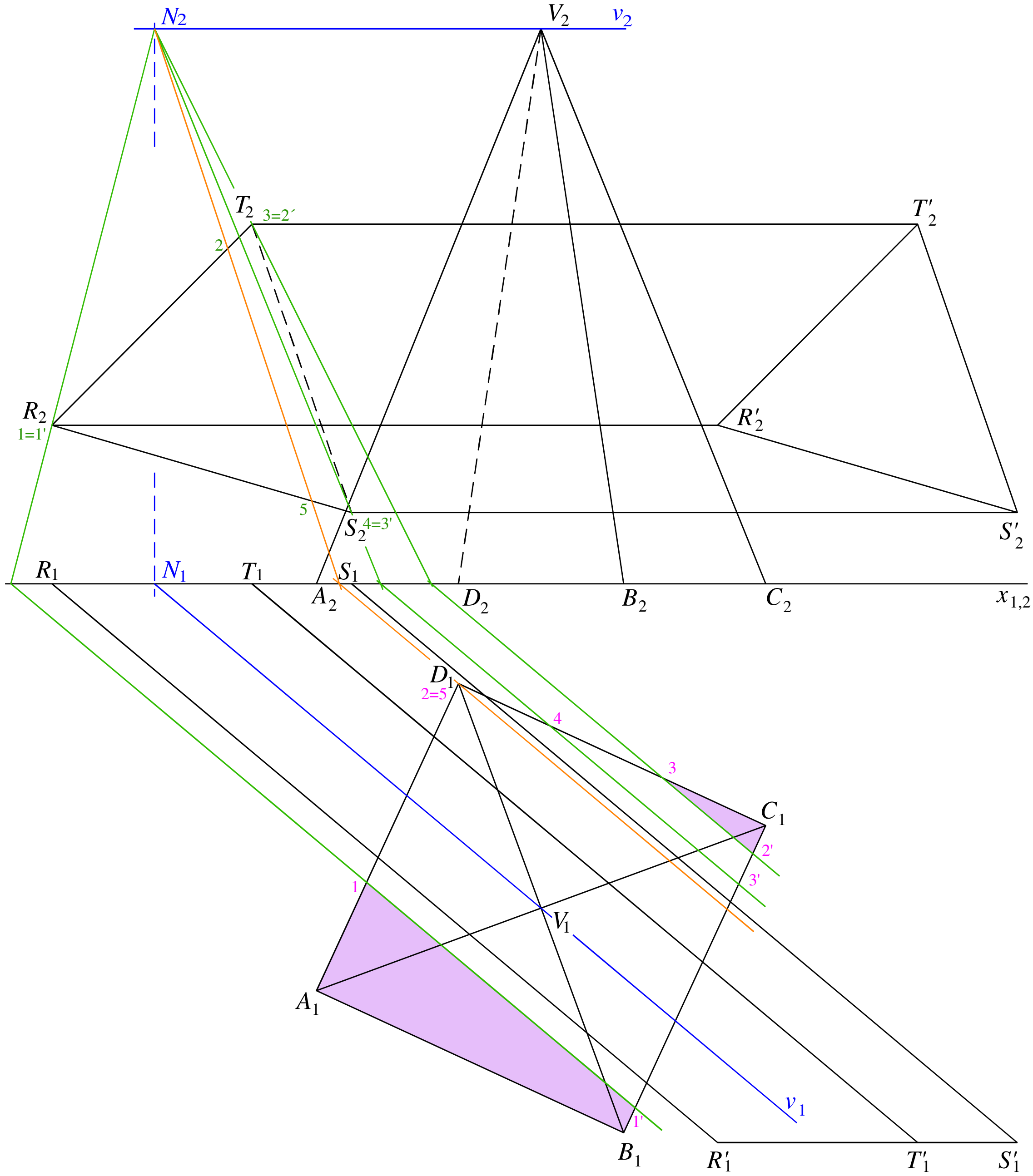
Sestrojujeme průnik jehlanu a hranolu, přičemž podstavy těles neleží v jedné rovině. Podstava jehlanu leží v půdorysně, podstava hranolu leží v nárysně. Průsečnicí obou rovin podstav je osa x.

Vrcholem V jehlanu vedeme přímku v rovnoběžnou s bočními hranami hranolu. Sestrojíme průsečík přímky v s rovinou podstavy hranolu, tj. sestrojíme nárysný stopník N přímky v. Protože jsou boční hrany hranolu rovnoběžné s rovinou podstavy jehlanu, což je půdorysna, je rovněž přímka v rovnoběžná s půdorysnou, a tedy průsečík přímky v s půdorysnou nesestrojujeme.

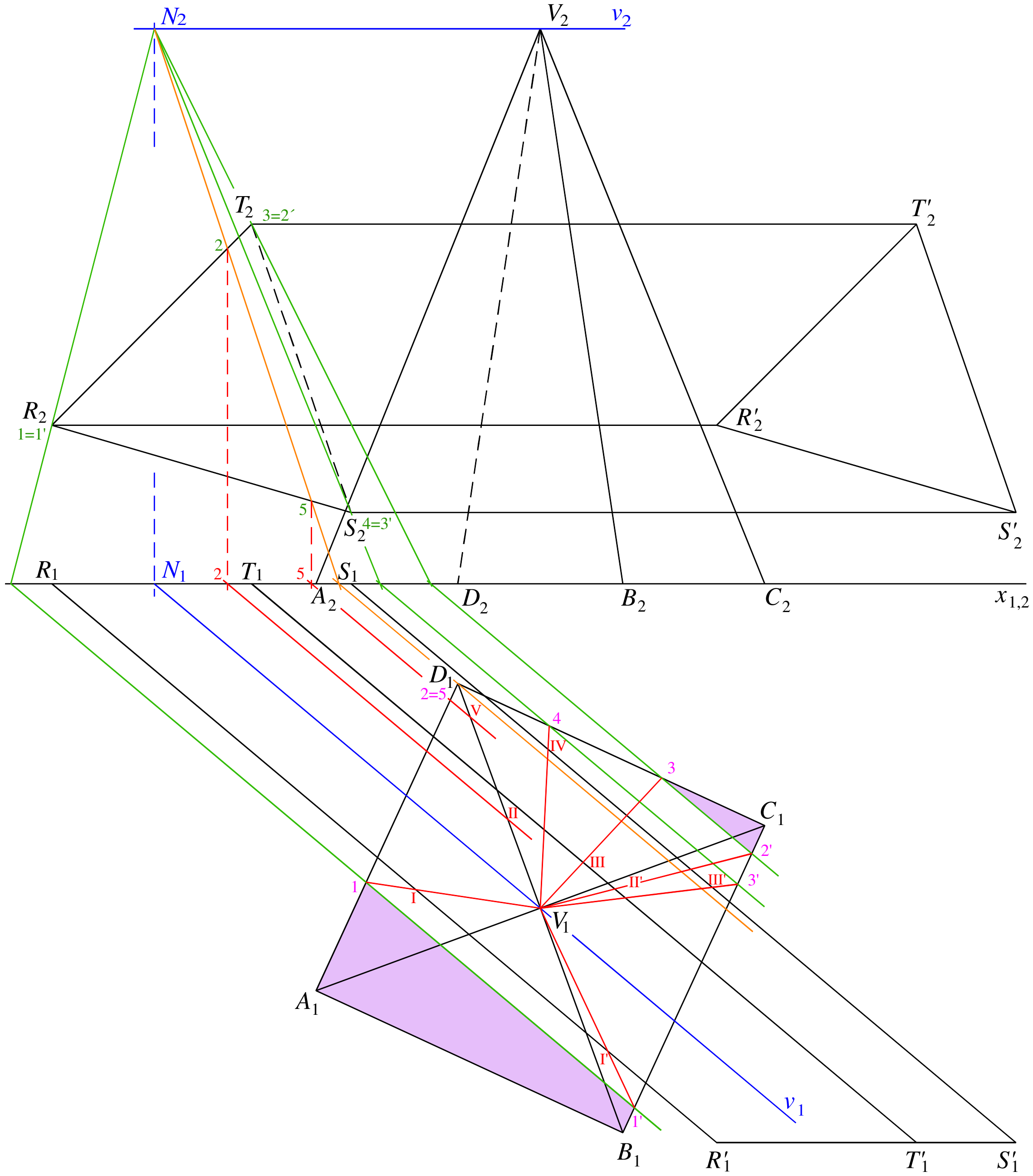


Nárys N_2 nárysného stopníku N přímky v spojíme s body R_2, S_2, T_2 a sestrojíme průsečíky uvedených přímek se základnicí. Těmito průsečíky vedeme přímky rovnoběžné s půdorysy bočních hran hranolu. Přímku tohoto směru vedeme rovněž bodem D_1 (případně i body A_1, B_1, C_1, což však není nutné, neboť body A, B, C leží v lichých částech) a její průsečík se základnicí spojíme s bodem N_2.

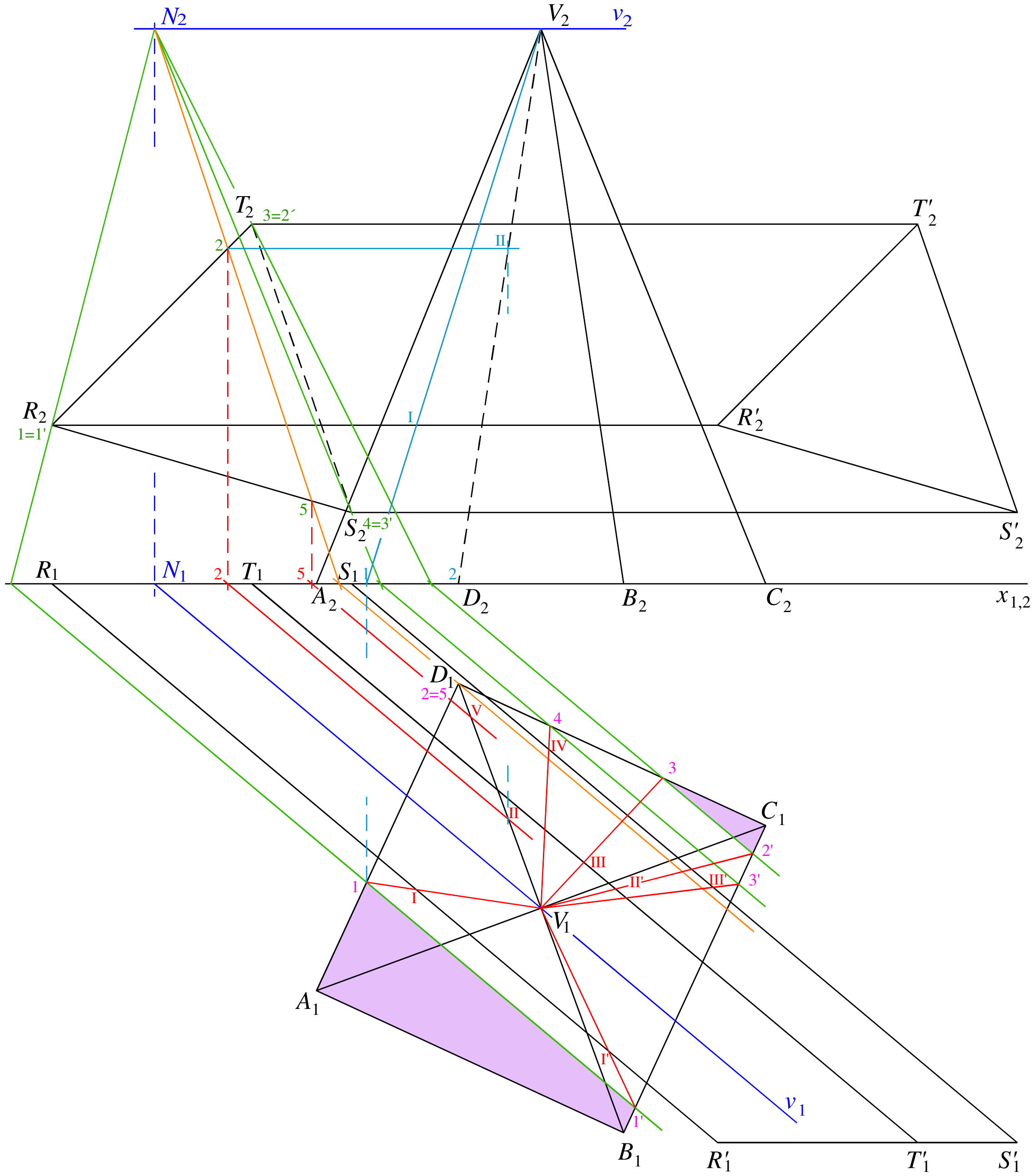
Zvýrazníme liché části. Leží na témže tělese, tudíž je průnik úplný.



Očíslujeme podstavy. Pracujeme přitom s půdorysem podstavy jehlanu a nárysem podstavy hranolu.



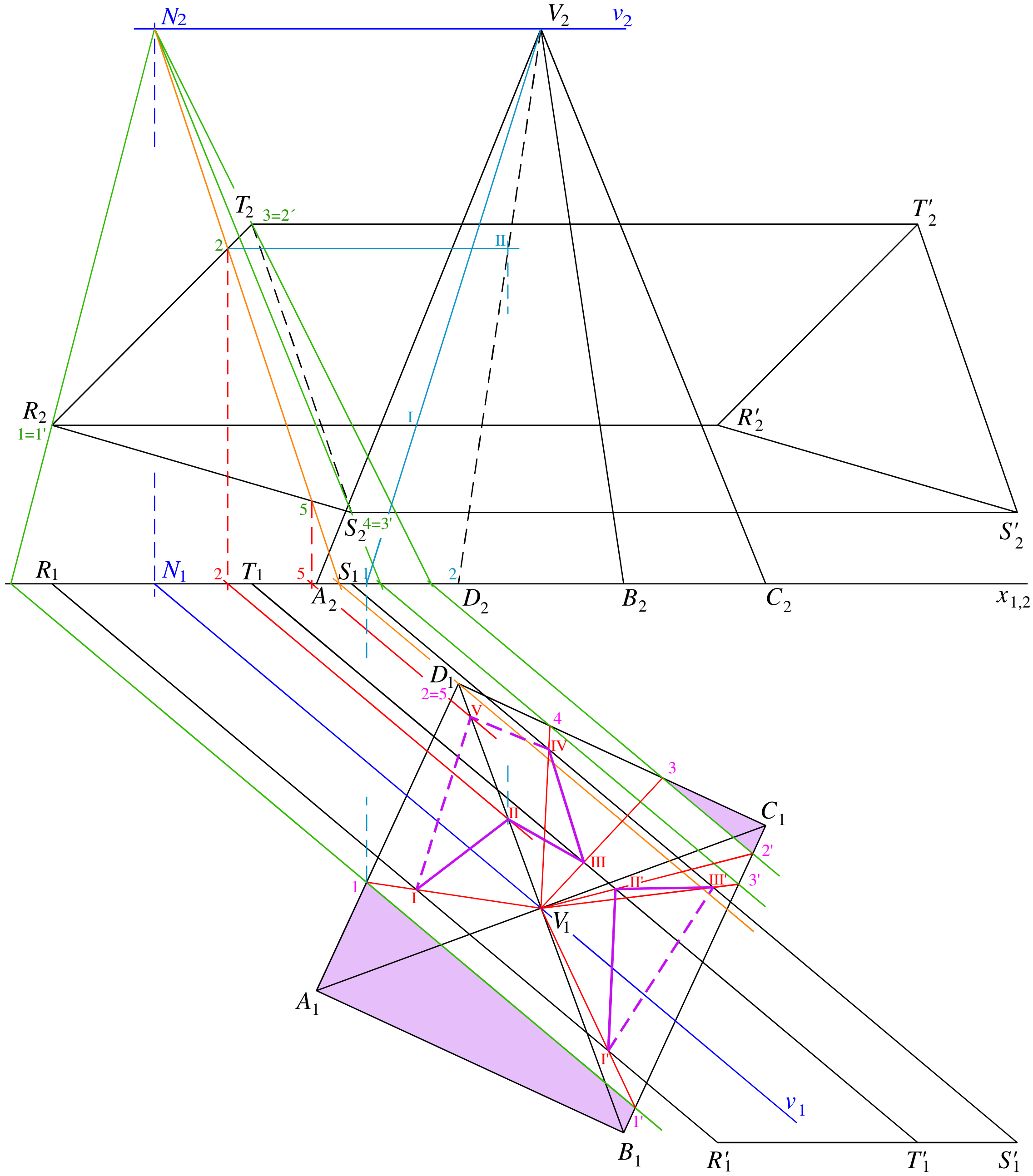
Zvolíme, zda průsečíky hran jednoho tělesa s tělesem druhým sestrojíme nejprve v půdorysu, nebo v nárysu. Pokud se rozhodneme pro půdorys, musíme čísla, která leží na stranách trojúhelníku $R_2S_2T_2$ (ne však přímo v jeho vrcholech), odvést pomocí ordinál na základnici. Konkrétně je nutné odvést body 2 a 5 a poté průsečíky ordinál se základnicí vést přímky rovnoběžné s půdorysy bočních hran hranolu. Tím jsme sestrojili půdorysy částí řezů hranolu proloženými rovinami. Dále si uvědomme, že v bodě R_1 jsou zároveň čísla $1 = 1'$, v bodě S_1 jsou zároveň čísla $4 = 3'$ a v bodě T_1 jsou zároveň čísla $3 = 2'$. Sestrojíme rovněž půdorysy řezů jehlanu proloženými rovinami a poté snadno nalezneme půdorysy průsečíků I, II, III, IV, V, I', II', III' hran každého z těles se stěnami tělesa druhého.



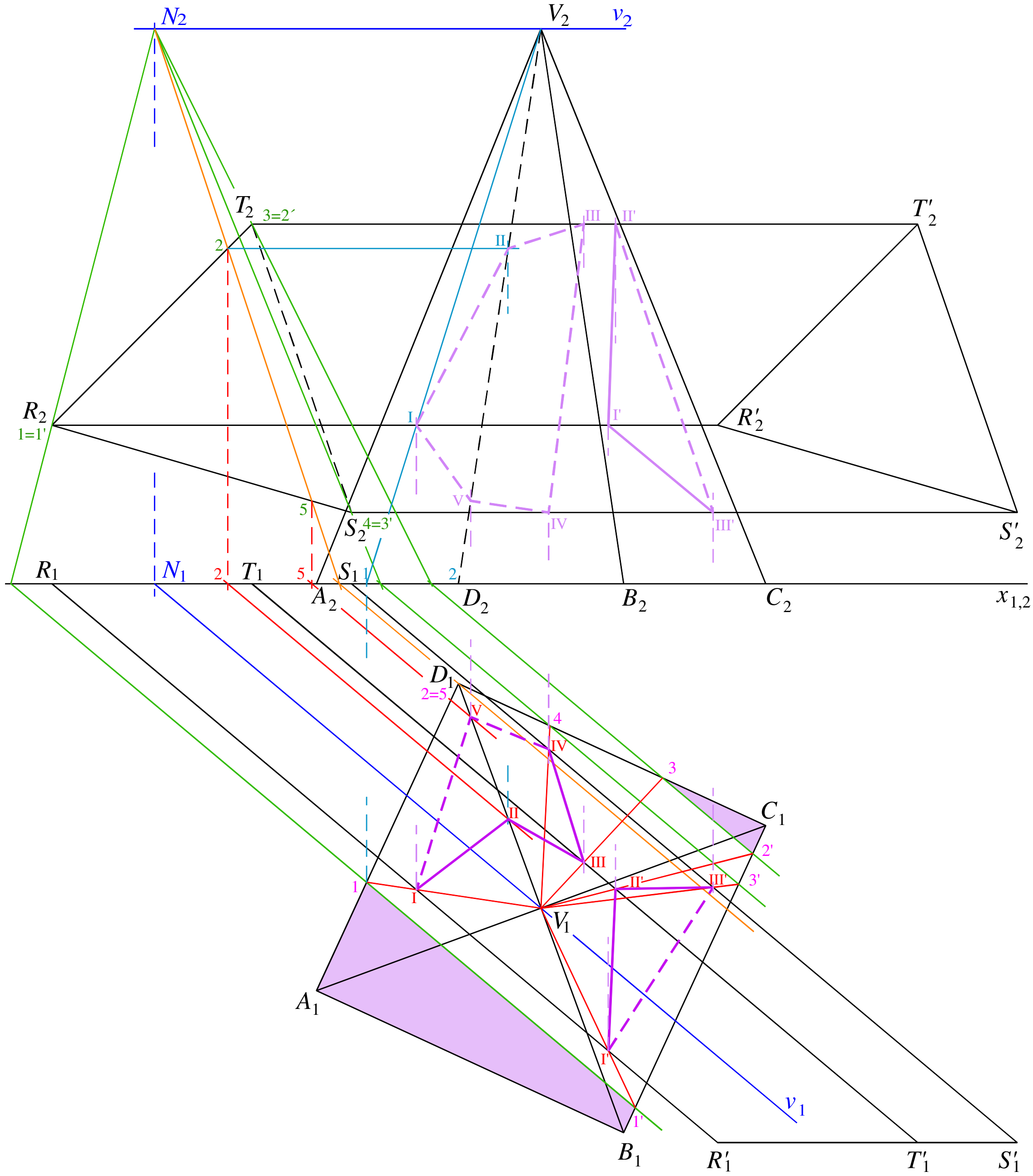
Nyní ukážeme, jak bychom mohli průsečíky hran tělesa s druhým tělesem hledat v nárysu. Nejprve bychom pomocí ordinál odvedli na základnici čísla 1, 3, 4, $1'$, $2'$ a $3'$ a poté postupovali zcela analogicky.

Na obrázku je postup pro přehlednost ukázán pouze pro průsečíky I a II. V případě průsečíku I odvedeme pomocí ordinály na základnici číslo 1 a tento bod na základnici spojíme s nárysem V_2 vrcholu V. Jelikož číslo 1 je na nárysu podstavy hranolu v bodě R_2, je nárys bodu I průsečíkem sestrojené spojnice a nárysu R_2R_2' hrany RR'.

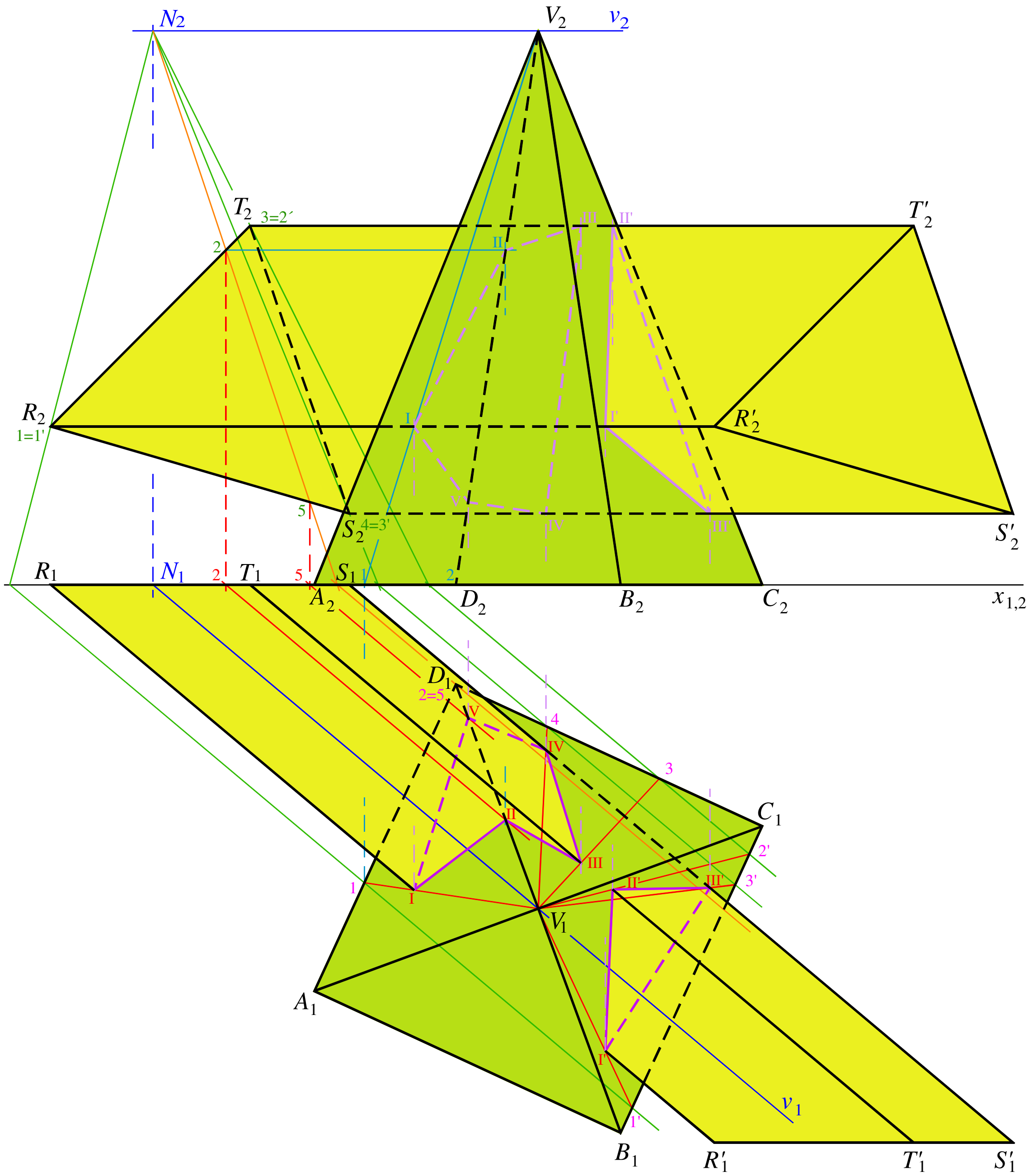
Nárysem vrcholu 2 podstavy jehlanu je bod D_2. Nárys bodu II je tedy průsečíkem nárysu D_2V_2 hrany DV s přímkou, která prochází bodem 2 na nárysu podstavy hranolu a je rovnoběžná s nárysy bočních hran hranolu.



Sestrojíme půdorysy obou částí průnikové čáry. Všechny její strany leží ve stěnách jehlanu, které jsou při promítání do půdorysny viditelné. Na viditelnost půdorysů stran průnikové čáry tak má vliv pouze jejich poloha ve stěnách hranolu.

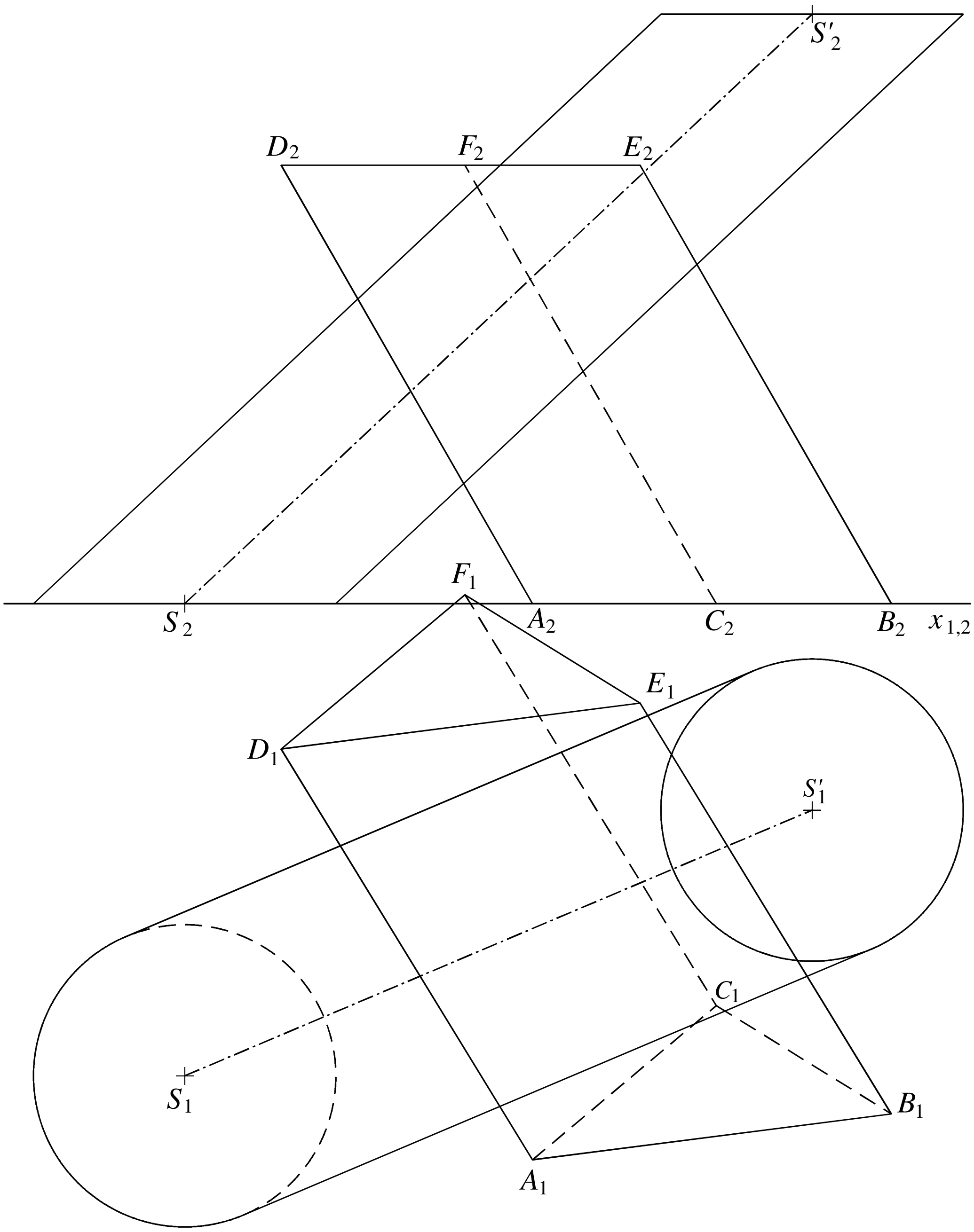


Pomocí ordinál zjistíme nárysy bodů I, II, III, IV, V, I’, II’, III’. Jejich správným spojením získáme nárysy obou částí průnikové čáry a na základě viditelnosti stěn obou těles v nárysu určíme viditelnost nárysů jednotlivých stran průnikové čáry.



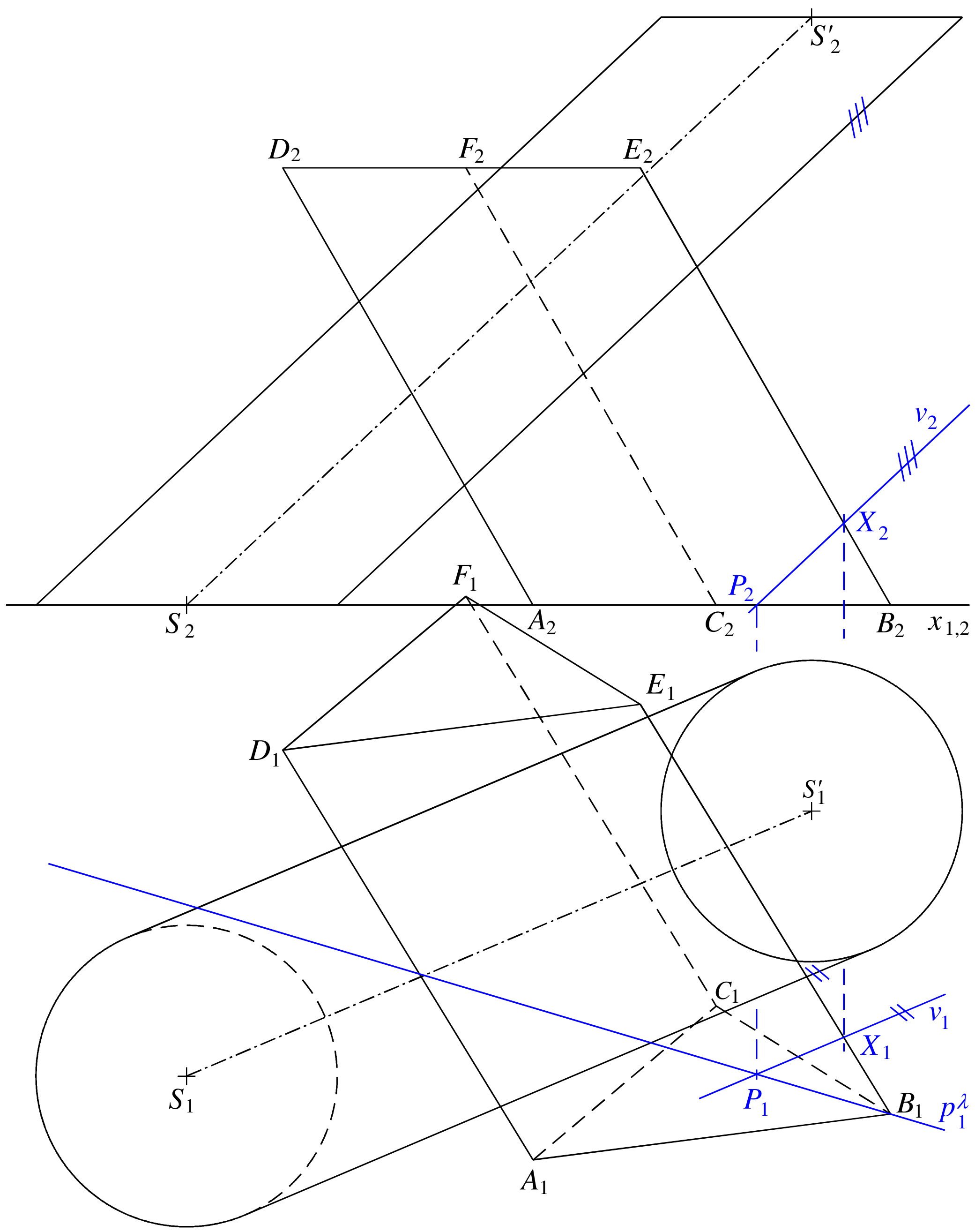
Posledním krokem je zvýraznění viditelnosti jednotlivých hran těles (či jejich částí), a to v obou průmětech. Případně lze mnohostěny vybarvit.

Příklad 5: V Mongeově promítání sestrojte průnik těles.



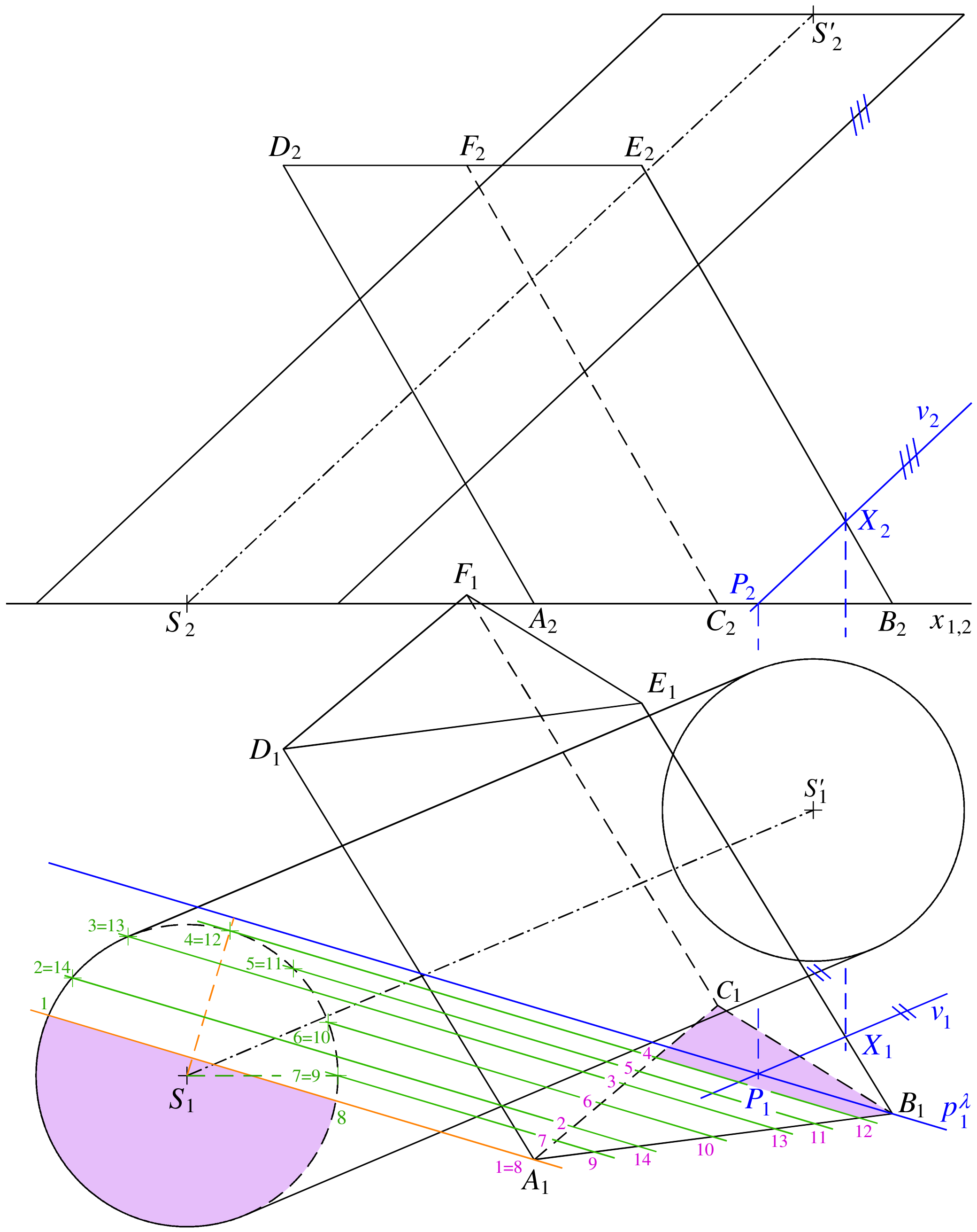
Máme sestrojit průnik hranolu a válce s podstavami v půdorysně. Mohlo by se zdát, že v tomto případě nemůžeme výše popsaný princip řešení využít, neboť podstavou válce je kruh a kruh nemá vrcholy, které bychom mohli číslovat. Kruh však můžeme aproximovat n-úhelníkem, tj. na jeho hraniční kružnici zvolit body a pohlížet na ně jako na vrcholy n-úhelníku. Řešení tohoto příkladu poté bude analogií řešení příkladu 2.

Řešení:

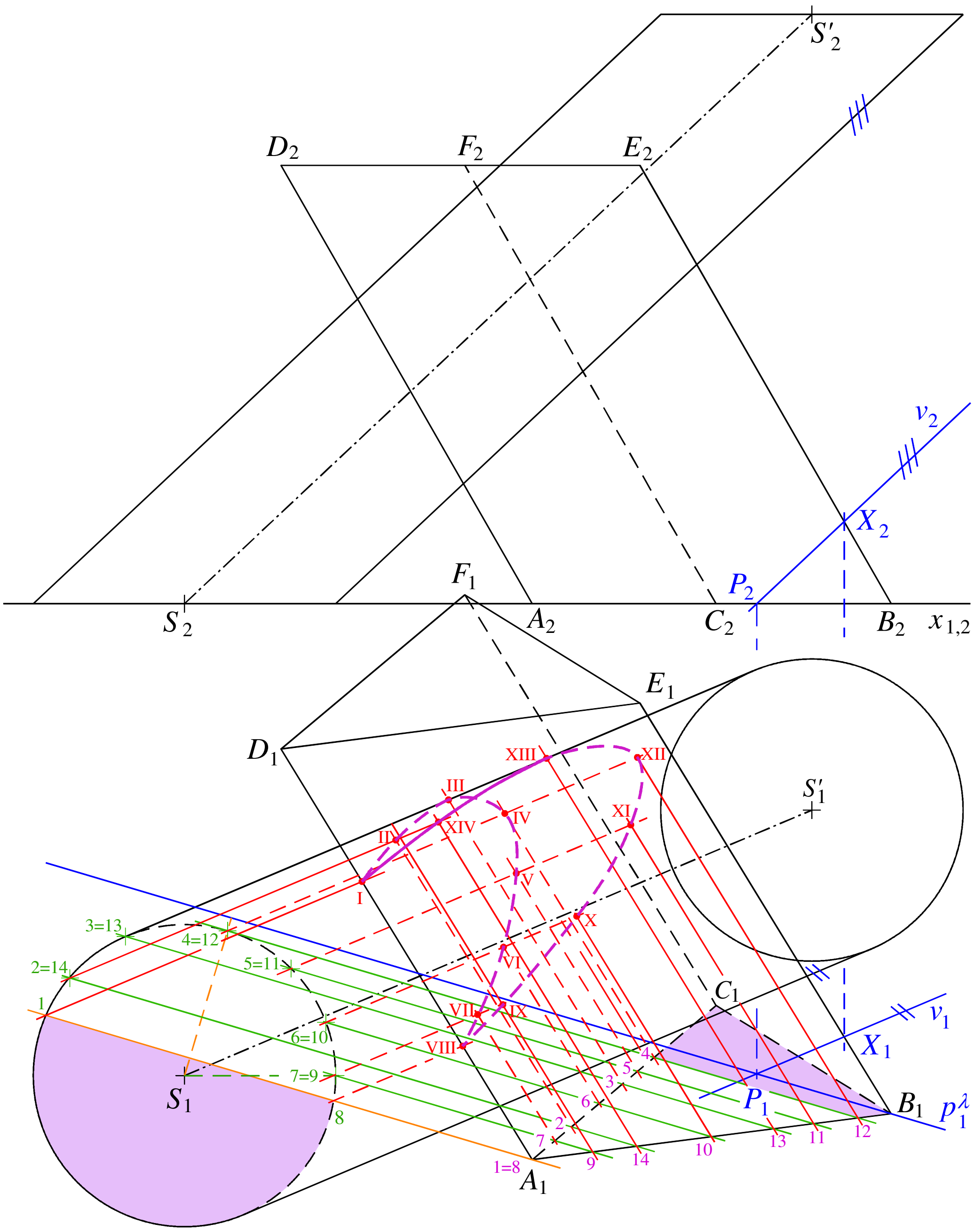


Před volbou „vrcholů kruhu“ však nejdříve zjistíme, zda na válci existuje lichá část (v ní je volba bodů zbytečná).

Například na hraně BE tedy zvolíme bod X a jím vedeme přímku v rovnoběžnou s povrchovými přímkami válce (a tedy i s osou válce). Různoběžky v, EB určují rovinu λ, která je směrovou rovinou obou těles. Zobrazíme půdorysný stopník P přímky v, stopníkem přímky EB je bod B. Půdorysem p_1^λ půdorysné stopy roviny λ je přímka P_1B_1.



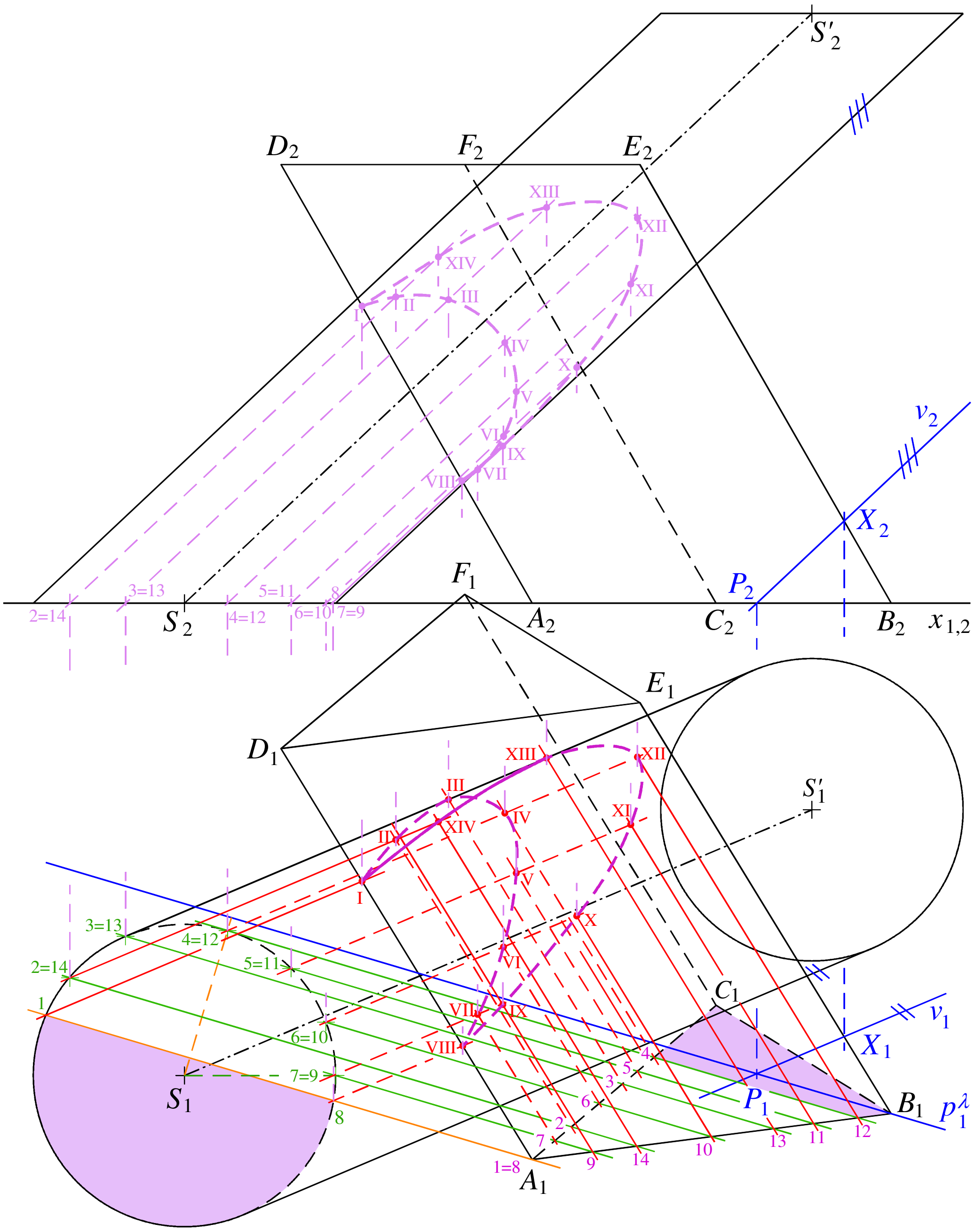
Vedeme-li rovnoběžku s přímkou p_1^λ bodem A_1, získáme lichou část válce. Vedeme-li tečnu hraniční kružnice uvažované podstavy, která je rovnoběžná s přímkou p_1^λ a nemá bod dotyku v liché části válce, získáme lichou část hranolu. Liché části, které jsou součástí obou těles, zvýrazníme (průnik je částečný). Na části hraniční kružnice podstavy, která není v liché části, zvolíme body, které budou hrát roli vrcholů. Jeden z nich přitom zvolíme v bodě dotyku tečny kružnice rovnoběžné s přímkou p_1^λ (viz dále vrchol $4 = 12$) a další v bodě dotyku kružnice a úsečky, která je součástí zdánlivého půdorysu válce (viz dále vrchol $3 = 13$). Podstavy očíslujeme.



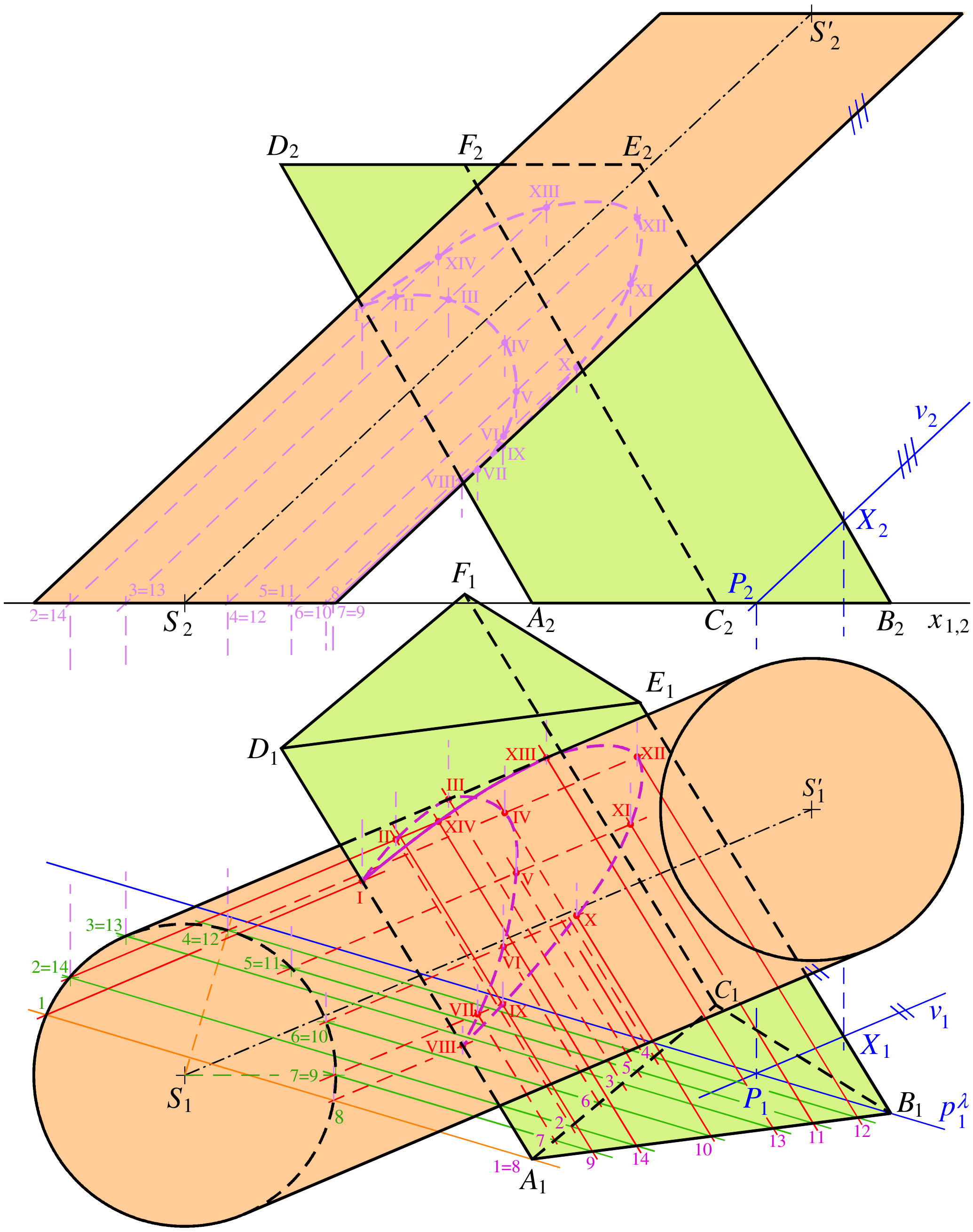
Průniku se účastní dvě ze tří bočních stěn hranolu, sestrojujeme tedy řezy válce dvěma rovinami. Jelikož řezem válcové plochy rovinou, která není kolmá k ose plochy ani není s osou rovnoběžná, je elipsa, sestrojujeme místo lomené čáry části dvou elips. Obě části mají přitom společné koncové body.

Sestrojíme půdorysy řezů hranolu a válce proloženými rovinami. Určíme půdorysy průsečíků bočních hran hranolu s pláštěm válce a půdorysy průsečíků povrchových přímek válce se stěnami hranolu. Získáme půdorysy částí dvou elips, kterými jsou opět části dvou elips. Určíme jejich viditelnost.

Poznamenejme, že i když „vrcholy“ kruhu volíme po jeho obvodu rovnoměrně, může se stát, že většina průsečíků bude přináležet jedné elipse a u druhé budeme znát např. jen dva její body. Potom je nutné v příslušné oblasti zpětně navolit ještě další „vrcholy“ a postup pro ně dodatečně zopakovat.



Pomocí ordinál sestrojíme na základnici nárysy „vrcholů“ kruhu a jimi vedeme přímky rovnoběžné s nárysem osy válce. Na nich opět pomocí ordinál sestrojíme nárysy získaných bodů elips. Spojením těchto bodů získáme nárysy hledaných částí elips, kterými jsou také části elips. Opět určíme jejich viditelnost.



Nyní zbývá vyznačit viditelnost obou těles a případně je vybarvit.