ZOBRAZENÍ TĚLES A PLOCH

ze zadaných prvků

Martina Škorpilová

Matematicko-fyzikální fakulta Univerzity Karlovy

Praha

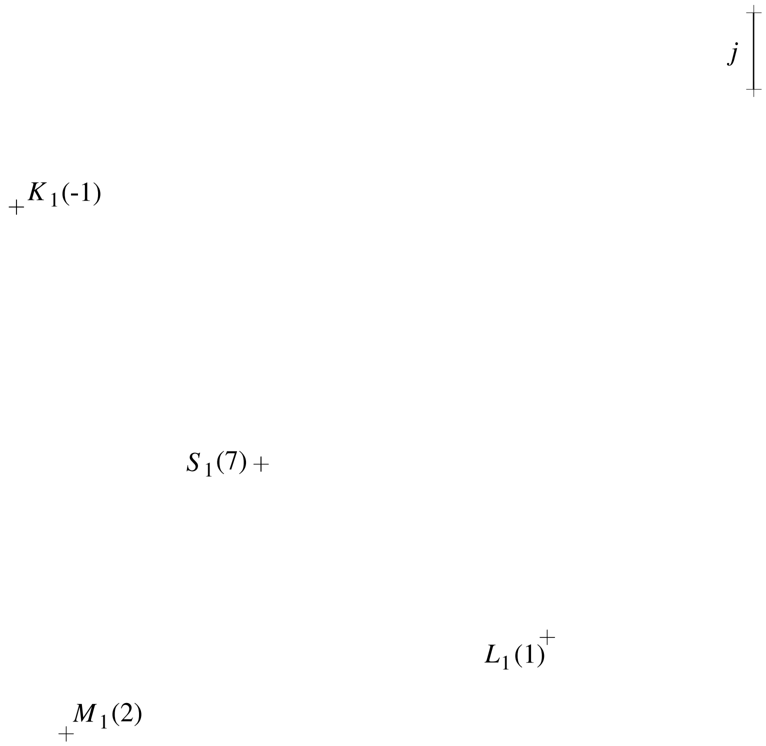
Studijní materiál je sbírkou řešených, složitějších úloh na zobrazení těles a ploch v kótovaném a v Mongeově promítání. Zobrazované útvary jsou přitom zadány tak, že před samotnými konstrukcemi je nutné nejprve vymyslet prostorové řešení problému a poté teprve přistoupit k vlastnímu rýsování. Od čtenáře se přitom předpokládá znalost kótovaného a Mongeova promítání.

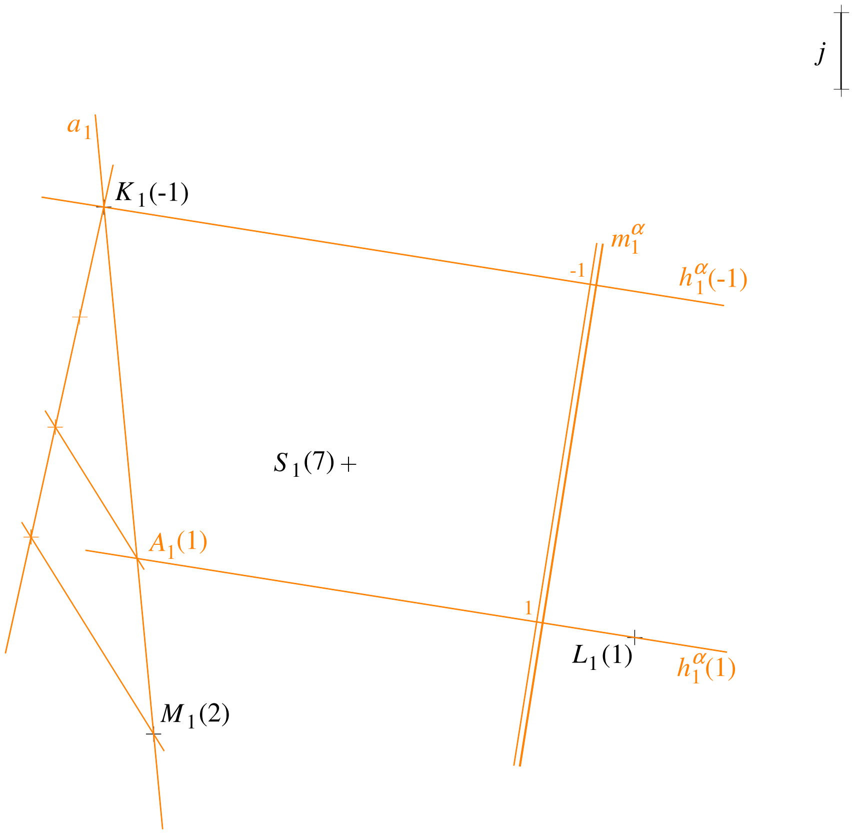
Příklady tohoto typu jsou na Matematicko-fyzikální fakultě Univerzity Karlovy řešeny v rámci předmětu *Seminář z deskriptivní geometrie I*, který je standardně vyučován pro budoucí učitele matematiky a deskriptivní geometrie v zimním semestru 2. ročníku. Tito studenti by jednotlivé, dílčí konstrukce měli zvládat z 1. ročníku, proto nejsou v textu všechny základní kroky podrobně komentovány. Popisujeme postup řešení, který je uveden na obrázku. Tím netvrdíme, že neexistuje metoda jiná.

Text by měl sloužit jednak přímo při výuce a také jako pomůcka pro domácí samostatné řešení příkladů.

U úloh, které mají být řešeny v kótovaném promítání, je vždy na příslušném obrázku zobrazena velikost využívané jednotky j.

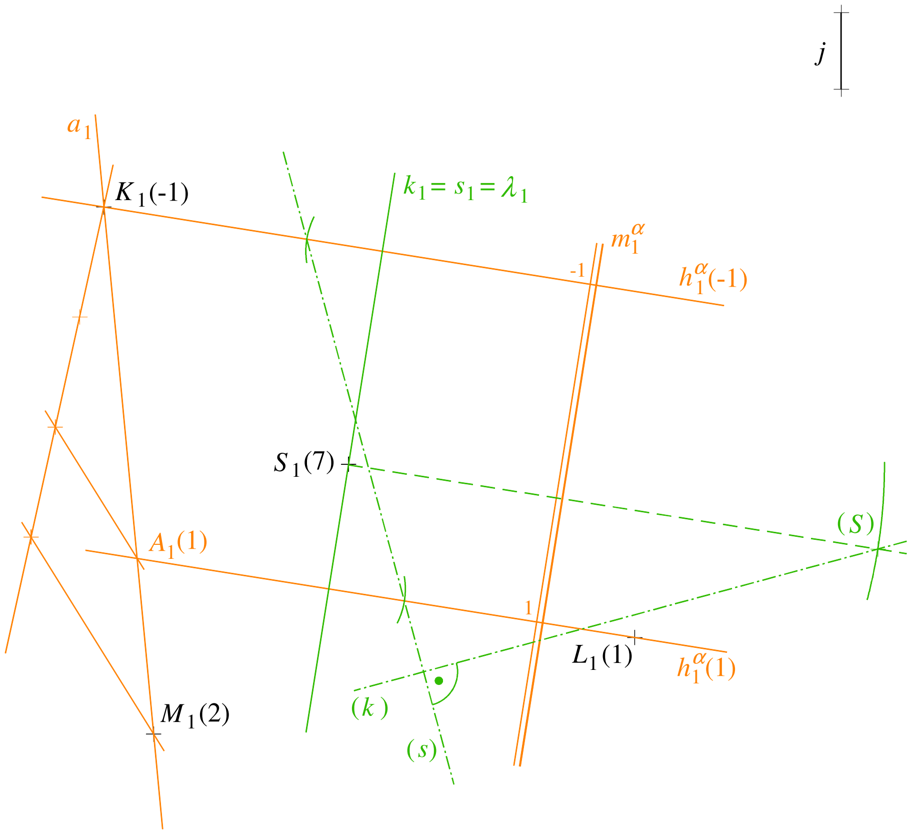
Příklad 1. V kótovaném promítání zobrazte kouli κ o středu S, která se dotýká roviny $\alpha = (KLM)$.



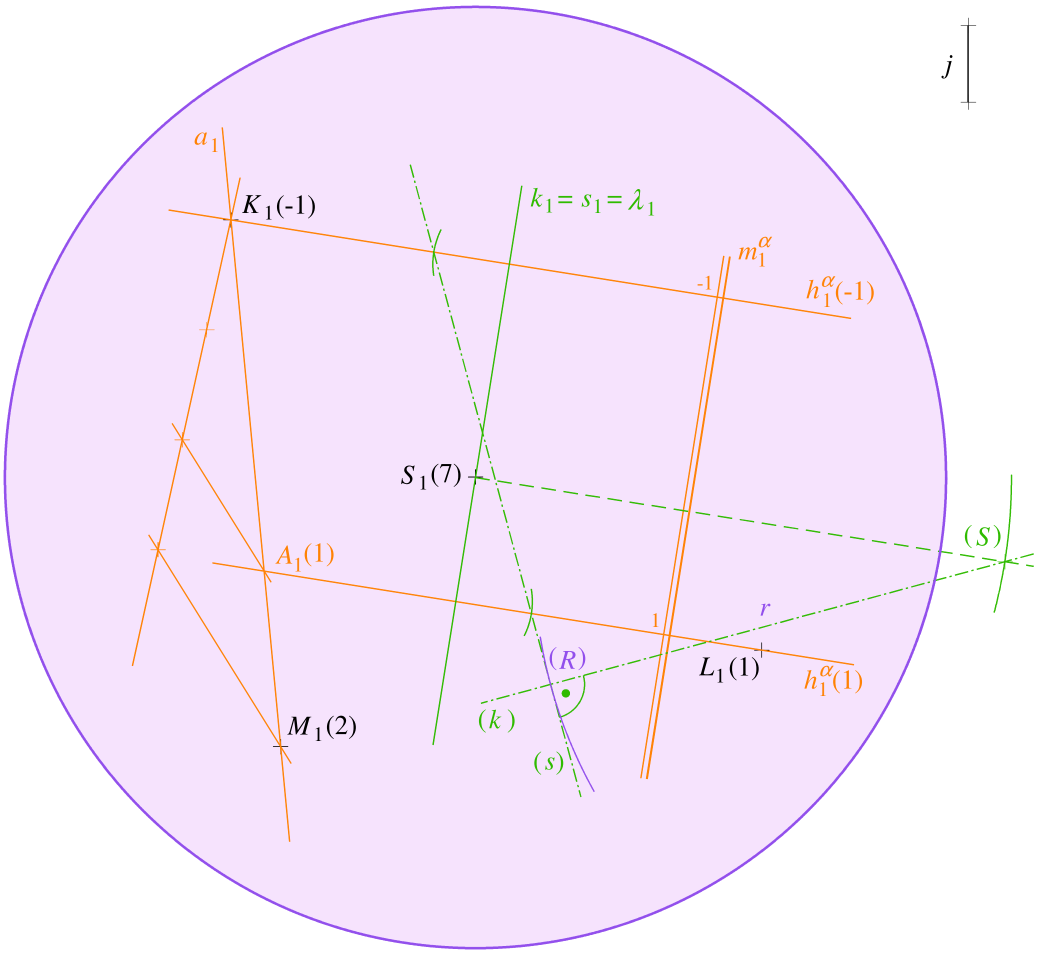


Sestrojíme kótovaný průmět $h_1^\alpha(1)$ hlavní přímky roviny α o kótě 1. Jedná se průmět přímky LA, kde A je bod přímky $a = KM$ o kótě 1.

Sestrojíme kótovaný průmět $h_1^\alpha(-1)$ hlavní přímky roviny α o kótě -1 a dále spádové měřítko m_1^α roviny α.

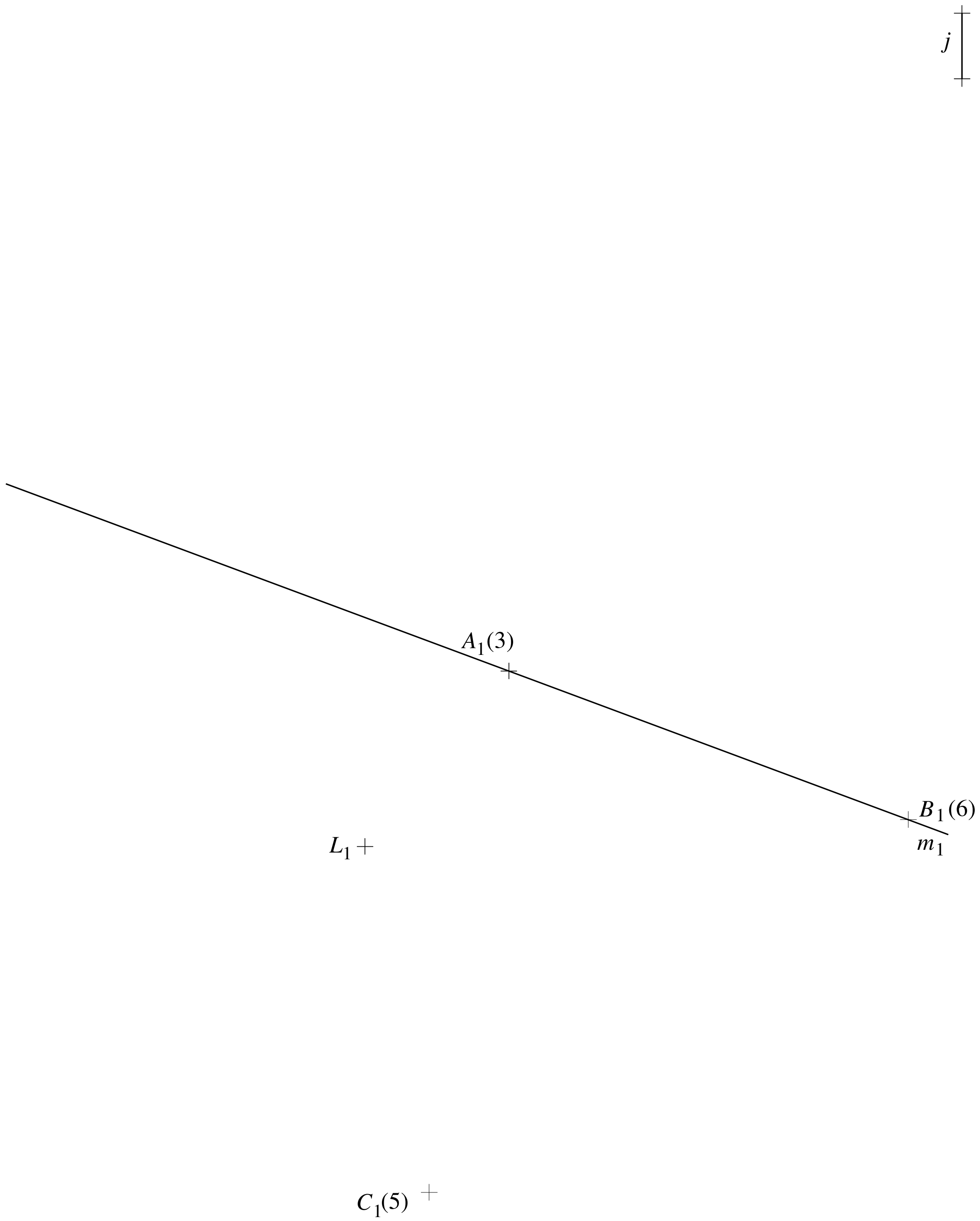


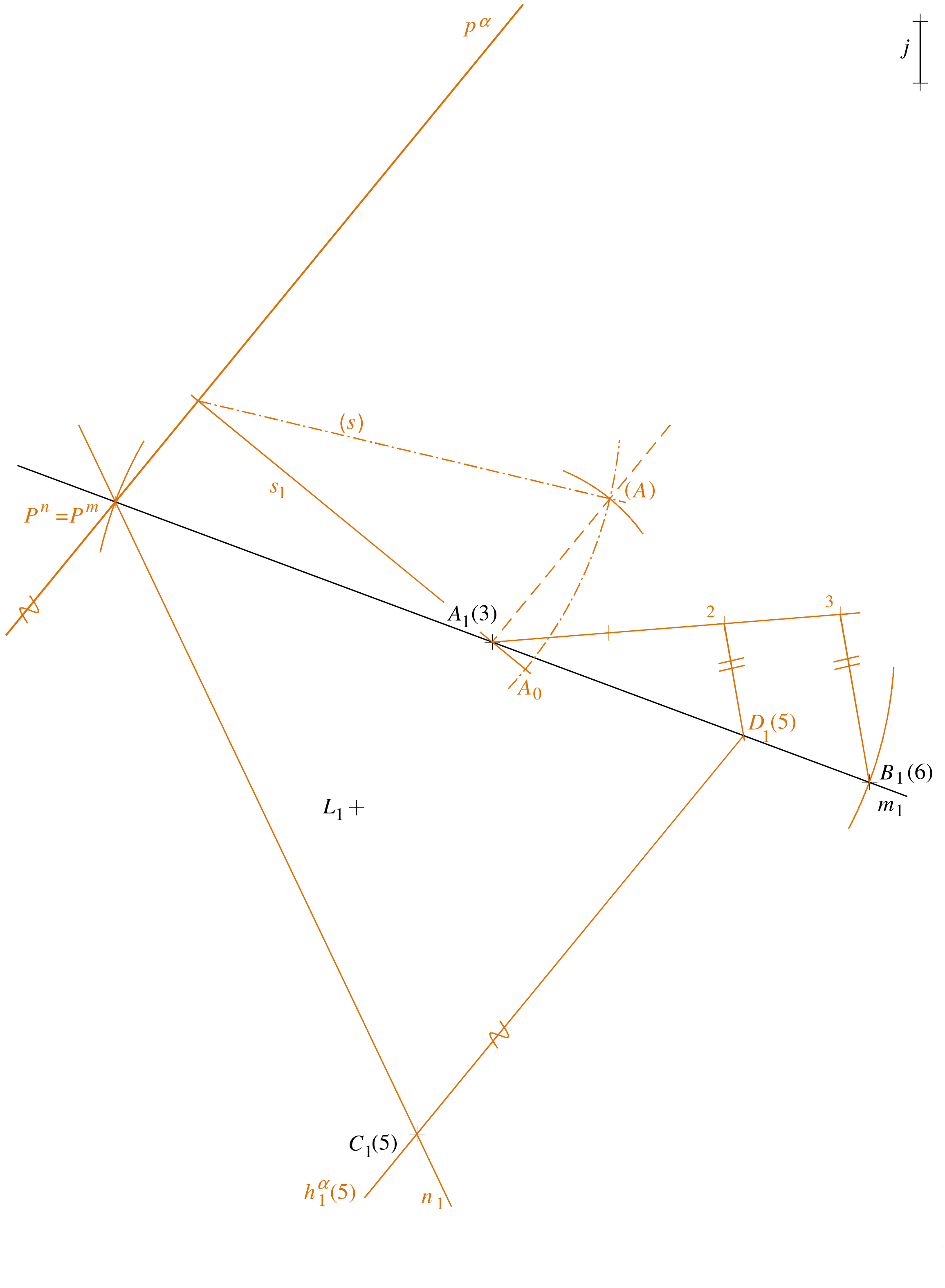
Bodem S vedeme kolmici k k rovině α. Uvažujme promítací rovinu λ, která obsahuje kolmici k. Pravoúhlý průmět k_1 kolmice k splývá s pravoúhlým průmětem λ_1 roviny λ a rovněž s pravoúhlým průmětem s_1 spádové přímky s roviny α, která leží současně v rovině λ. Přímka $k_1 = s_1 = \lambda_1$ prochází průmětem S_1 bodu S. Sklopíme promítací rovinu λ. Získáme sklopenou přímku (s) a sklopený bod (S). Jelikož jsou přímky k a s na sebe kolmé, jsou na sebe kolmé i sklopené přímky (k) a (s), přičemž přímka (k) prochází bodem (S).



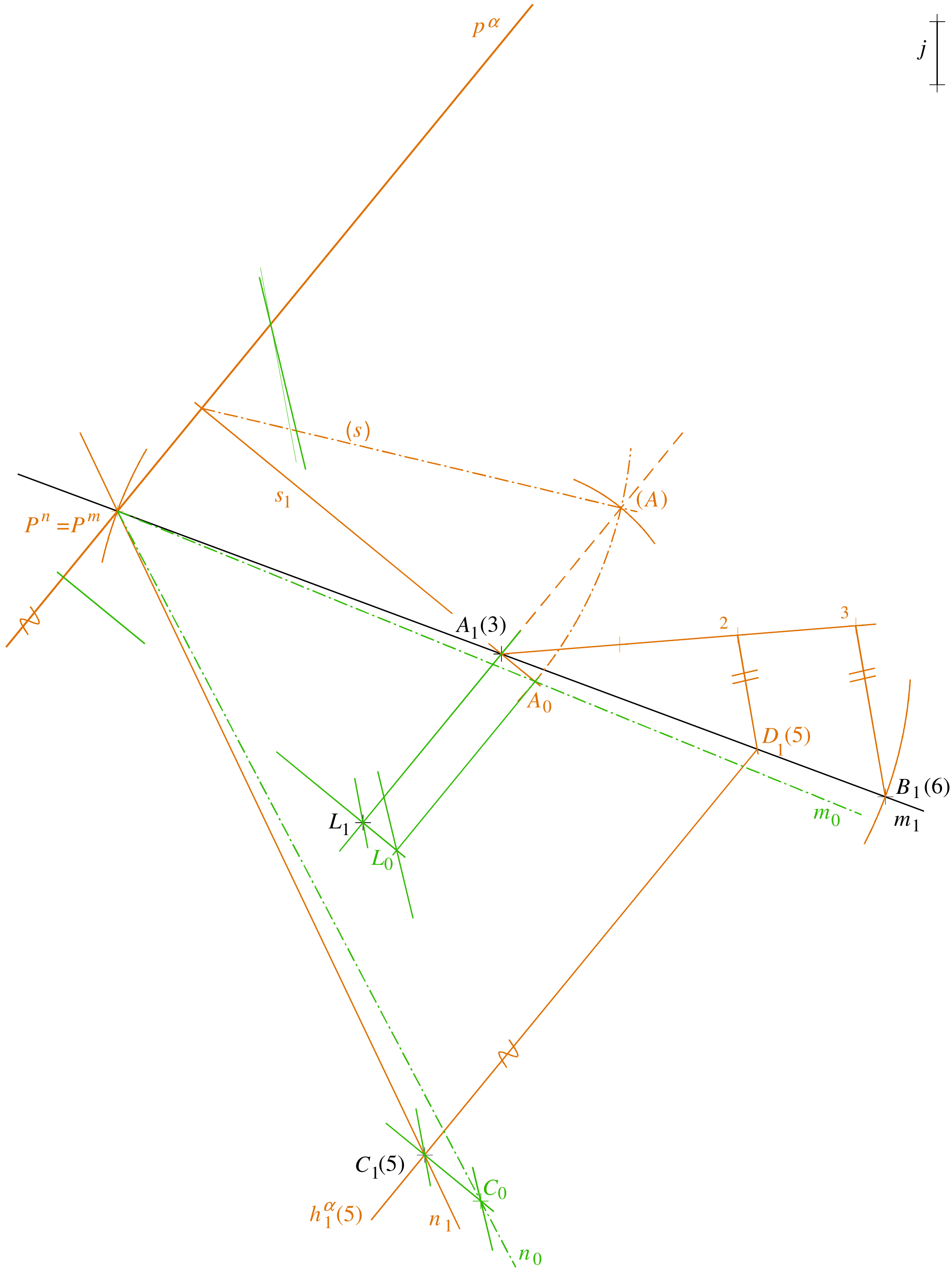
Poloměr r zobrazované kulové plochy je roven vzdálenosti bodu S od roviny α, tj. vzdálenosti bodu S od průsečíku R přímky k a roviny α. Tato vzdálenost r je rovna vzdálenosti sklopených bodů (S) a (R), kde (R) je průsečík přímek (k) a (s). Průmětem kulové plochy je kruh o středu S_1 a poloměru r.

Příklad 2. V kótovaném promítání zobrazte rovnostranný válec, víte-li, že tečnami jeho dolní kruhové podstavy jsou přímky n a $m = AB$ a hraniční kružnice této podstavy prochází bodem L. Přímka n prochází bodem C a její stopník je totožný se stopníkem přímky m. Sestrojte takové řešení, v němž má podstava největší poloměr.

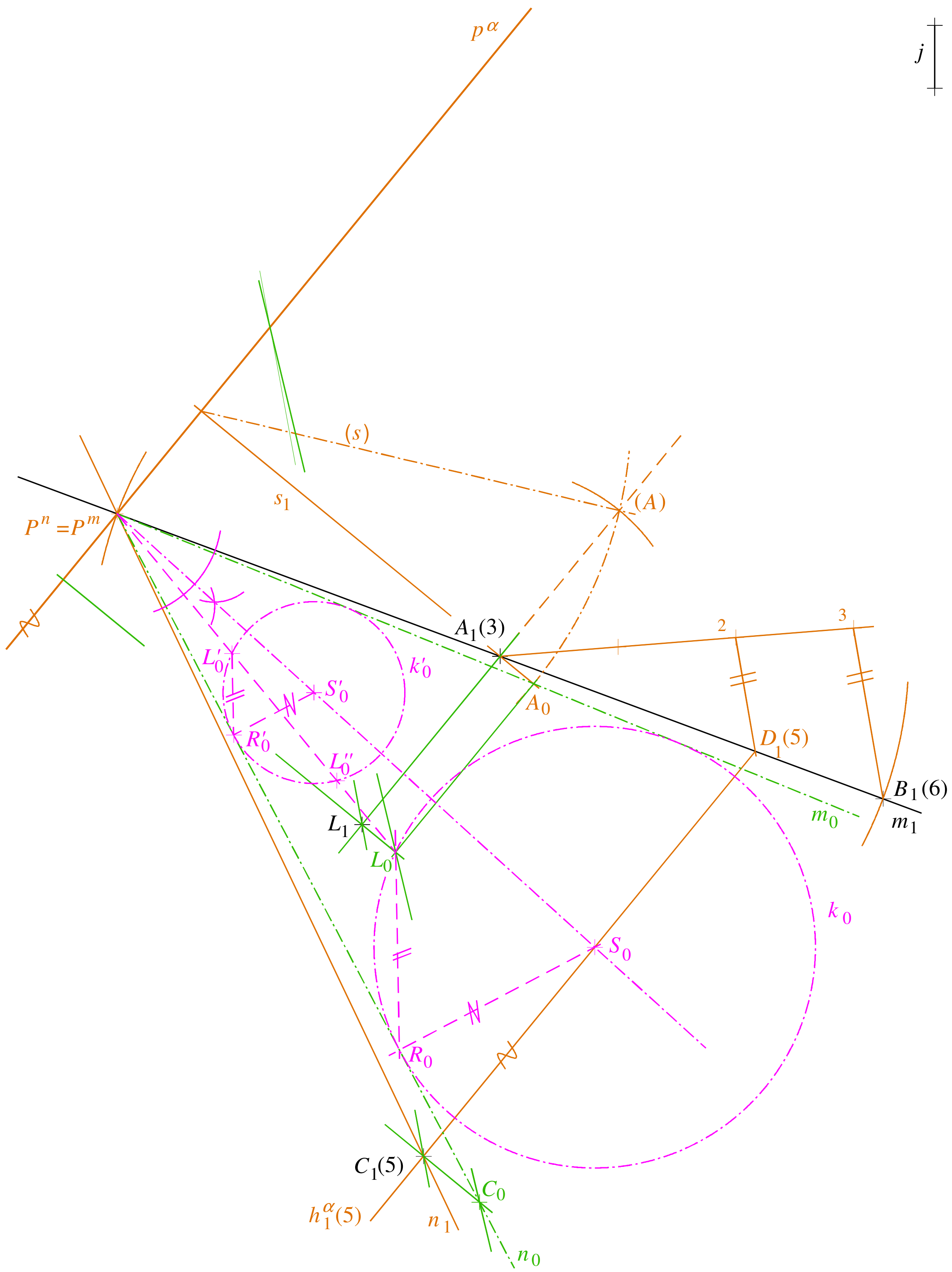




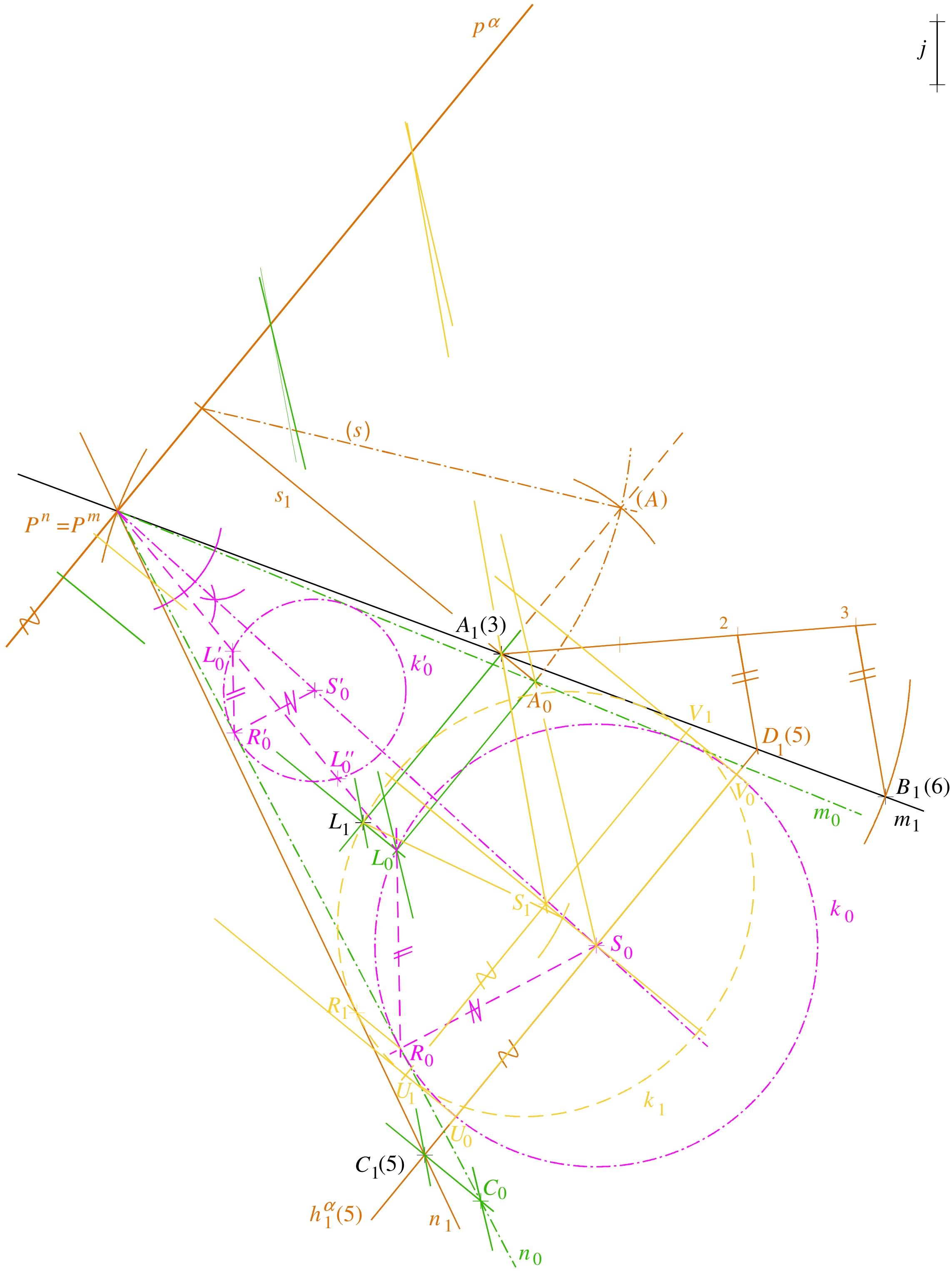
Sestrojíme stopník P^m přímky m a průmět n_1 přímky $n = CP^m = CP^n$. Rovinu α, která je určená přímkami m, n, je nutné otočit. Její stopa p^α prochází společným stopníkem $P^m = P^n$ přímek m, n a její směr je stejný jako směr dalších (průmětů) hlavních přímek roviny α, tedy i kótovaného průmětu $h_1^\alpha(5)$ hlavní přímky $h^\alpha = CD$ o kótě 5 (bod D je bodem přímky m). Sestrojíme otočený bod A_0.



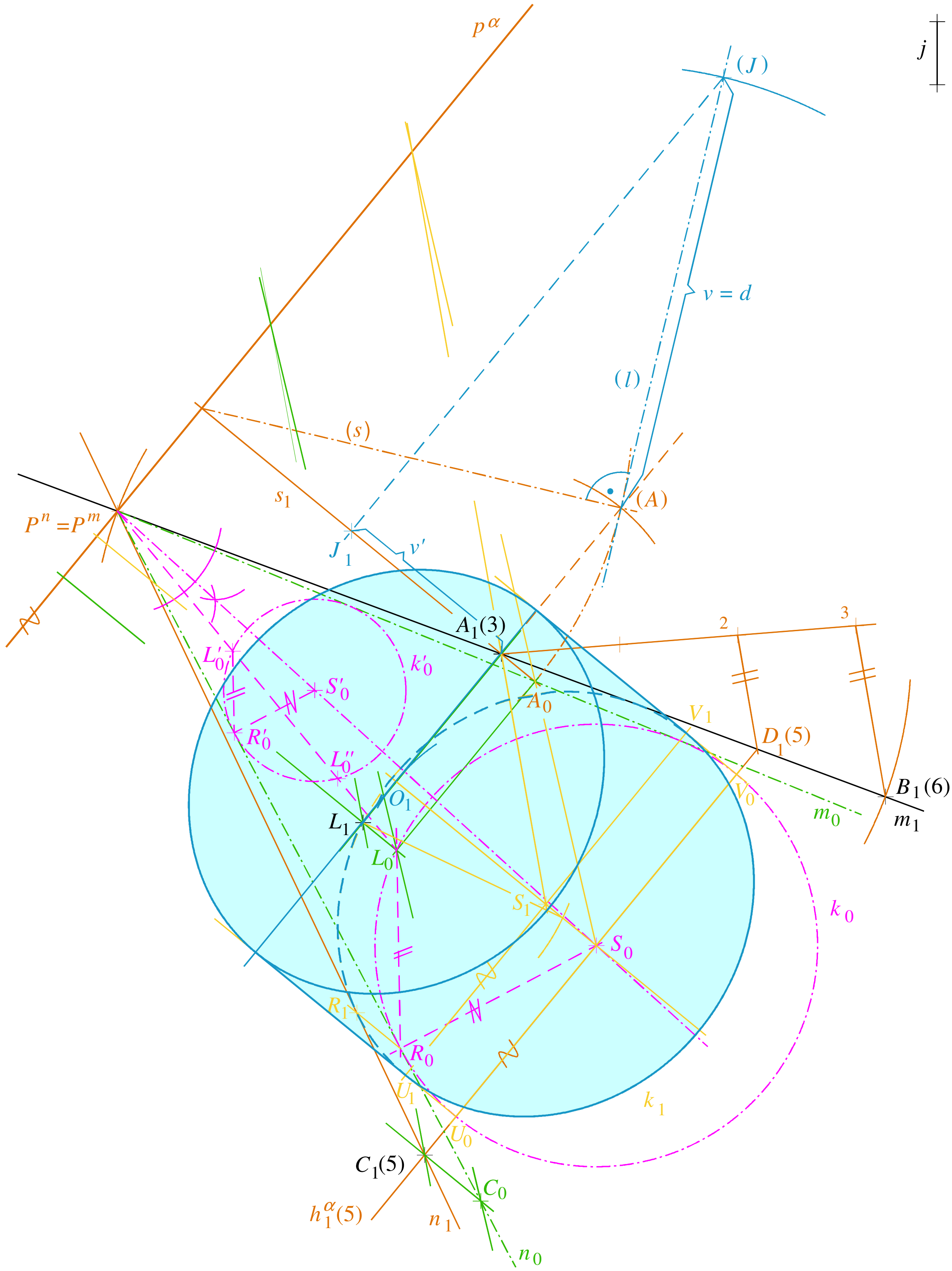
Pomocí osové afinity $\mathcal{A}$ v rovině, která je určená osou p^α a dvojicí odpovídajících si bodů A_1, A_0, získáme otočený bod L_0 a dále otočené přímky $m_0 = A_0P^m$ a $n_0 = C_0P^n$.



Chceme sestrojit kružnici k_0, která prochází bodem L_0 a dotýká se přímek m_0 a n_0. Střed S_0 kružnice k_0 leží na ose úhlu, který svírají přímky m_0, n_0 a který obsahuje bod L_0. Dále k sestrojení kružnice k_0 využijeme stejnolehlosti se středem $P^m = P^n$. Sestrojíme libovolnou kružnici k'_0 se středem S'_0 dotýkající se přímek m_0, n_0 (vzor k'_0 kružnice k_0 ve stejnolehlosti). Průsečík L'_0 přímky L_0P^m a kružnice k'_0 je vzorem bodu L_0 (druhý průsečík L''_0 by vedl na kružnici s menším poloměrem). S využitím vlastnosti stejnolehlosti (přímka a její obraz ve stejnolehlosti jsou přímky rovnoběžné) sestrojíme nejprve bod dotyku R_0 kružnice k_0 a přímky n_0, následně střed S_0 a poté kružnici k_0.



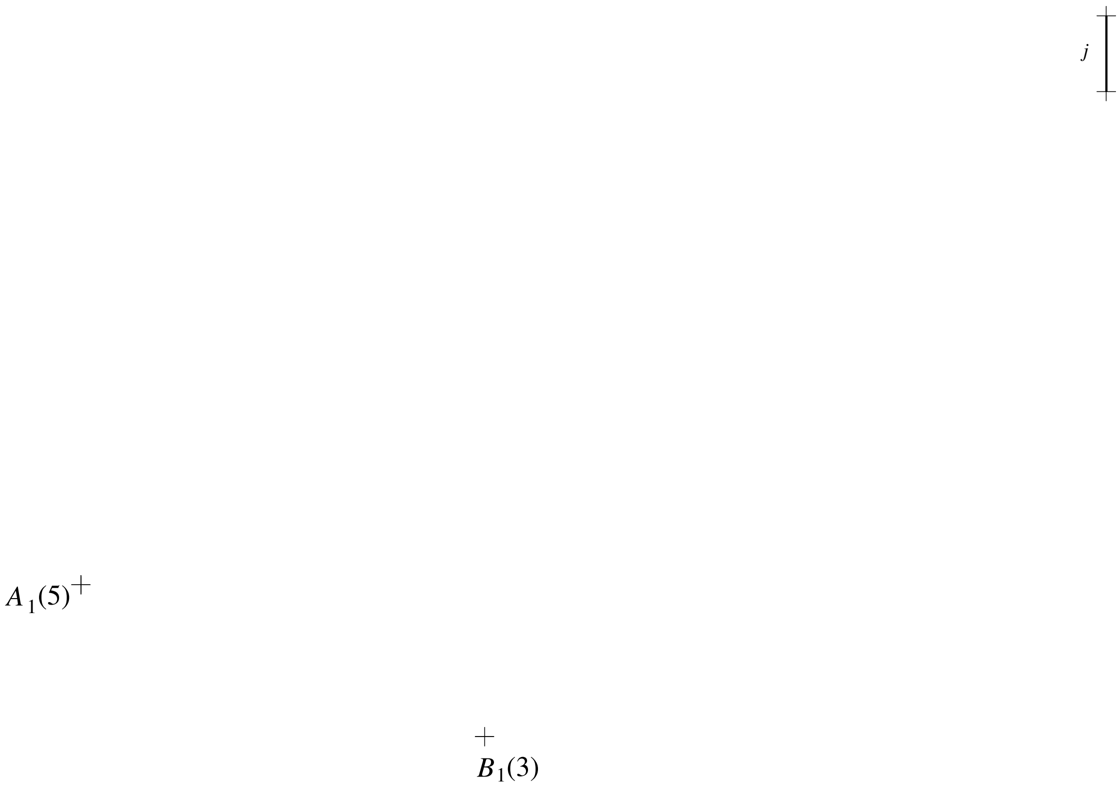
Pomocí výše zmíněné pravoúhlé afinity $\mathcal{A}$ získáme elipsu k_1, která je pravoúhlým průmětem hraniční kružnice k dolní podstavy válce. Elipsa k_1 v afinitě $\mathcal{A}$ odpovídá kružnici k_0. Konkrétně sestrojíme hlavní vrcholy U_1, V_1 elipsy k_1 odpovídající krajním bodům U_0, V_0 průměru kružnice k_0, který je rovnoběžný s osou p^α afinity. Vedlejší vrcholy elipsy sestrojíme pomocí rozdílové proužkové konstrukce (využijeme zadaný bod L_1, nebo průmět R_1 bodu dotyku R kružnice k a přímky n, který získáme opět pomocí afinity $\mathcal{A}$).

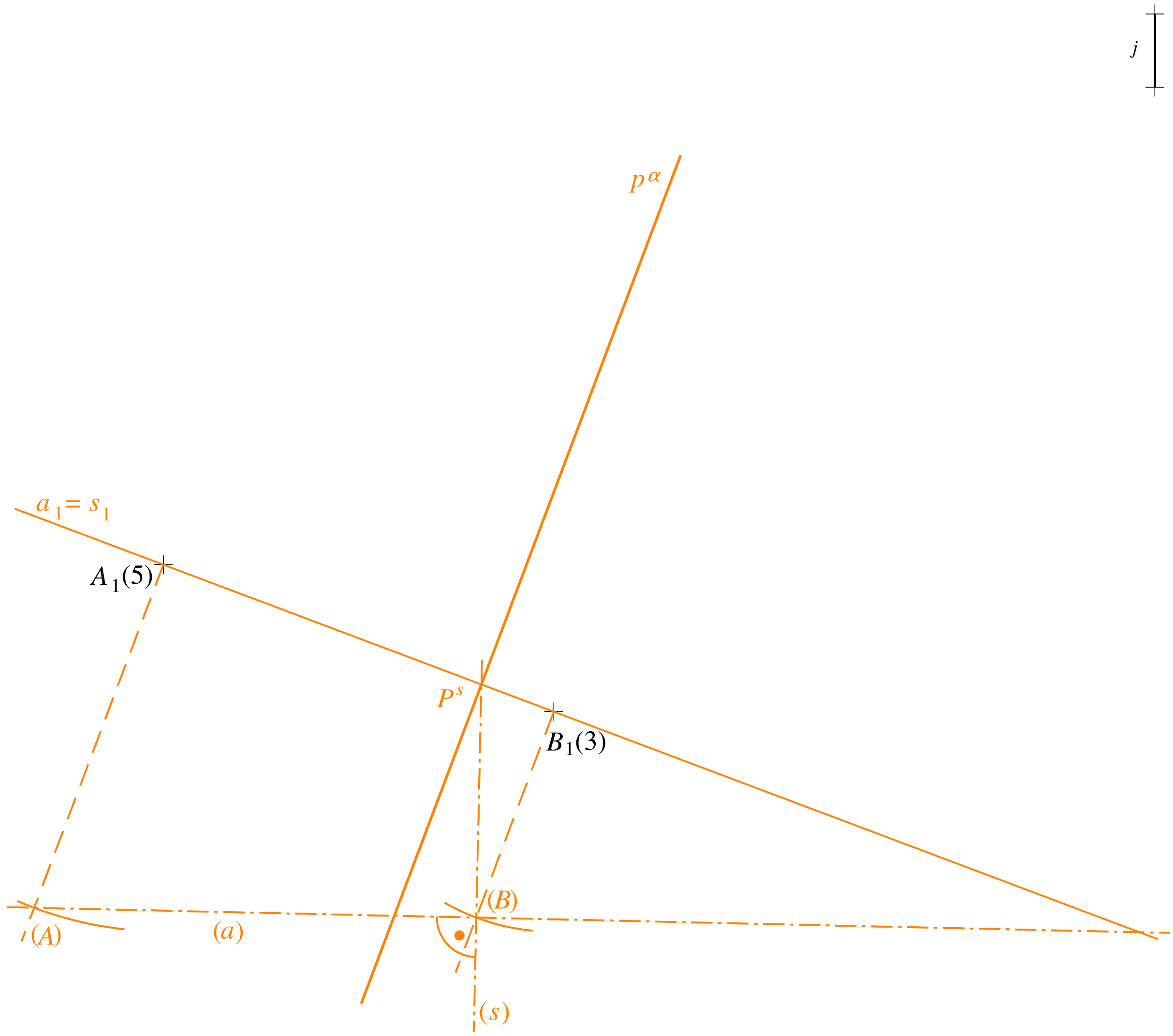


Válec je rovnostranný, proto je jeho výška v rovna průměru d kružnice k. Elipsu, která je průmětem hraniční kružnice horní podstavy válce, získáme posunutím elipsy k_1 ve směru kolmém ke stopě p^{α} roviny α, a to o délku v' průmětu úsečky mající délku $v = d$ a ležící na některé z kolmic k rovině α. K nalezení délky v' využijeme kolmici l procházející bodem A. Kolmice l a spádová přímka s roviny α procházející bodem A jsou kolmé přímky, proto jsou kolmé i sklopené přímky (l) a (s) procházející bodem (A). Nanesením délky $v = d$ od bodu (A) na přímku (l) získáme bod (J) a poté bod J_1. Délka v' je rovna délce úsečky A_1J_1.

Spojením hlavních vrcholů obou elips dourčíme zdánlivý obrys tělesa a následně rozhodneme o viditelnosti podstav válce.

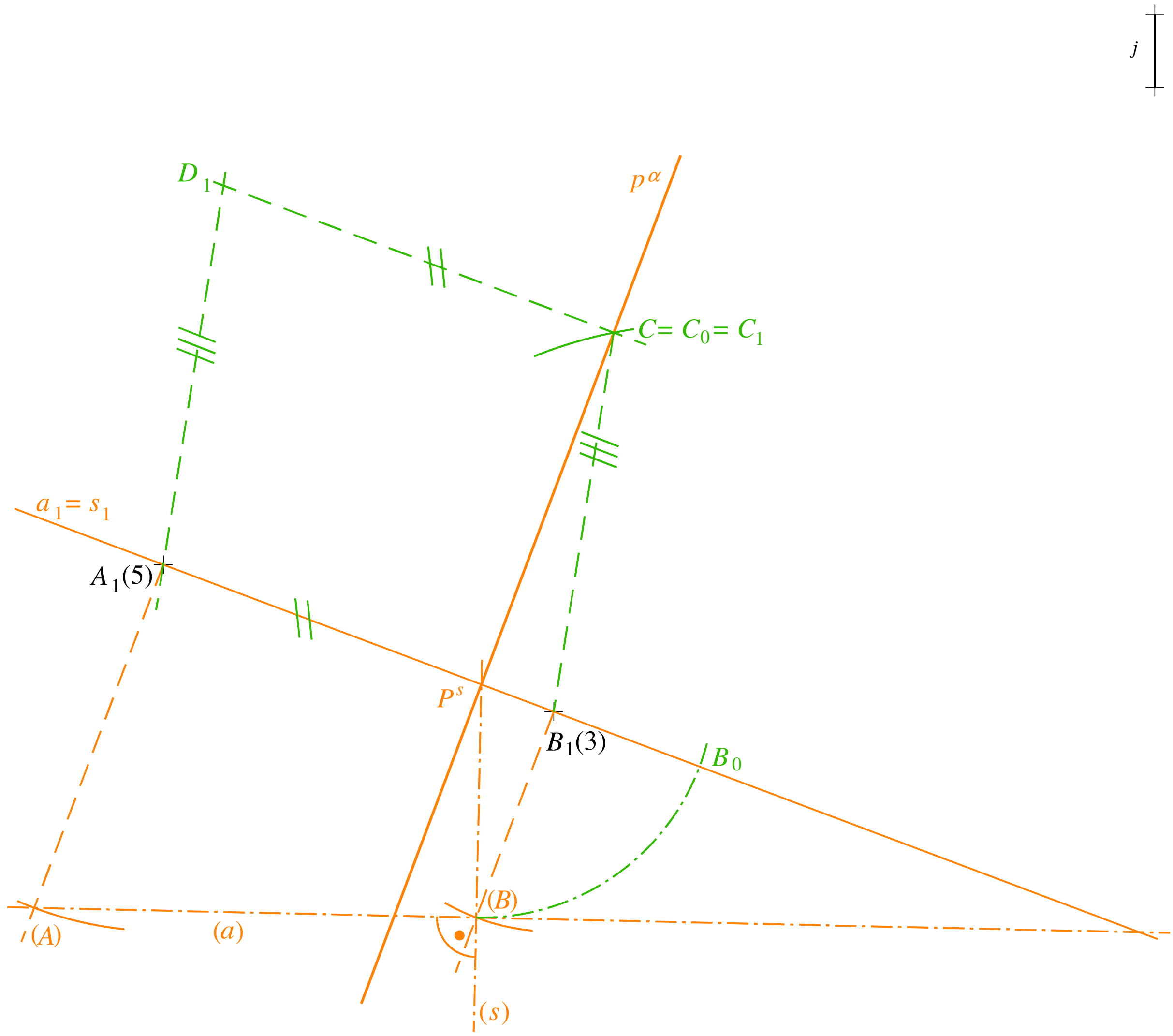
Příklad 3. V kótovaném promítání zobrazte krychli $ABCDEFGH$, znáte-li její hranu AB a víte-li, že bod C leží v průmětně π. Sestrojte takové řešení, aby $y^c < y^B$ a $z^E > z^A$.





Rovinu, v níž leží stěna $BCFG$ zobrazované krychle, označme α. Jelikož bod C leží v rovině α a současně v průmětně π, musí bod $C_1 = C$ ležet na stopě p^{α} roviny α.

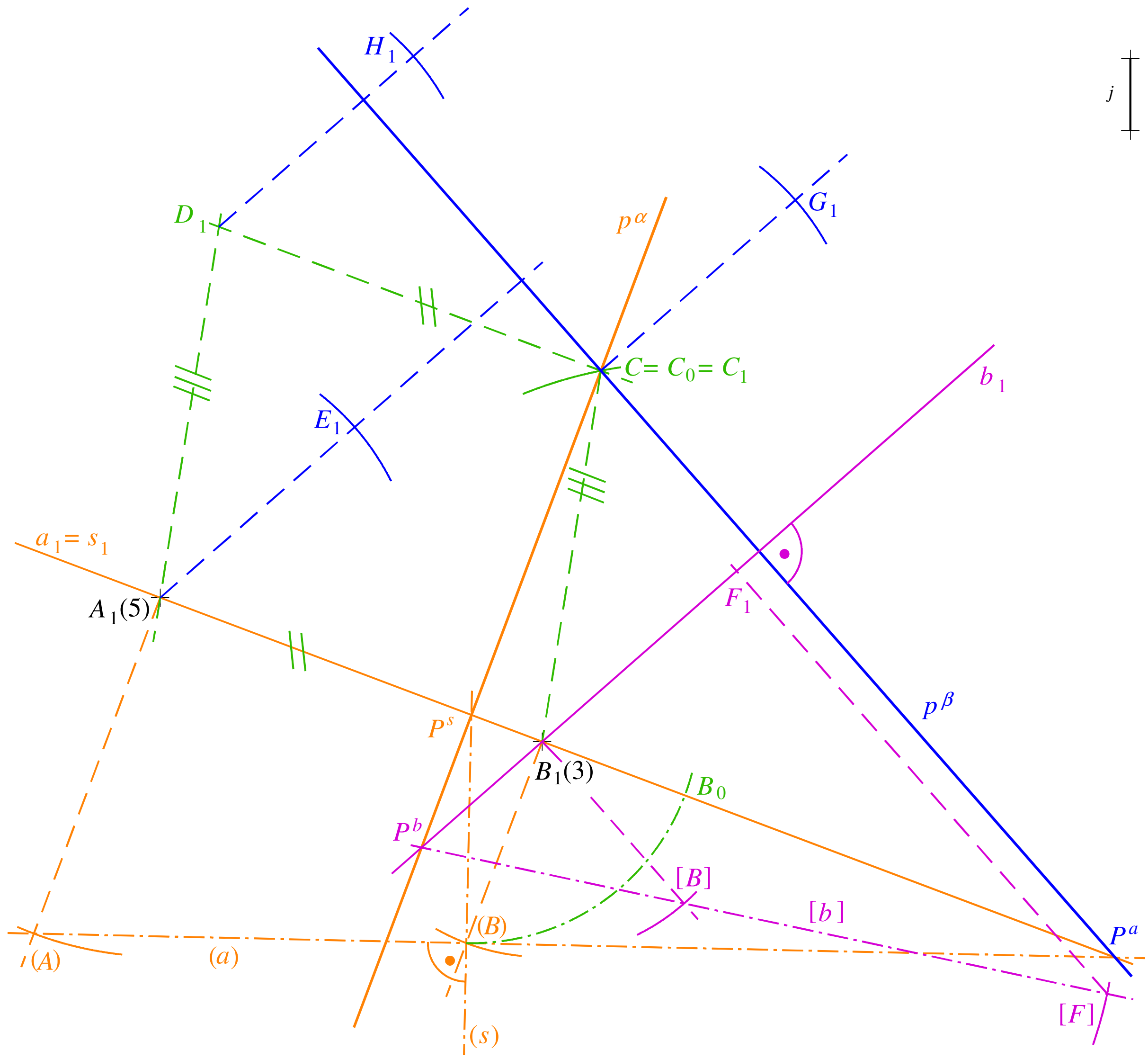
Rovina α prochází bodem B a je kolmá na přímku $a = AB$. Proto i spádová přímka s roviny α procházející bodem B je kolmá na přímku a a platí $a_1 = s_1$. Sestrojíme tedy sklopenou přímku $(a) = (A)(B)$, bodem (B) vedeme kolmici (s) na přímku (a) a průsečík přímek s_1 a (s) je stopník P^s přímky s. Bodem P^s prochází stopa p^{α} roviny α, která je kolmá na pravoúhlý průmět a_1 přímky a.



Bod C leží na stopě p^α roviny α a jeho vzdálenost od bodu B je rovna délce hrany krychle, tj. délce $|(A)(B)|$ úsečky AB.

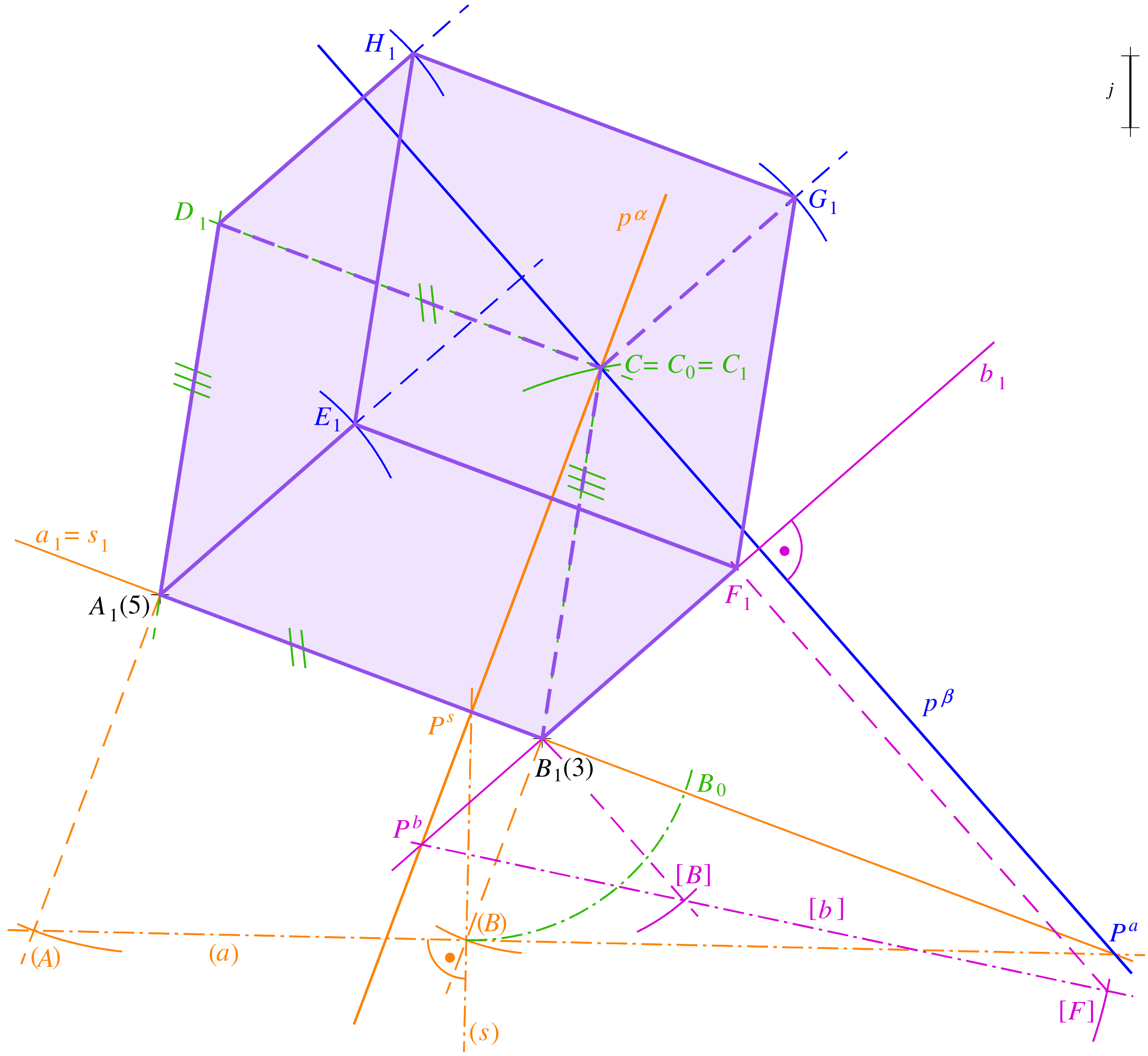
Otočíme rovinu α a získáme otočený bod B_0. Sestrojíme kružnici o středu B_0 a poloměru $|(A)(B)|$. Průsečík této kružnice se stopou p^α roviny α je bod $C = C_0 = C_1$ (ze dvou existujících průsečíků přitom vybereme takový, aby platilo $y^c < y^B$).

Sestrojíme rovnoběžník $A_1B_1C_1D_1$, který je pravoúhlým průmětem čtverce $ABCD$.



Rovinu obsahující stěnu $ABCD$ krychle označme β. Chceme sestrojit průměty hran AE, BF, CG a DH krychle. Hrany leží na přímkách, které jsou kolmé na rovinu β a procházejí body A, B, C, D. Průměty těchto přímek jsou kolmice na stopu p^β roviny β jdoucí body A_1, B_1, C_1, D_1. Nejprve proto sestrojíme stopu p^β roviny β, což je spojnice bodu $C = C_1$ a stopníku P^a přímky a, a poté k ní vedeme zmíněné průměty kolmic.

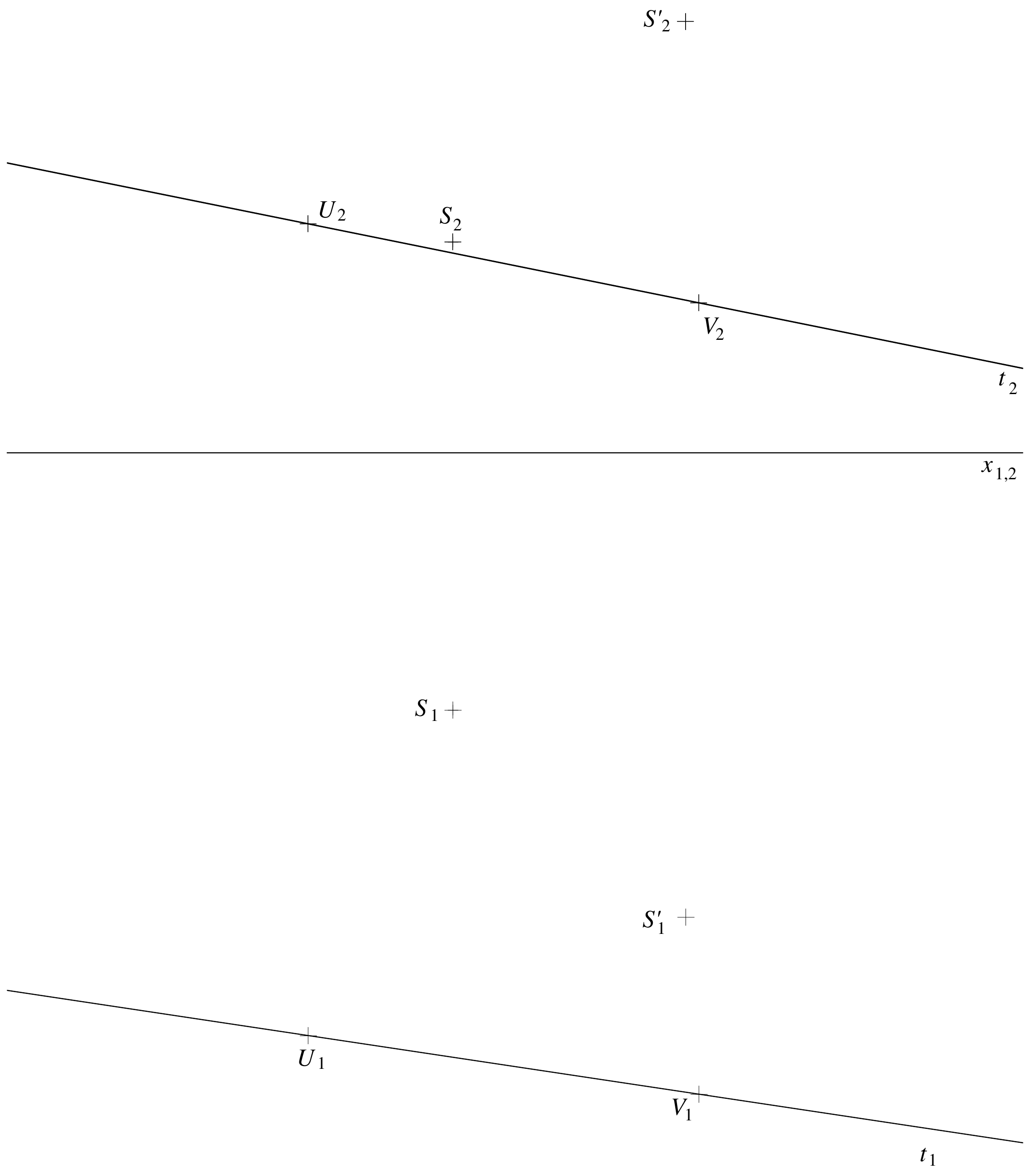
Kolmici jdoucí bodem B označíme b a sklopíme její promítací rovinu. Na sklopenou přímku $[b] = P^b[B]$, kde P^b je stopník přímky b, naneseme délku hrany $|(A)(B)|$ krychle tak, aby $z^F > z^B$ (tedy i $z^E > z^A$). Získáme bod $[F]$ a následně bod F_1.

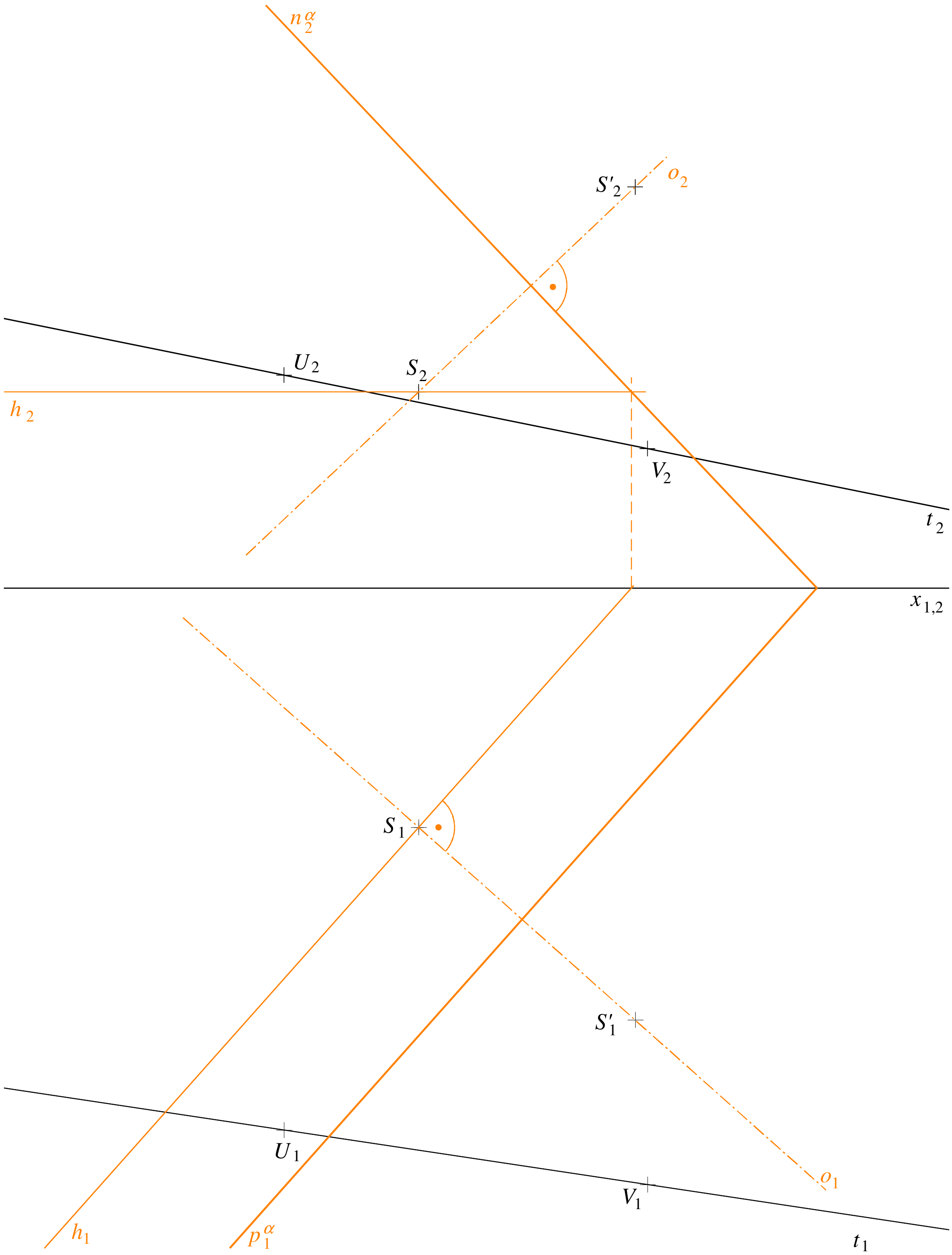


Sestrojíme pravoúhlé průměty E_1, G_1 a H_1 vrcholů E, G a H krychle tak, aby platilo $|B_1F_1| = |A_1E_1| = |C_1G_1| = |D_1H_1|$ (tak, aby rovnoběžník $E_1F_1G_1H_1$ byl obrazem rovnoběžníku $A_1B_1C_1D_1$ v posunutí o vektor B_1F_1).

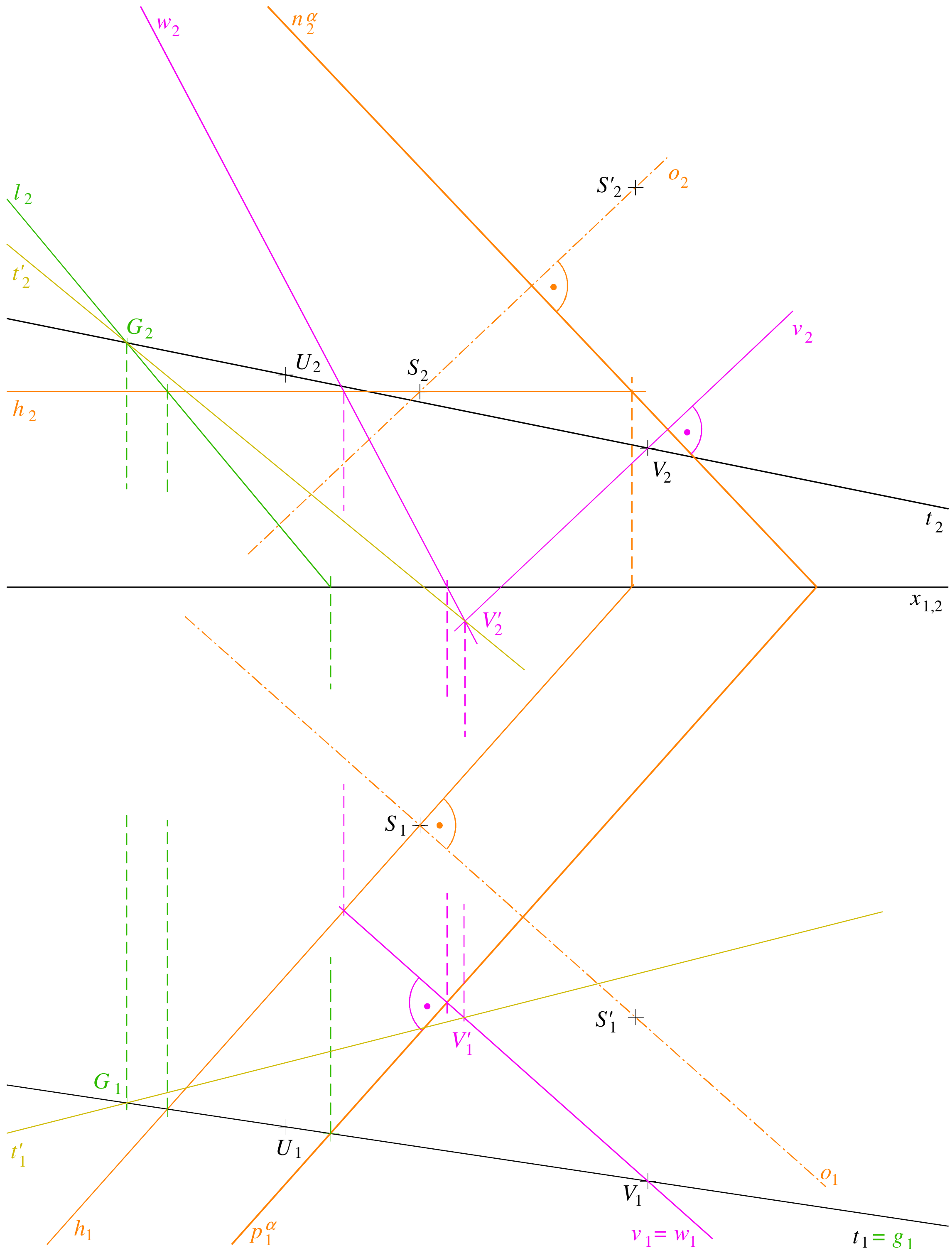
Nakonec určíme viditelnost hran krychle.

Příklad 4. V Mongeově promítání zobrazte rotační válec, znáte-li středy S a S' obou podstav a víte-li, že přímka $t = UV$ se dotýká pláště válce. Určete rovněž bod dotyku T přímky t a pláště válce.

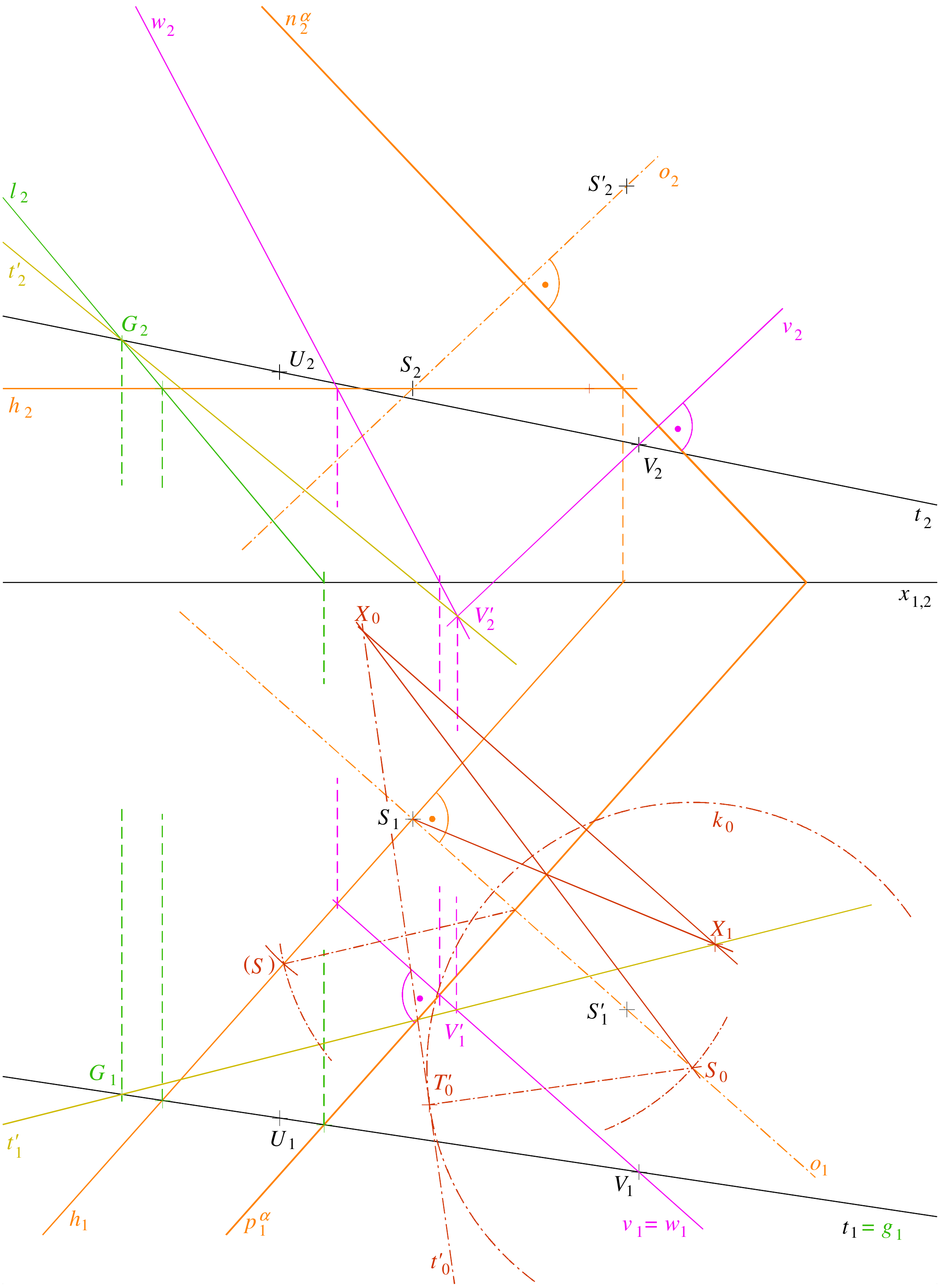




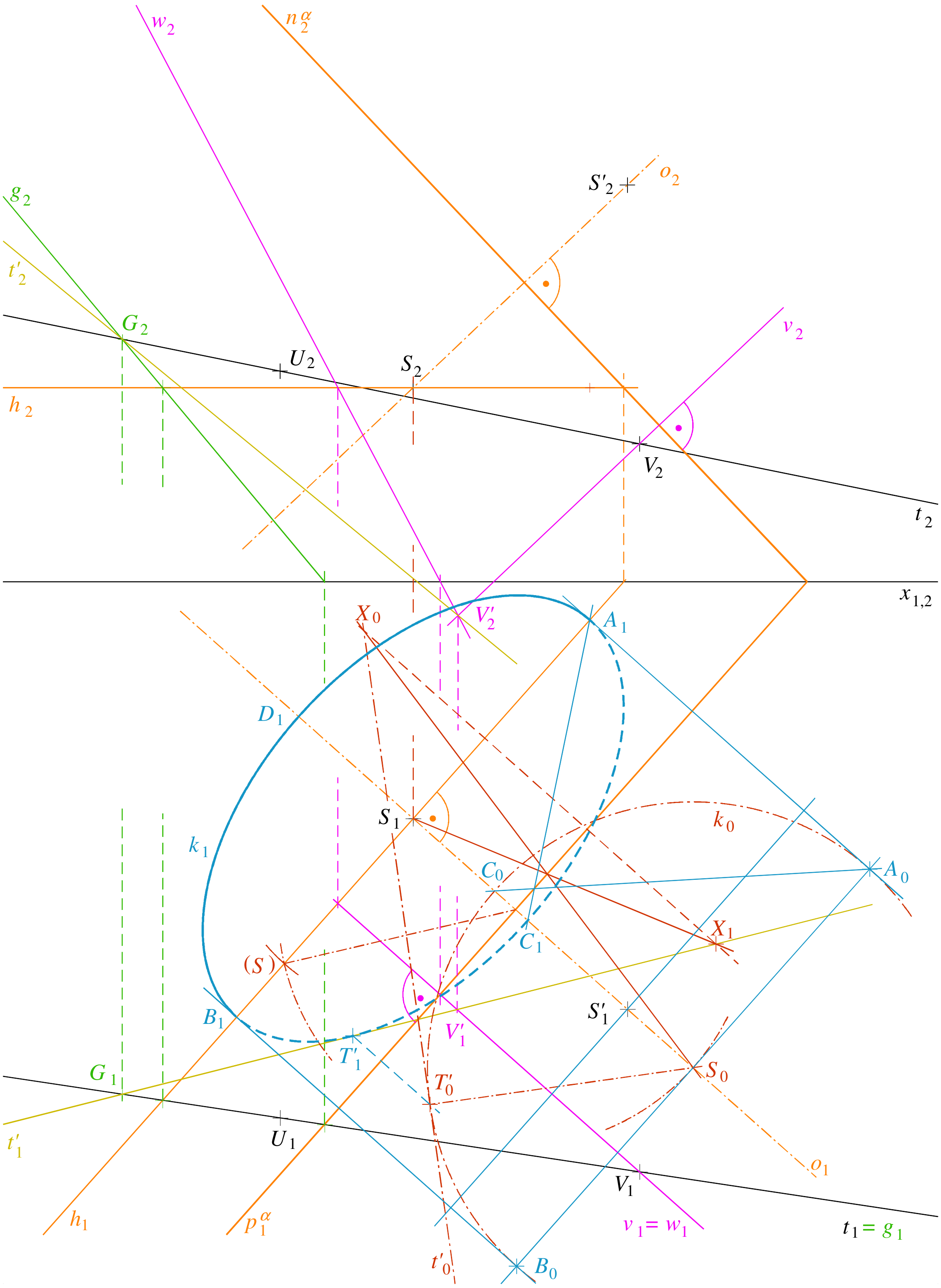
Zobrazíme osu $o = SS'$ válce a poté bodem S vedeme rovinu α na ni kolmou (rovina α je rovinou podstavy válce o středu S).



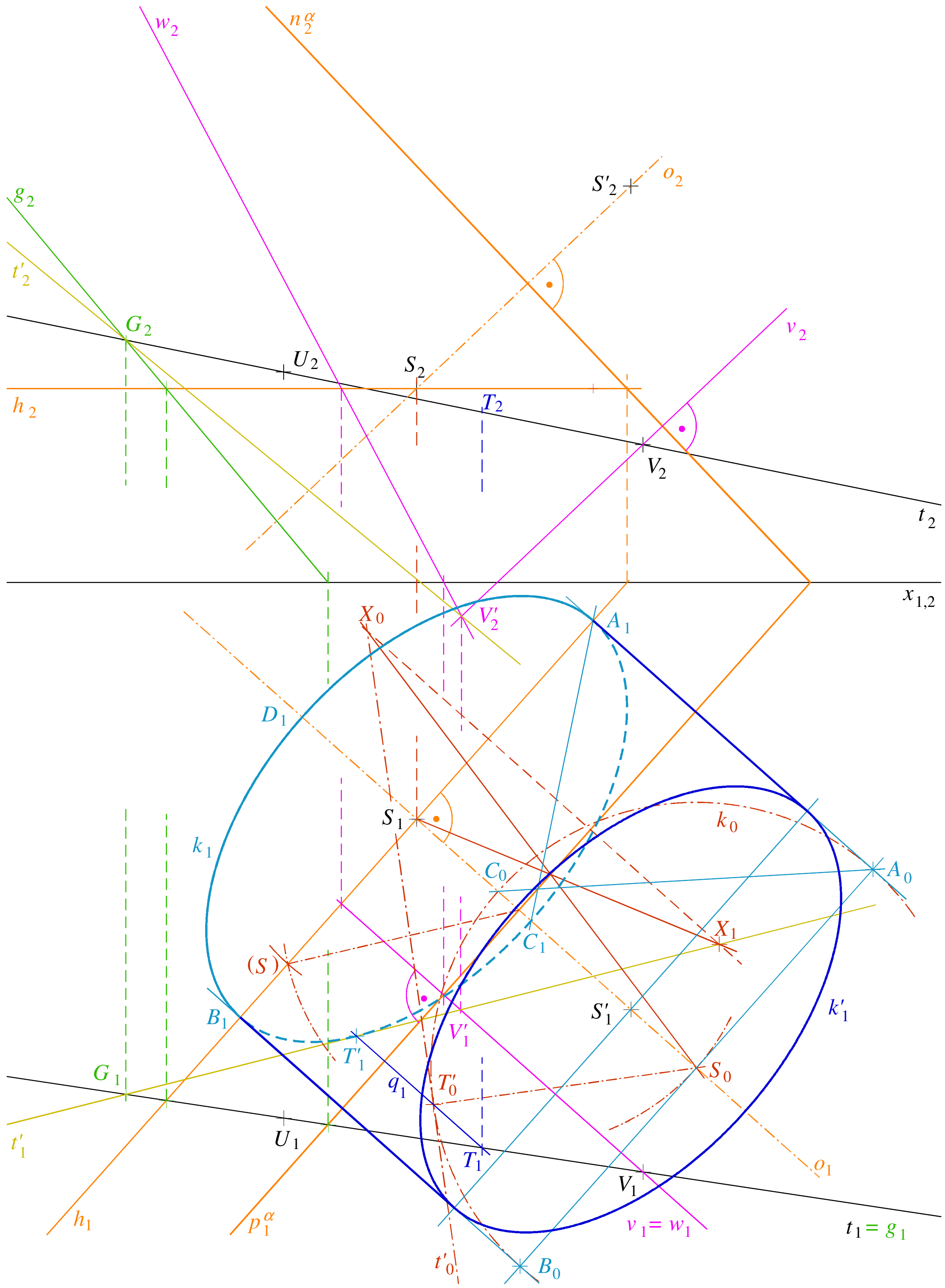
Přímku t pravoúhle promítneme do roviny α. Tento průmět t' je tečnou hraniční kružnice k podstavy válce o středu S. Přímku t' určíme body G a V', kde G je průsečík přímky t s rovinou α (bod G zobrazíme pomocí krycích přímek t a g; $t_1 = g_1$) a V' je průsečík kolmice v vedené bodem V na rovinu α s touto rovinou (bod V zobrazíme pomocí krycích přímek v a w; $v_1 = w_1$).



Rovinu α otočíme kolem její půdorysné stopy do půdorysny. Sestrojíme otočený bod S_0 a poté pomocí afinity $\mathcal{A}$ s osou p_1^α a dvojicí odpovídajících si bodů S_1, S_0 sestrojíme rovněž otočenou přímku t_0'. Dále sestrojíme kružnici k_0 o středu S_0 dotýkající se přímky t_0'. Bod dotyku kružnice k_0 a přímky t_0' označme T_0'.

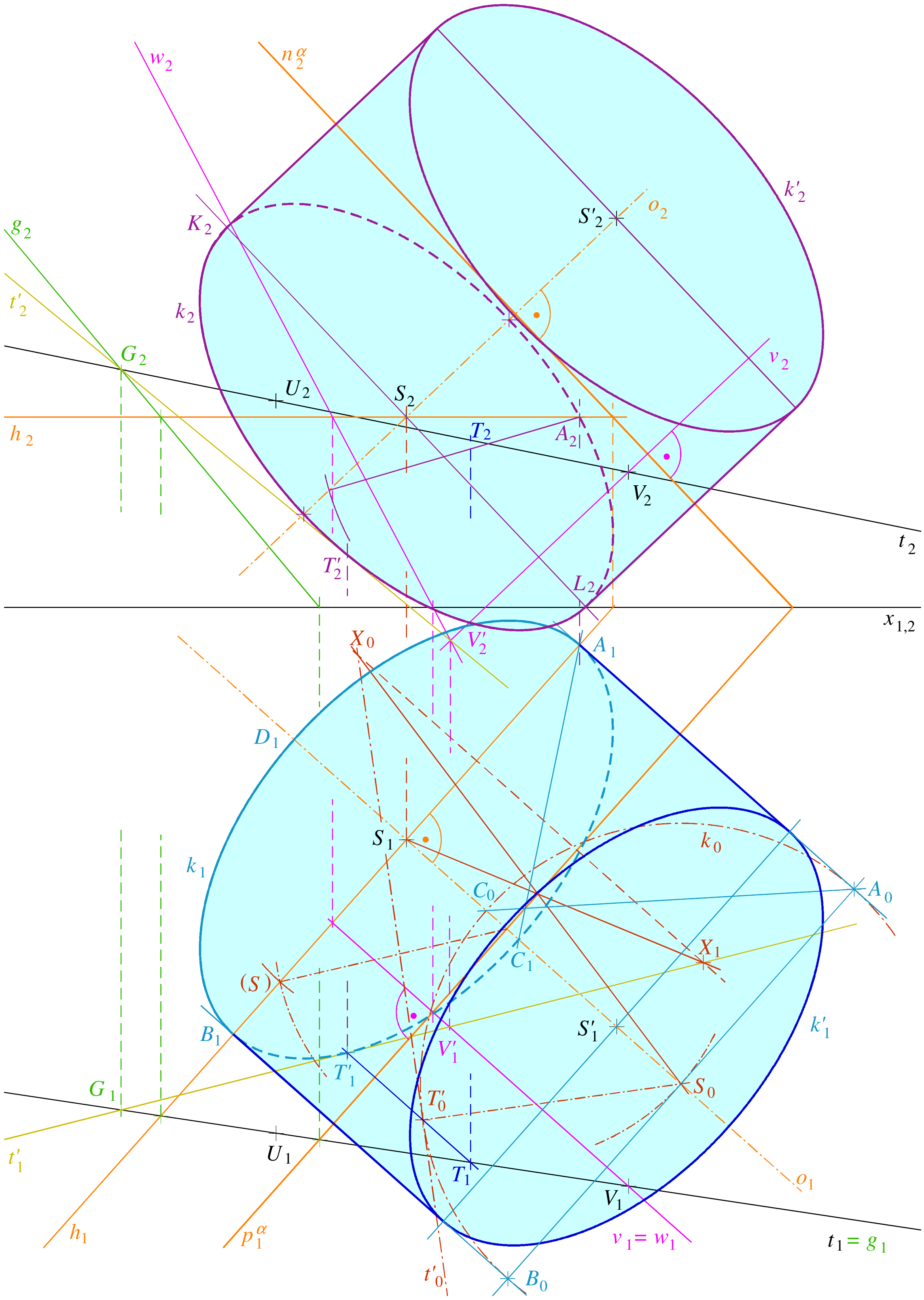


Sestrojíme půdorys k_1 hraniční kružnice k podstavy válce o středu S. Půdorysem k_1 je elipsa o středu S_1, která je vzorem kružnice k_0 ve výše uvedené afinitě $\mathcal{A}$. Hlavní osa A_1B_1 elipsy k_1 je vzorem průměru A_0B_0 kružnice k_0 rovnoběžného s osou p_1^{α} afinity $\mathcal{A}$, vedlejší osa C_1D_1 elipsy k_1 je vzorem průměru C_0D_0 kružnice k_0 kolmého na osu p_1^{α} afinity $\mathcal{A}$. Bod dotyku T'_1 elipsy k_1 a přímky t'_1 je vzorem bodu T'_0.



Bod dotyku T přímky t a pláště válce je průsečík přímky t a kolmice q vedené bodem T' na rovinu α. Půdorys T_1 bodu T je tedy průsečíkem půdorysu t_1 přímky t a půdorysu q_1 kolmice q. Nárys T_2 bodu T leží na přímce t_2 a na příslušné ordinále.

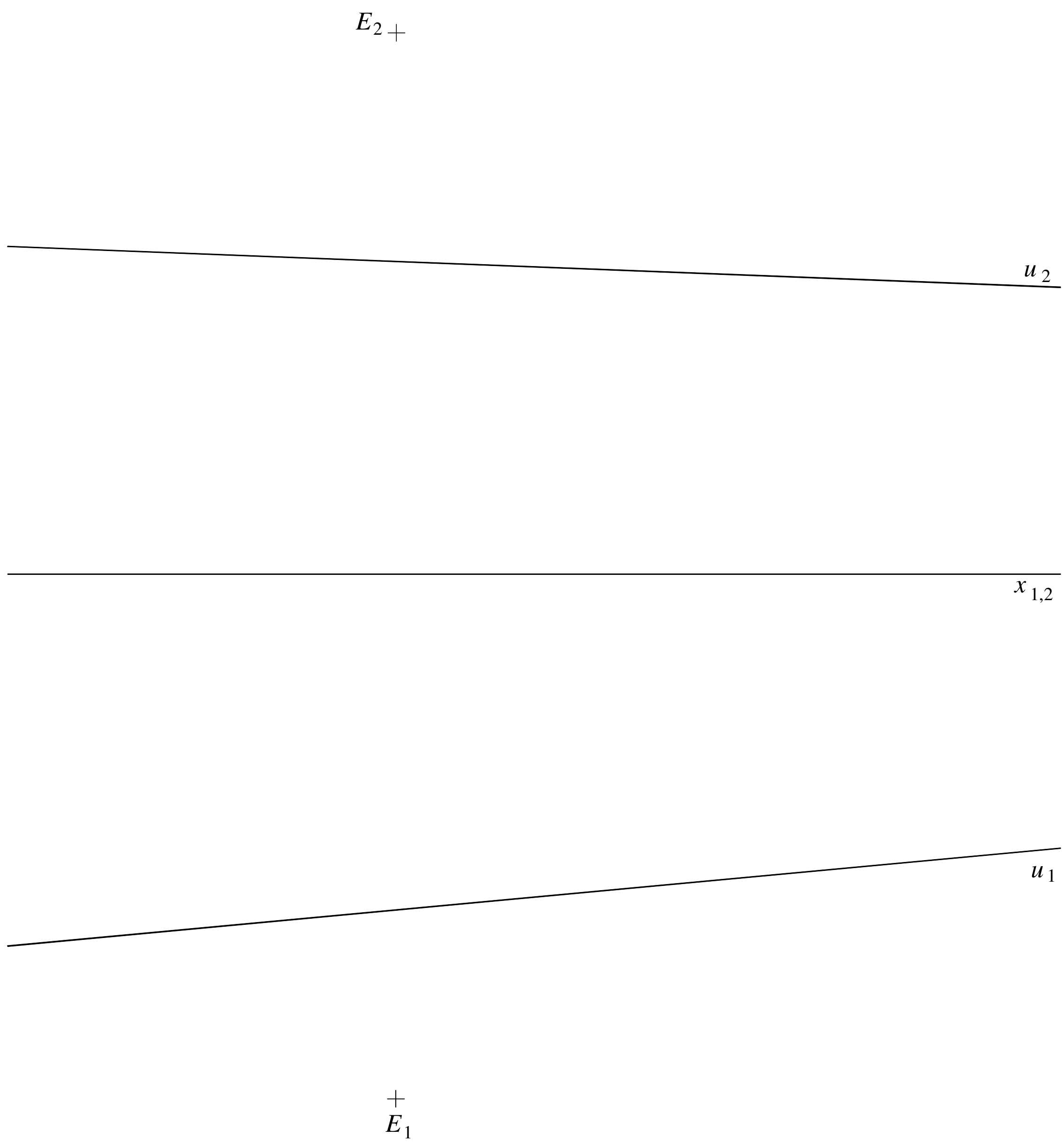
Sestrojíme půdorys k'_1 hraniční kružnice k' podstavy válce o středu S', který získáme posunutím elipsy k_1 o vektor $S_1S'_1$. Spojením hlavních vrcholů obou elips dourčíme půdorys tělesa.

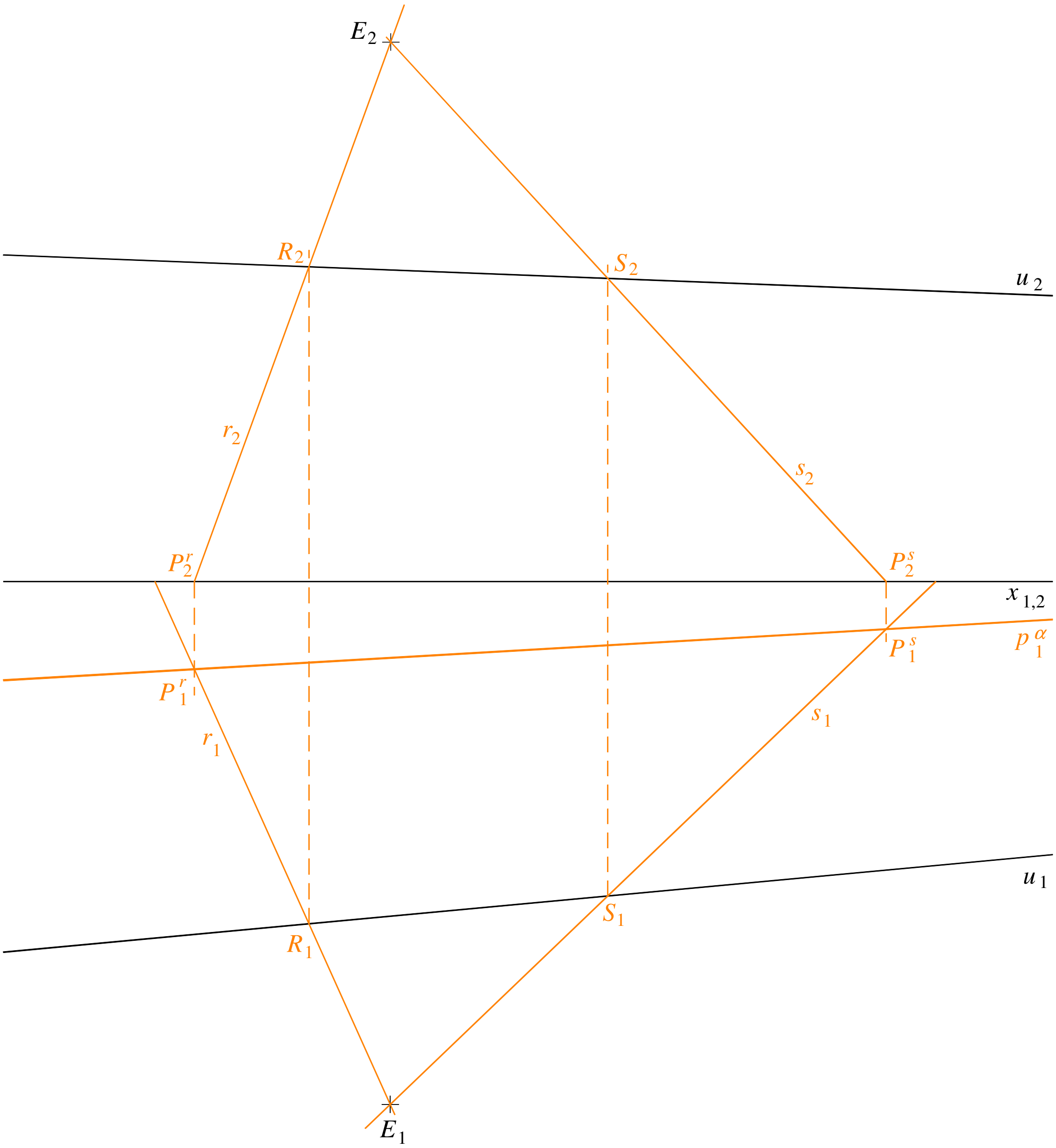


Sestrojíme nárys kružnice k, kterým je elipsa k_2 o středu S_2. Její hlavní osa je rovnoběžná s nárysem n_2^α nárysné stopy roviny α a vzdálenost jejích hlavních vrcholů K_2, L_2 od středu S_2 je rovna poloměru $|S_0T_0'|$ kružnice k. Vedlejší vrcholy sestrojíme pomocí rozdílové proužkové konstrukce, přičemž využijeme např. nárys A_2 bodu A. (Pomocí ordinály můžeme také sestrojit obecný bod T_2' elipsy k_2.)

Translací elipsy k_2 o vektor S_2S_2' a spojením hlavních vrcholů elips dourčíme nárys válce.

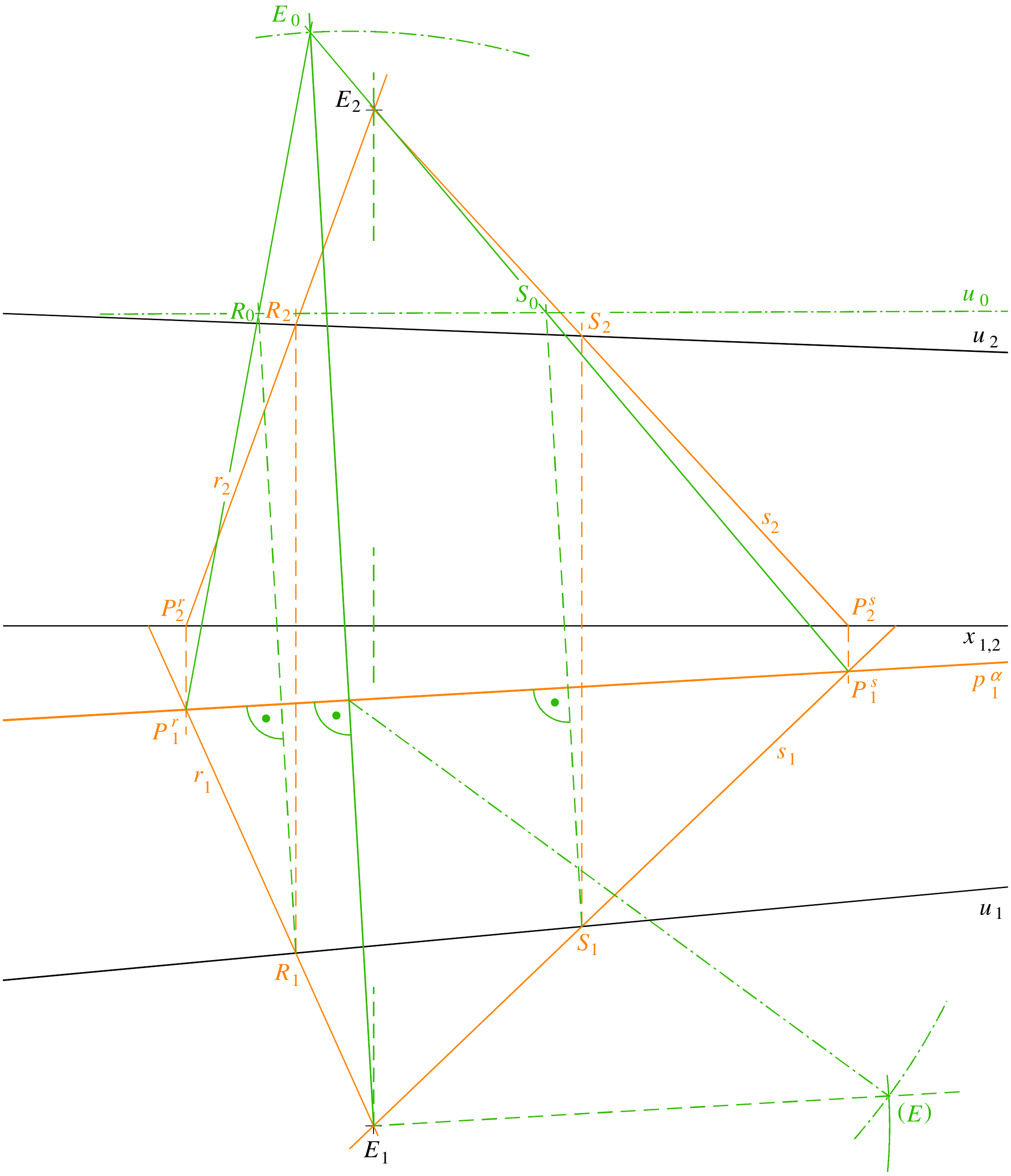
Příklad 5. V Mongeově promítání zobrazte krychli $ABCDEFGH$, znáte-li bod E a přímku u, na které leží body A, G. Při použití levotočivého souřadnicového systému dále platí $x^A < x^G$.



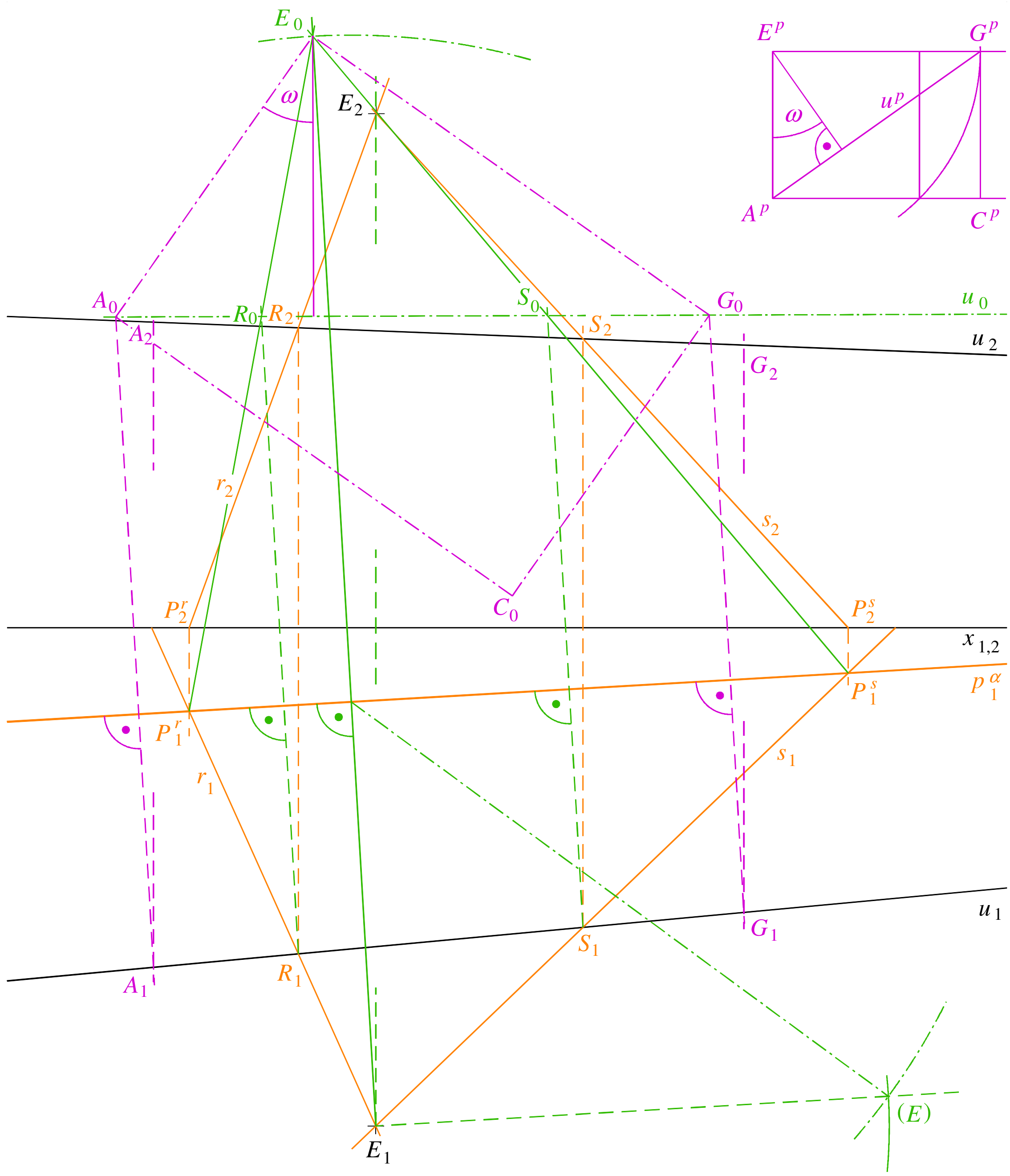


V rovině, která je určená bodem E a přímkou u a kterou označíme α, leží obdélník $ACGE$ s úhlopříčkou $u = AG$.

Tento obdélník chceme sestrojit, proto potřebujeme otočit rovinu α. Sestrojíme proto půdorys p_1^α její půdorysné stopy, a to pomocí půdorysů P_1^r, P_1^s půdorysných stopníků jejích různoběžek r, s procházejících bodem E. (Přímky r a u, resp. přímky s a u jsou samozřejmě také různoběžné: průsečík přímek r a u označme R, průsečík přímek s a u označme S.)



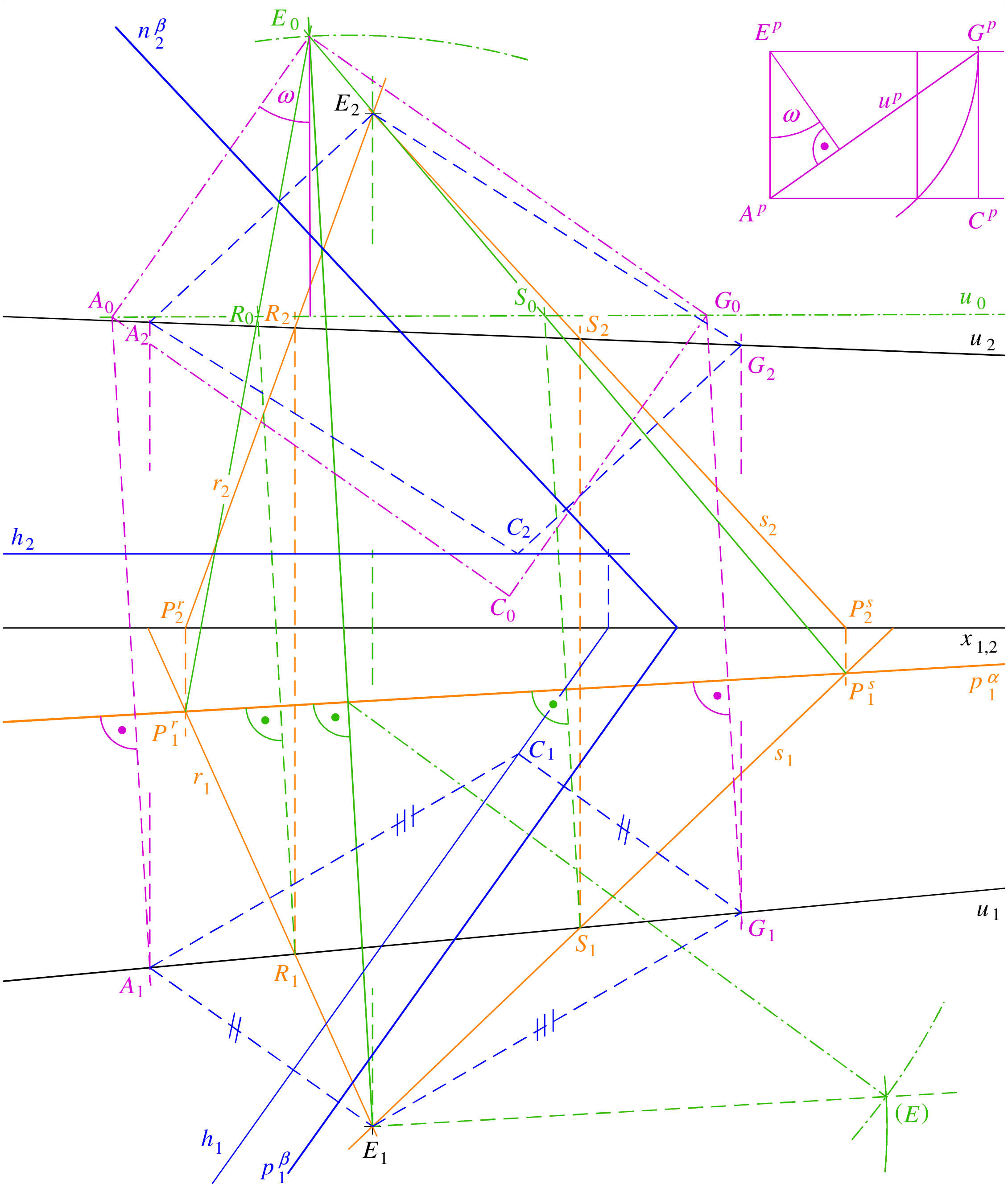
Otočíme rovinu α kolem její půdorysné stopy do půdorysny. Sestrojíme otočený bod E_0 a pomocí osové afinity $\mathcal{A}$, jejíž osou je přímka p_1^α a obrazem bodu E_1 je bod E_0, získáme otočené body R_0 a S_0, a tedy i otočenou přímku u_0.



Chceme sestrojit obdélník $A_0C_0G_0E_0$ tak, aby body A_0, G_0 ležely na přímce u_0 a aby poměr délek jeho dvou stran byl $1 : \sqrt{2}$ (poměr délek hrany a stěnové úhlopříčky krychle). Využijeme podobnosti. Sestrojíme libovolný obdélník $A^pC^pG^pE^p$, jehož dvě strany mají délky v uvedeném poměru, a zjistíme velikost ω úhlu, který svírá strana E^pA^p a kolmice vedená bodem E^p na úhlopříčku $u^p = A^pG^p$.

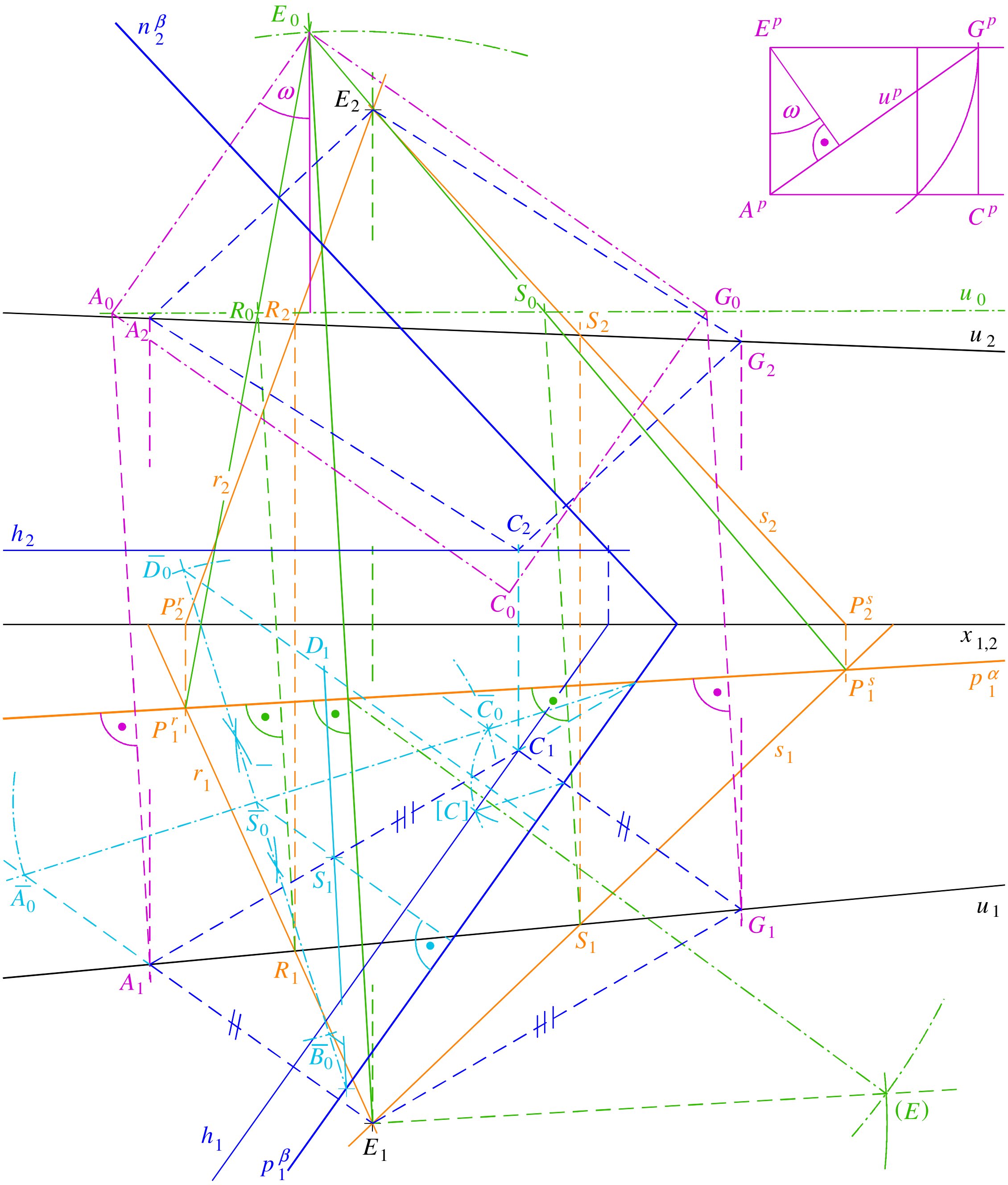
Pomocí podobnosti nyní sestrojíme obdélník $A_0C_0G_0E_0$: sestrojíme kolmici na přímku u_0 jdoucí bodem E_0 a s využitím znalosti velikosti úhlu ω získáme body A_0, G_0 (ze dvou možností volíme takovou, aby $x^A < x^G$) a následně C_0.

Pomocí afinity $\mathcal{A}$ nalezneme na přímce u_1 půdorysy A_1, G_1 bodů A, G a následně pomocí ordinál sestrojíme na přímce u_2 jejich nárysy A_2, G_2.

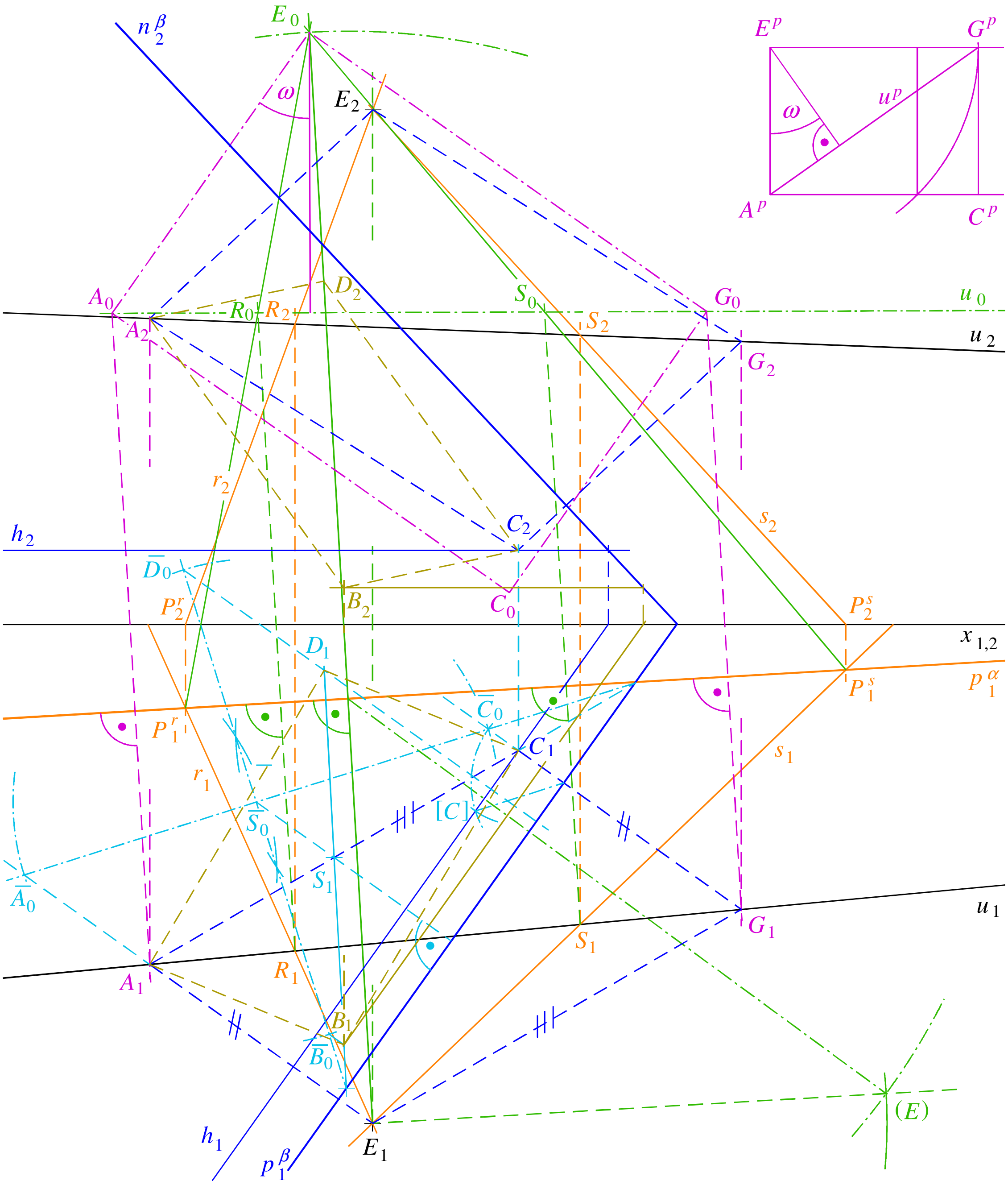


Půdorys C_1 a nárys C_2 bodu C sestrojíme pomocí základní vlastnosti rovnoběžného promítání: při rovnoběžném promítání se zachovává rovnoběžnost přímek, tudíž půdorysem $A_1C_1G_1E_1$ a nárysem $A_2C_2G_2E_2$ obdélníku $ACGE$ jsou rovnoběžníky.

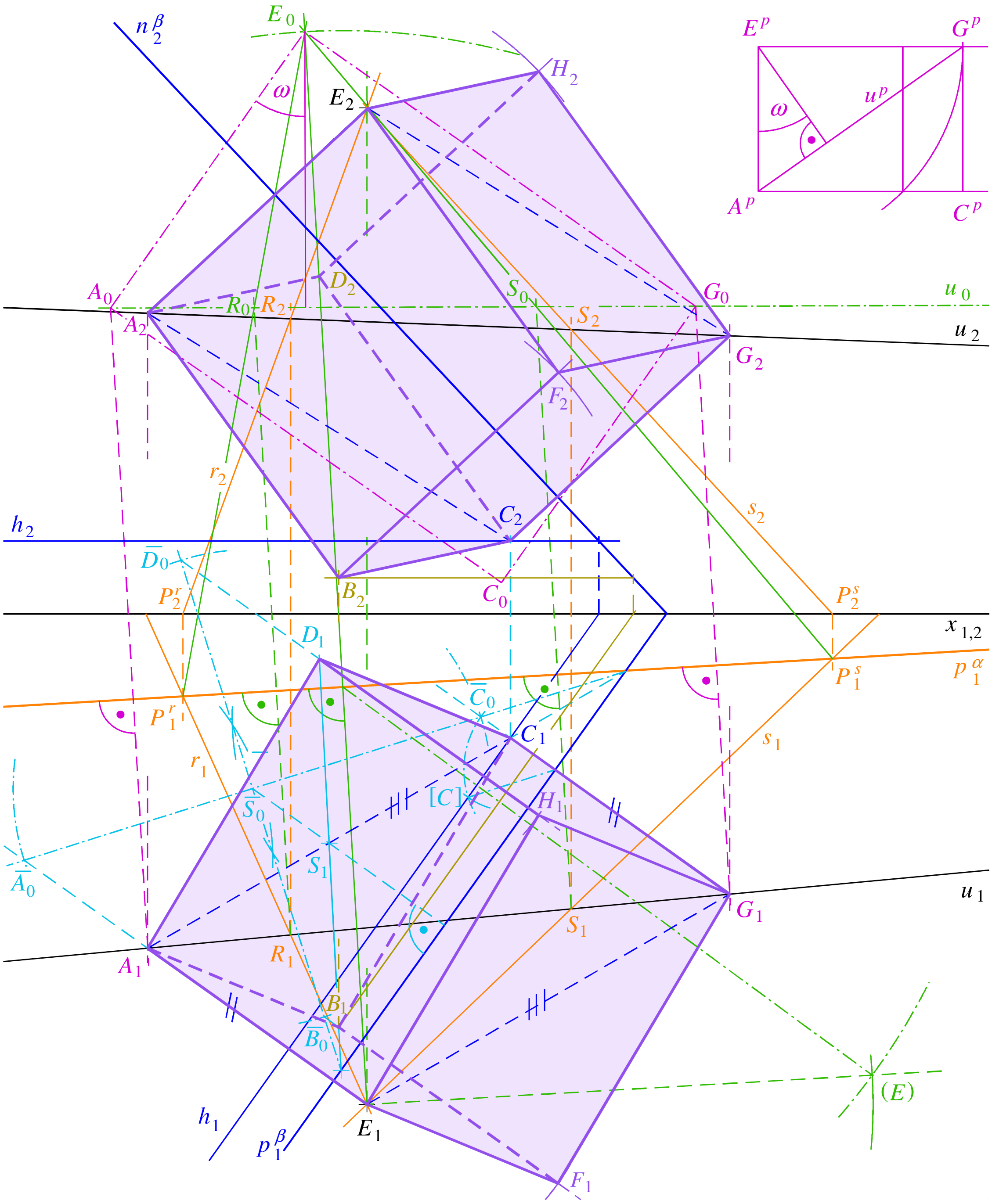
Nyní zobrazíme stopy roviny β, v níž leží stěna $ABCD$ krychle. Jedná se o rovinu procházející bodem C, která je kolmá na přímku CG (stopy roviny β zobrazíme například pomocí horizontální přímky h roviny β procházející bodem C).



Rovinu β otočíme kolem její půdorysné stopy do půdorysny. Získáme otočený bod $\bar{C}_0$ a pomocí osové afinity $\bar{\mathcal{A}}$, jejíž osou je přímka p_1^β a obrazem bodu C_1 je bod $\bar{C}_0$, získáme otočený bod $\bar{A}_0$. Sestrojíme čtverec $\bar{A}_0\bar{B}_0\bar{C}_0\bar{D}_0$.

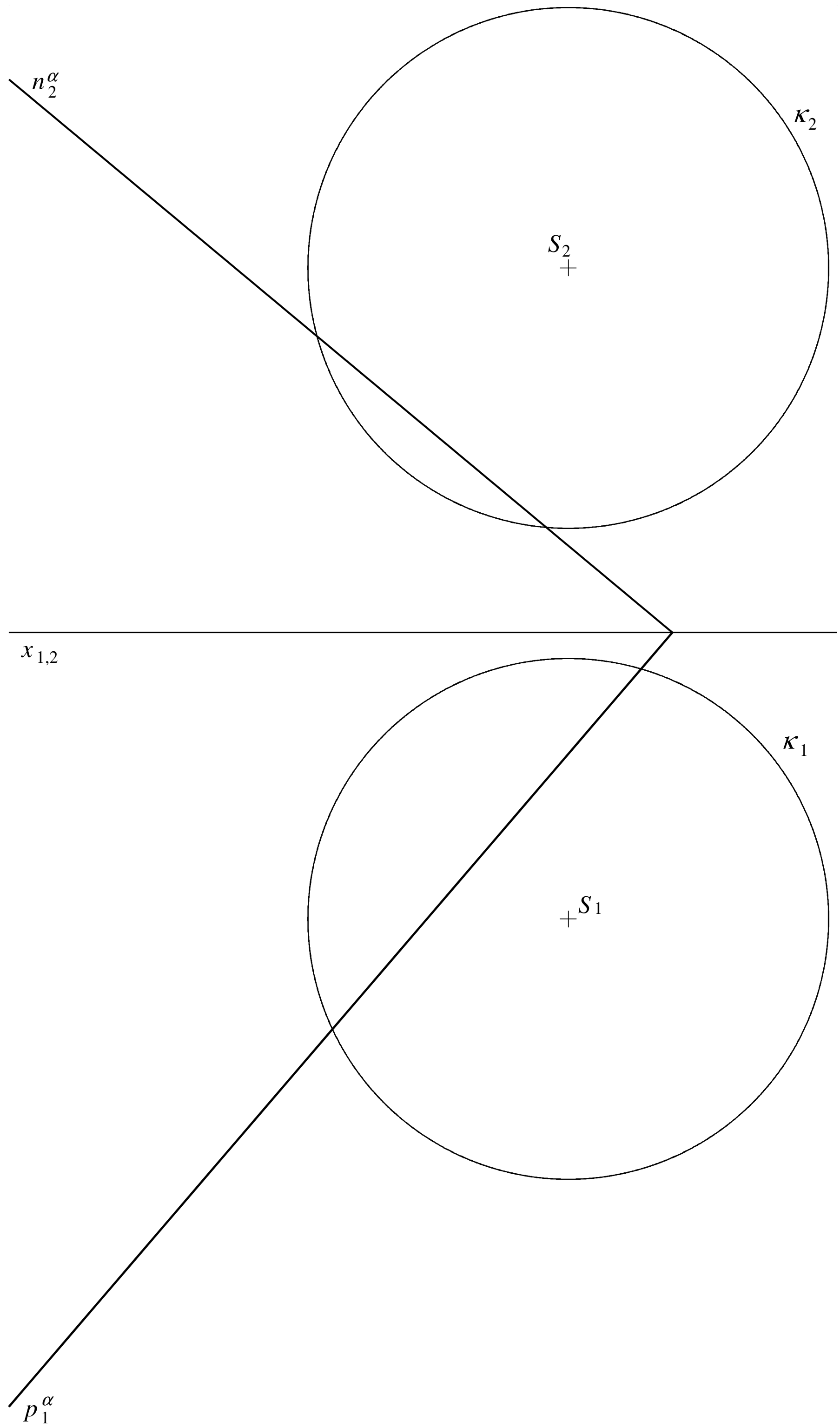


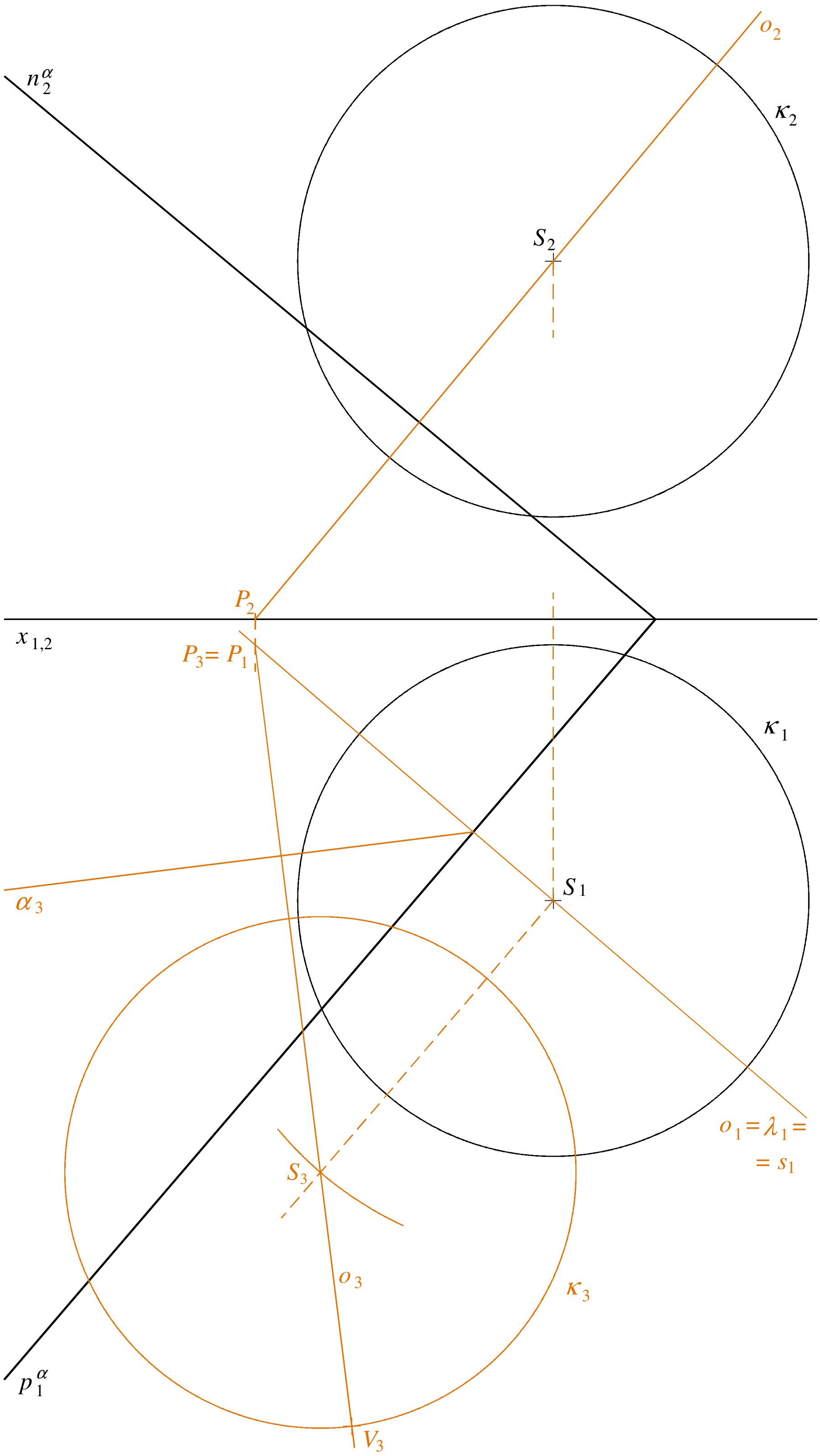
Vzorem čtverce $\bar{A}_0\bar{B}_0\bar{C}_0\bar{D}_0$ v osové afinitě $\bar{\mathcal{A}}$ je rovnoběžník $A_1B_1C_1D_1$. Pomocí horizontální přímky roviny β, která prochází bodem B, získáme nárys B_2 bodu B a s využitím rovnoběžnosti průmětů rovnoběžných úseček sestrojíme nárys D_2 bodu D (nárysem $A_2B_2C_2D_2$ čtverce $ABCD$ je rovnoběžník).



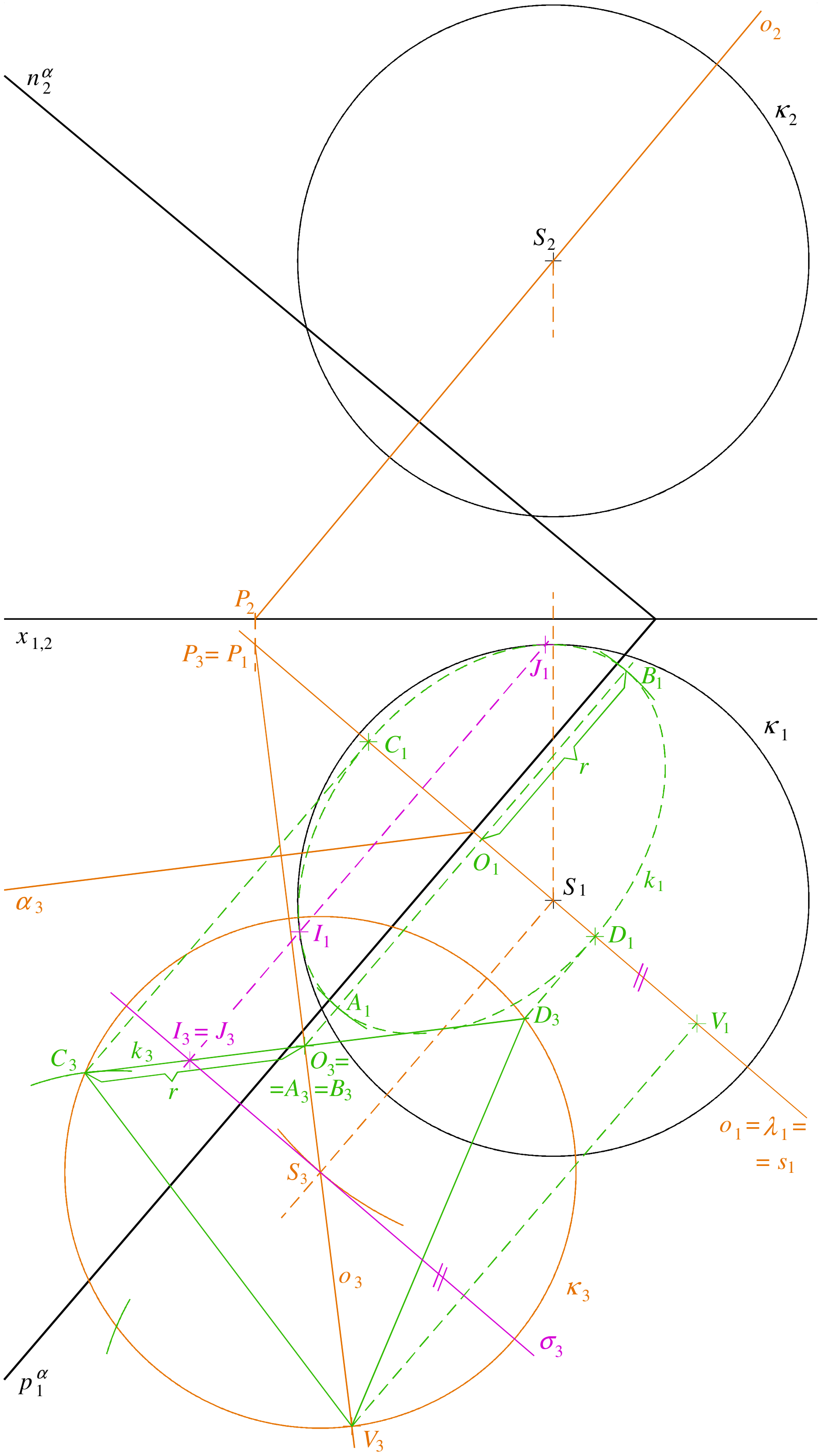
Posunutím rovnoběžníku $A_1B_1C_1D_1$ o vektor A_1E_1 získáme rovnoběžník $E_1F_1G_1H_1$ a posunutím rovnoběžníku $A_2B_2C_2D_2$ o vektor A_2E_2 získáme rovnoběžník $E_2F_2G_2H_2$, čímž jsou určeny sdružené průměty všech vrcholů krychle $ABCDEFGH$. Nakonec sestrojíme sdružené průměty zbývajících hran krychle a určíme jejich viditelnost.

Příklad 6. V Mongeově promítání zobrazte rovnostranný kužel, který je vepsaný dané kulové ploše κ o středu S a jehož podstava leží v rovině rovnoběžné s danou rovinou α. Pro vrchol V kužele platí $z^V > z^S$.



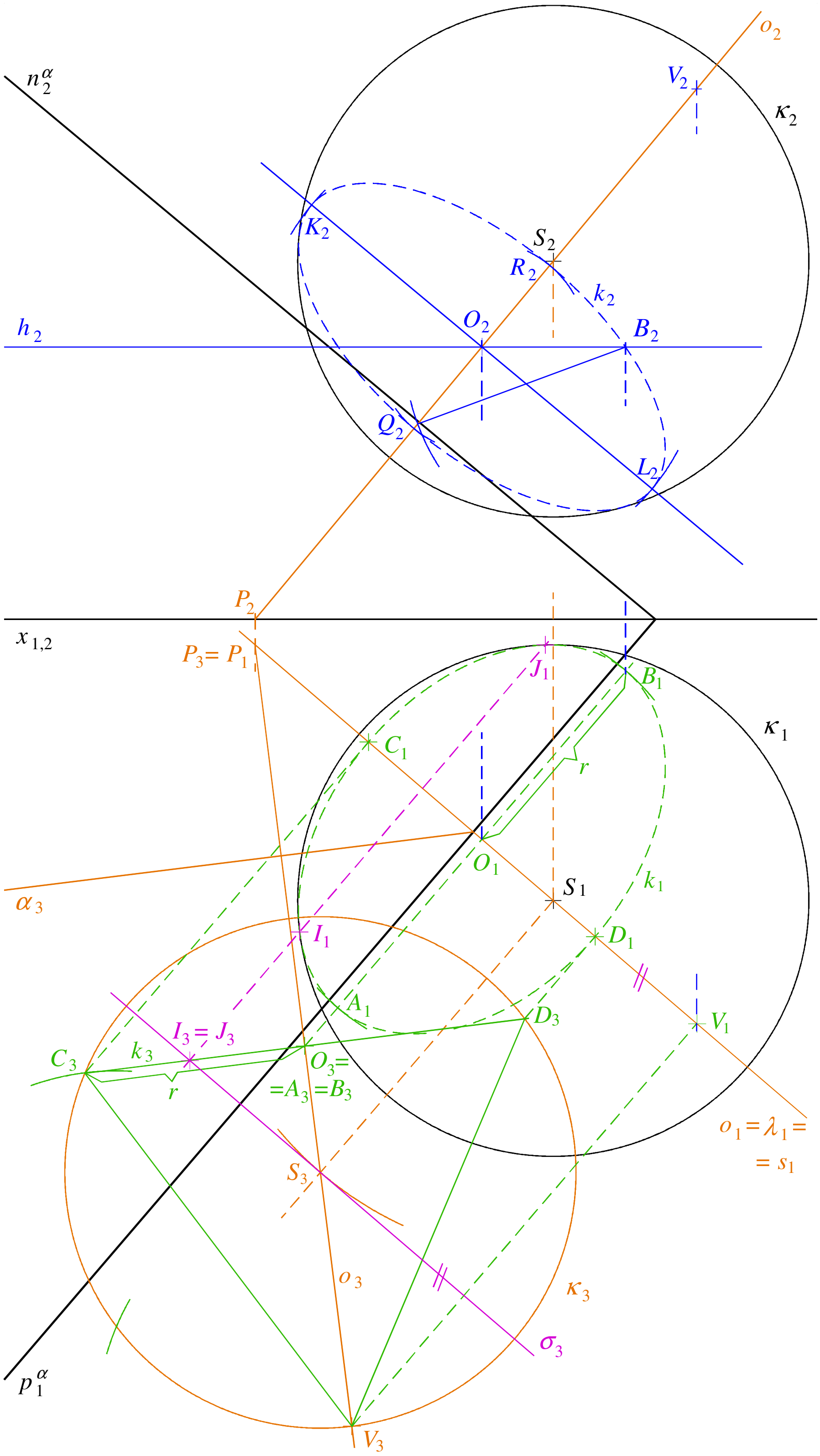


Zobrazíme osu o tělesa, která prochází bodem S a je kolmá na rovinu α. Přímkou o proložíme třetí vedlejší průmětnu λ kolmou na půdorysnu π, tj. $\lambda_1 = o_1$. Sestrojíme třetí průmět κ_3 kulové plochy κ a třetí průmět o_3 osy o kužele. Třetí průmět V_3 vrcholu kužele je průsečík hraniční kružnice kruhu κ_3 a přímky o_3 (ze dvou možností volíme takovou, aby $z^V > z^S$), třetí průmět α_3 roviny α je kolmice na přímku o_3 procházející stopníkem spádové přímky s roviny α, pro níž platí $s_1 = o_1$.



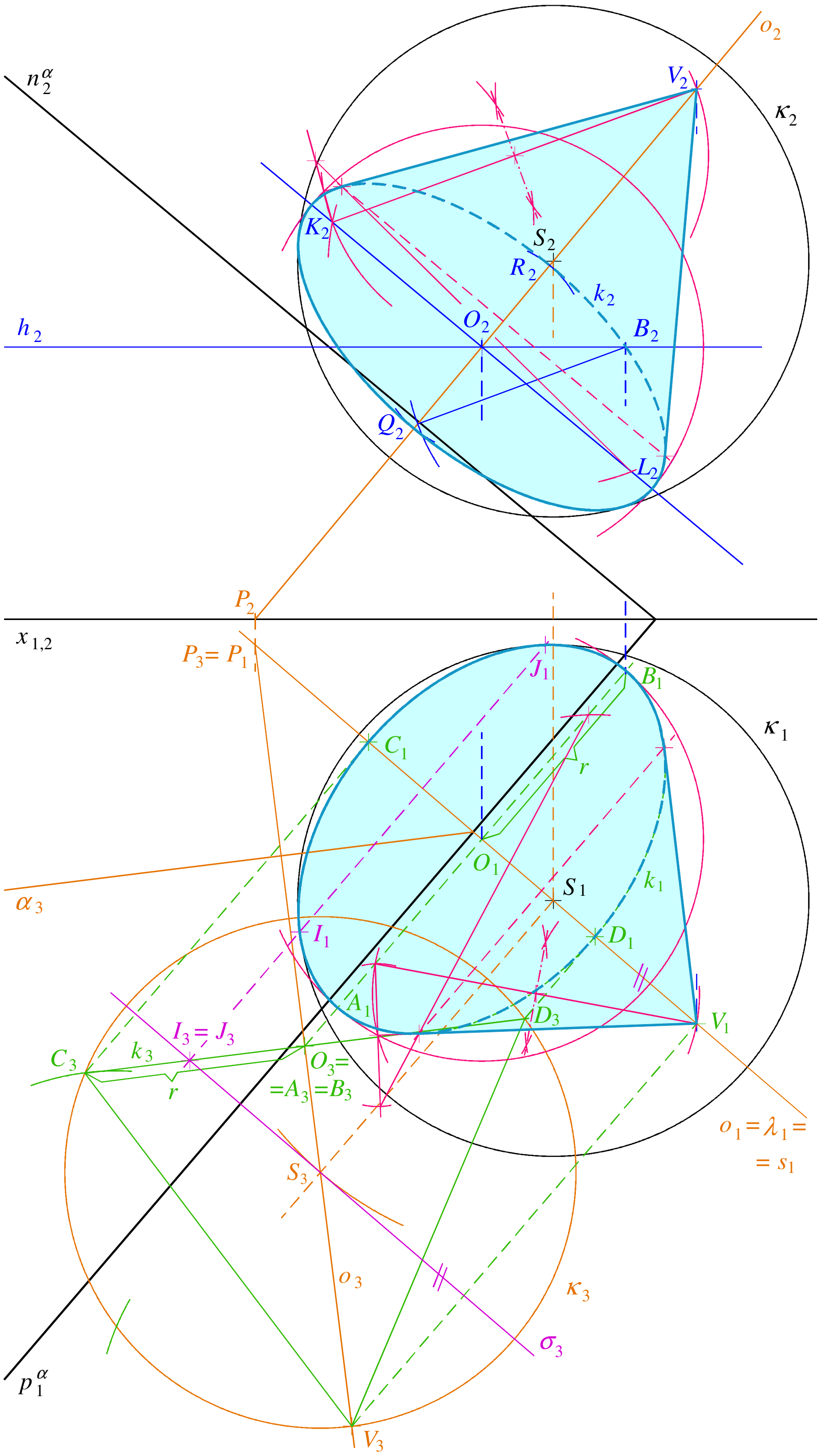
Sestrojíme třetí průmět kužele, což je rovnostranný trojúhelník $V_3C_3D_3$ vepsaný kružnici κ_3 (úsečka $k_3 = C_3D_3$ je třetí průmět podstavy kužele, kterou je kruh o středu O a poloměru $r = |O_3C_3|$). Půdorys podstavy je ohraničen elipsou k_1 se středem O_1, vedlejšími vrcholy C_1, D_1 a hlavními vrcholy A_1, B_1 ležícími ve vzdálenosti r od bodu O_1. Ke změně viditelnosti elipsy k_1 dochází v bodech I_1, J_1, přičemž třetí průměty I_3, J_3 bodů I, J jsou průsečíky úsečky C_3D_3 a přímky σ_3, což je třetí průmět roviny σ, která je rovnoběžná s půdorysnou a prochází středem S kulové plochy.

Sestrojíme rovněž půdorys V_1 vrcholu V kužele.



Nárys podstavy je ohraničen elipsou k_2 o středu O_2, jejíž hlavní osa je rovnoběžná s nárysem n_2^α nárysné stopy roviny α. Vzdálenost jejích hlavních vrcholů K_2, L_2 od středu O_2 je r. Vedlejší vrcholy elipsy k_2 získáme pomocí rozdílové proužkové konstrukce, při níž využijeme např. nárys B_2 bodu B.

Dále sestrojíme nárys V_2 vrcholu V kužele.



Bodem V_1 vedeme tečny elipsy k_1 a bodem V_2 vedeme tečny elipsy k_2. Úseky na těchto tečnách omezené půdorysem V_1, resp. nárysem V_2 vrcholu V a body dotyku tečen a elipsy k_1, resp. k_2 jsou součástí zdánlivých obrysů kužele při promítání do půdorysny, resp. nárysny.

Nakonec vyznačíme v obou sdružených průmětech viditelnost tělesa.