

ROVNOBĚŽNÉ OSVĚTLENÍ TĚLES

Martina Škorpilová

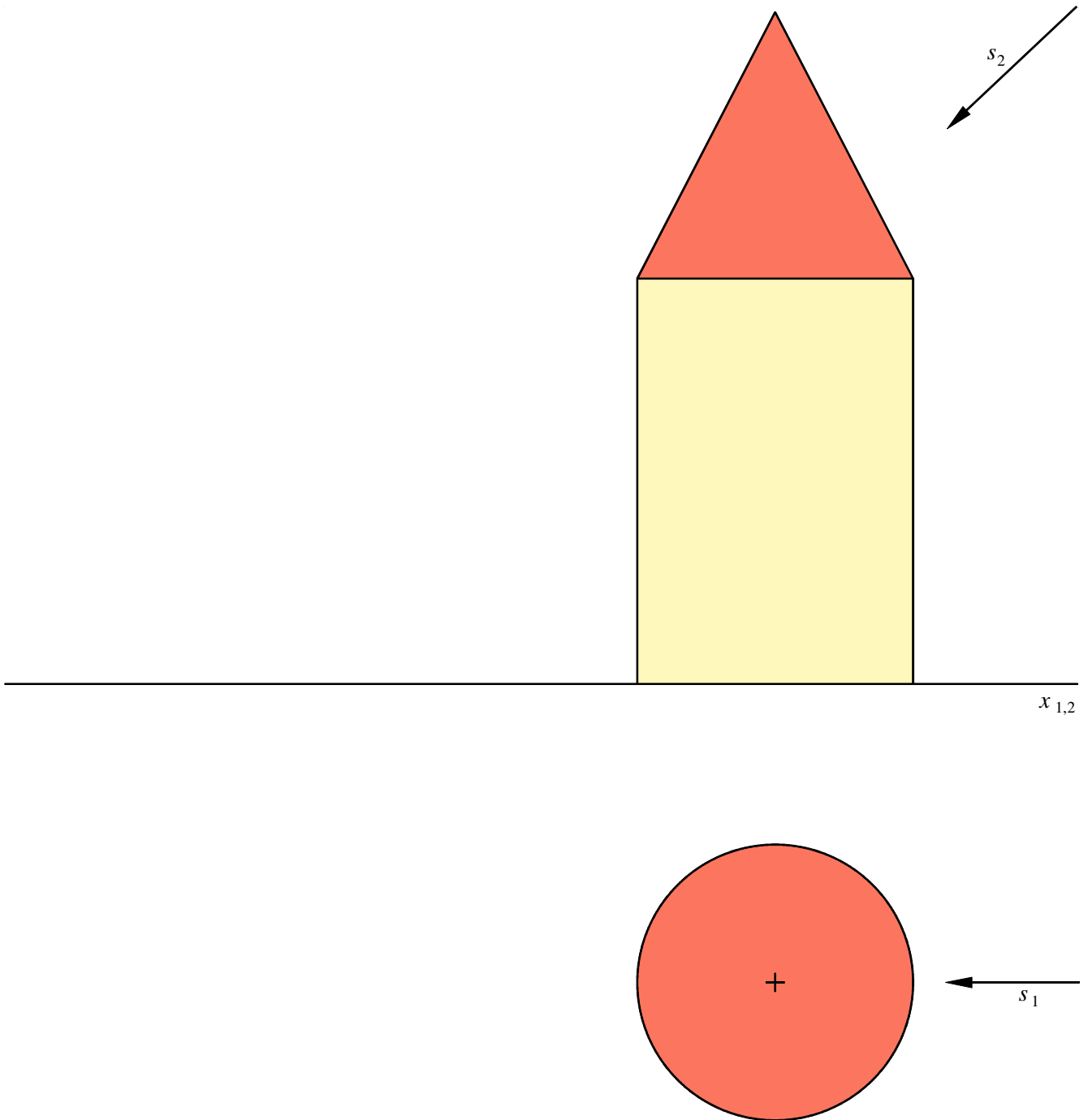
Matematicko-fyzikální fakulta Univerzity Karlovy

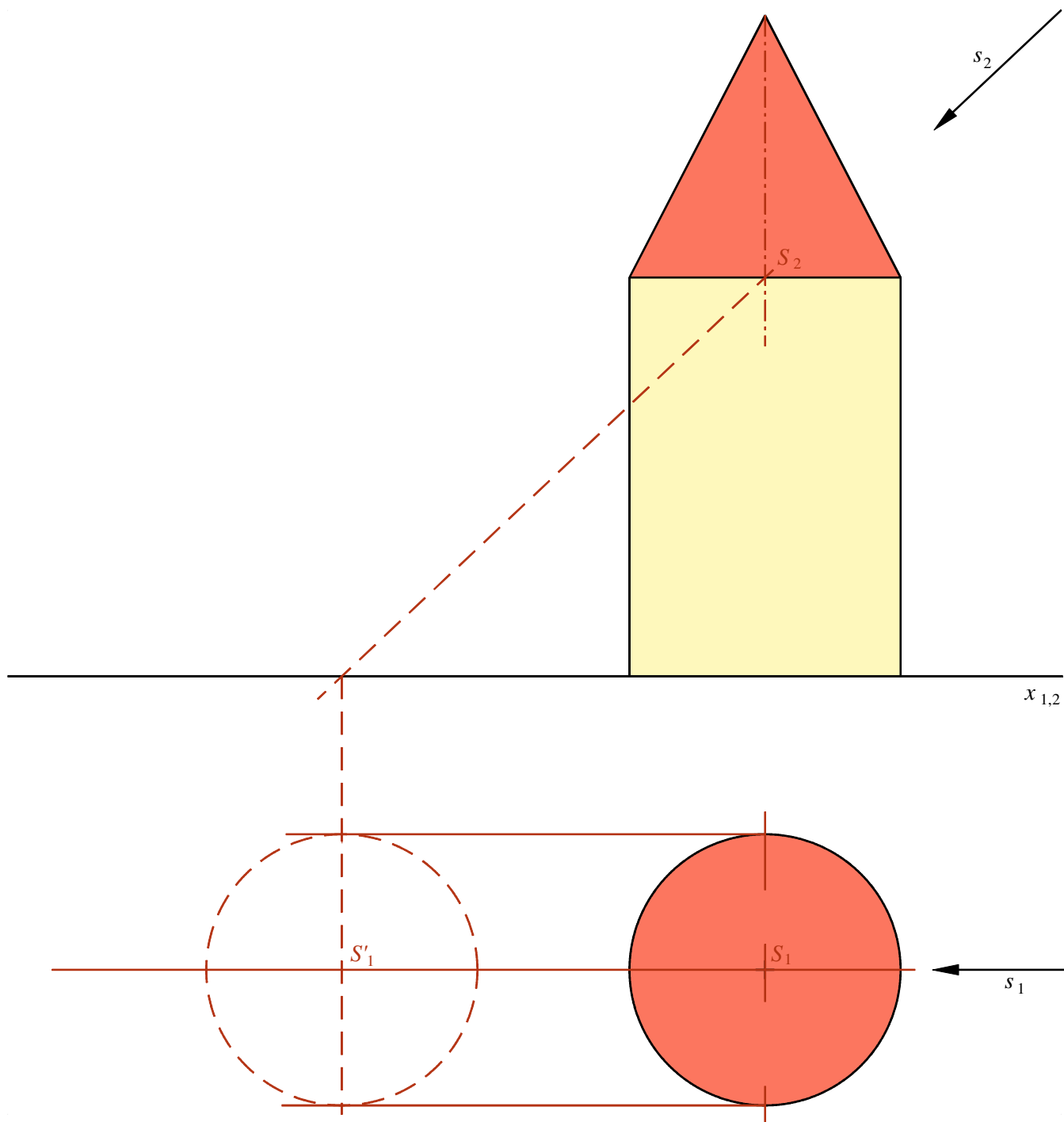
Praha

Obsahem studijního materiálu jsou příklady na problematiku rovnoběžného osvětlení těles. Všechny tyto úlohy jsou zadány a následně vyřešeny v Mongeově promítání. Řešení jsou přitom krokovaná a jednotlivé podstatné konstrukce jsou slovně popsány.

Text je určen především pro studenty Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy, kteří mají zapsaný (nejčastěji v letním semestru 2. ročníku bakalářského studia) předmět *Seminář z deskriptivní geometrie II*. Jedná se o studenty učitelství matematiky a deskriptivní geometrie, kteří teorii k řešení příkladů, resp. Mongeovo promítání znají z výuky v 1. ročníku. Nejzákladnější konstrukce proto nejsou v tomto materiálu znovu vysvětleny. Slovní popis řešení koresponduje s metodou uvedenou na příslušném obrázku. Často je však možné úlohu řešit i jiným postupem.

Příklad 1. V Mongeově promítání rovnoběžně osvětlete (ve směru s) hradní věž.

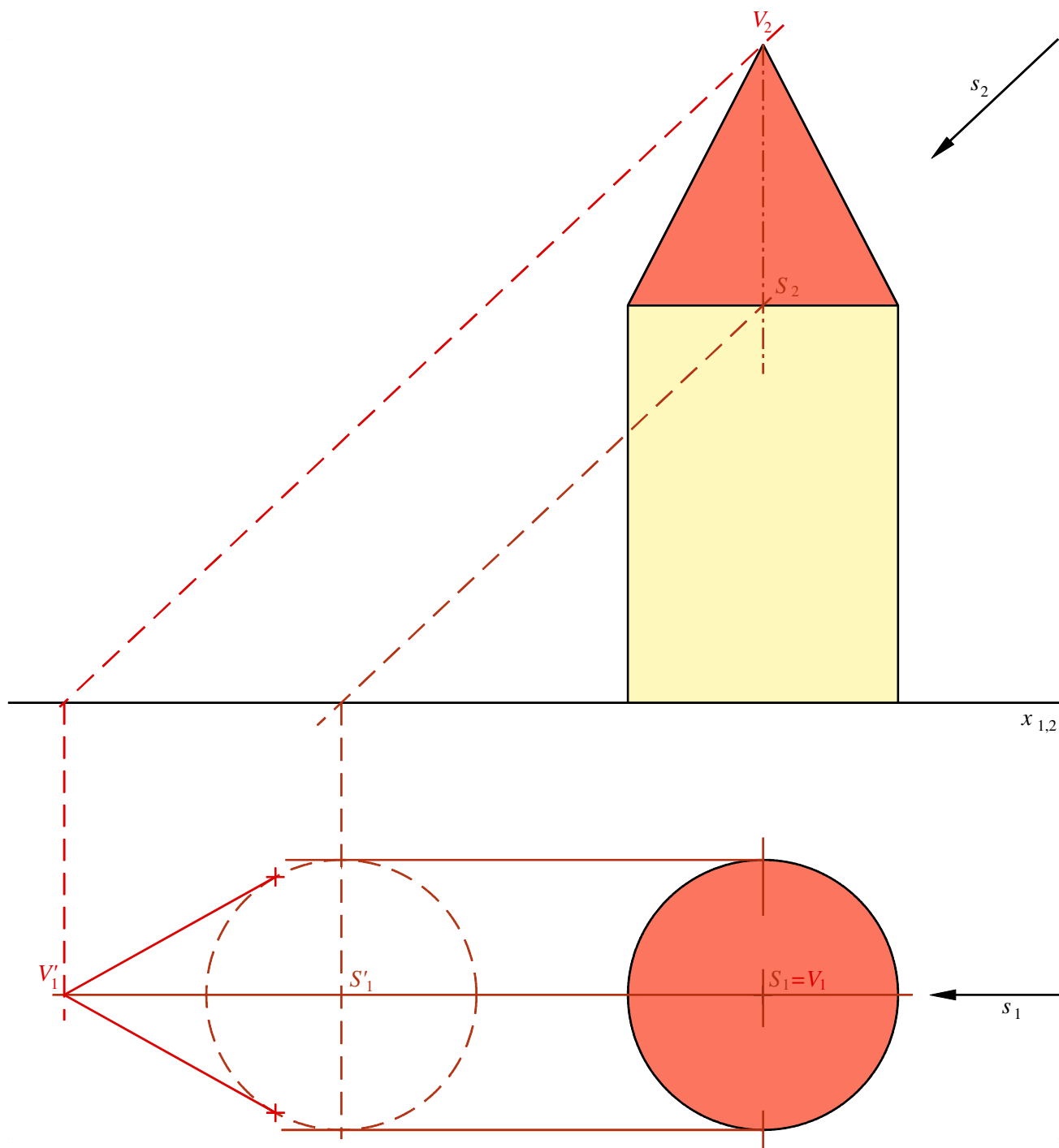




Sestrojíme stín vržený objektem na půdorysnu. Věž se skládá ze dvou částí (střecha; zděná část), které jsou u reálných staveb většinou duté. Pro jednodušší vyjadřování však budeme dále mluvit o válci a kuželi, jejich podstavách apod.

Stíny, které vrhají podstavy válce, jsou navzájem shodné kruhy. Stín vržený dolní podstavou splývá s touto podstavou. Střed S'_1 kruhu, který je půdorysem stínu vrženého horní podstavou, je půdorys půdorysného stopníku S' světelného paprsku procházejícího středem S horní podstavu.

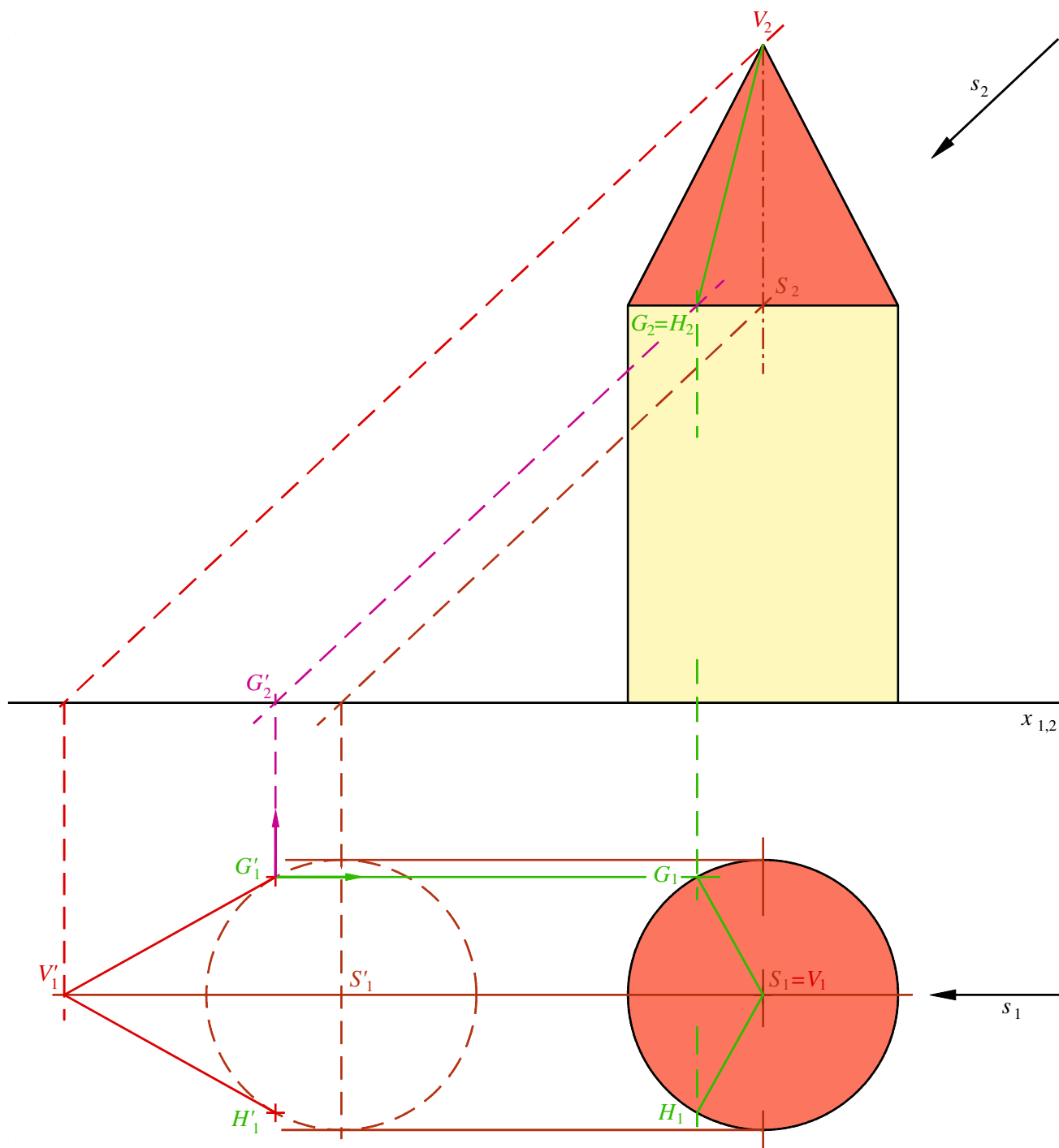
Zbývající části meze stínu vrženého válcem na půdorysnu jsou úseky na společných tečnách dvou kruhů (stínů vržených podstavami válce) rovnoběžných s půdorysy světelných paprsků. Tj. tečny jsou přímkami směru s_1 .



Označme V vrchol kužele. Stín V' jím vržený na půdorysnu je půdorysný stopník světelného paprsku procházejícího vrcholem V . Sestrojíme půdorys V'_1 bodu V' .

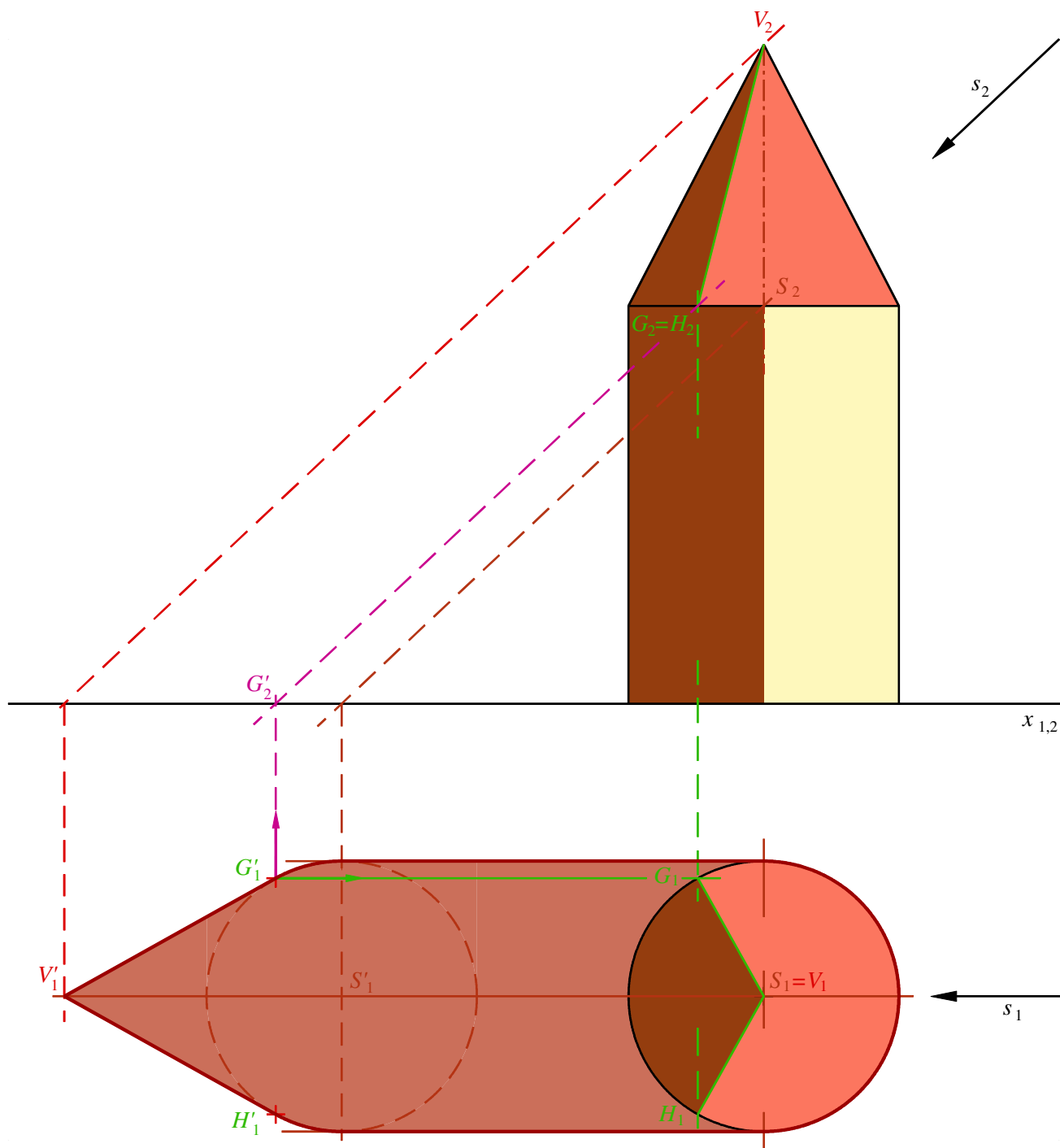
Protože podstava kužele splývá s horní podstavou válce, splývají i stíny jimi vržené na půdorysnu. Stínem vrženým podstavou kužele na půdorysnu je tedy již sestroyený kruh o středu S'_1 . Úseky na tečnách tohoto kruhu vedených bodem V'_1 dourčují mez stínu vrženého kuželem na půdorysnu.

Protože stín vržený věží na půdorysnu neprotíná základnici, nevrhá objekt stín na nábrysnu.



Nyní sestrojme mez stínu vlastního, který náleží plášti kužele. Mezi budou dvě úsečky se společným krajním bodem V . Hledejme sdužené průměty zbývajících krajních bodů G, H (leží na hraniční kružnici podstavu kužele). Půdorysy G'_1, H'_1 stínů vržených body G, H na půdorysnu jsou body dotyku tečen, které jsme v předchozím kroku vedli bodem V'_1 ke kruhu, který je stínem vrženým podstavou kužele na půdorysnu. Nyní máme dvě možnosti (obě jsou uvedeny na obrázku), jak postupovat dále. Můžeme nejprve získat půdorysy G_1, H_1 bodů G, H , a to metodou zpětných paprsků, kterou využijeme v půdorysu. Nárysy G_2, H_2 bodů G, H poté získáme pomocí ordinál. V druhém případě můžeme nejprve pomocí společné ordinály bodů G', H' získat jejich nárysy G'_2, H'_2 , poté metodou zpětných paprsků aplikovanou v nárysu sestrojít nárysy $G_2 = H_2$ a následně pomocí společné ordinály půdorysy G_1, H_1 bodů G a H .

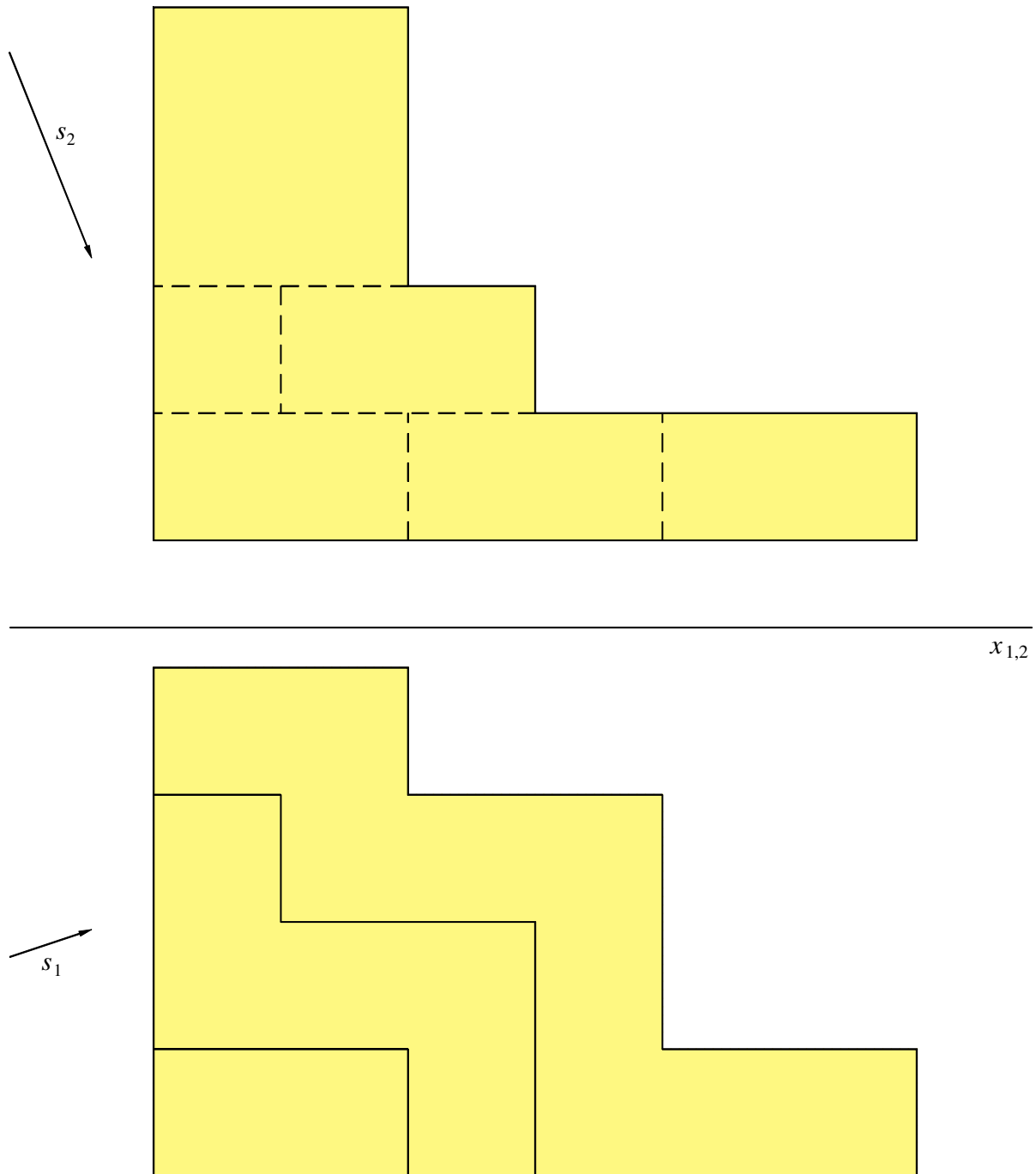
Sestrojíme sdužené průměty V_1G_1, V_2G_2, V_1H_1 a V_2H_2 úseček VG, VH .

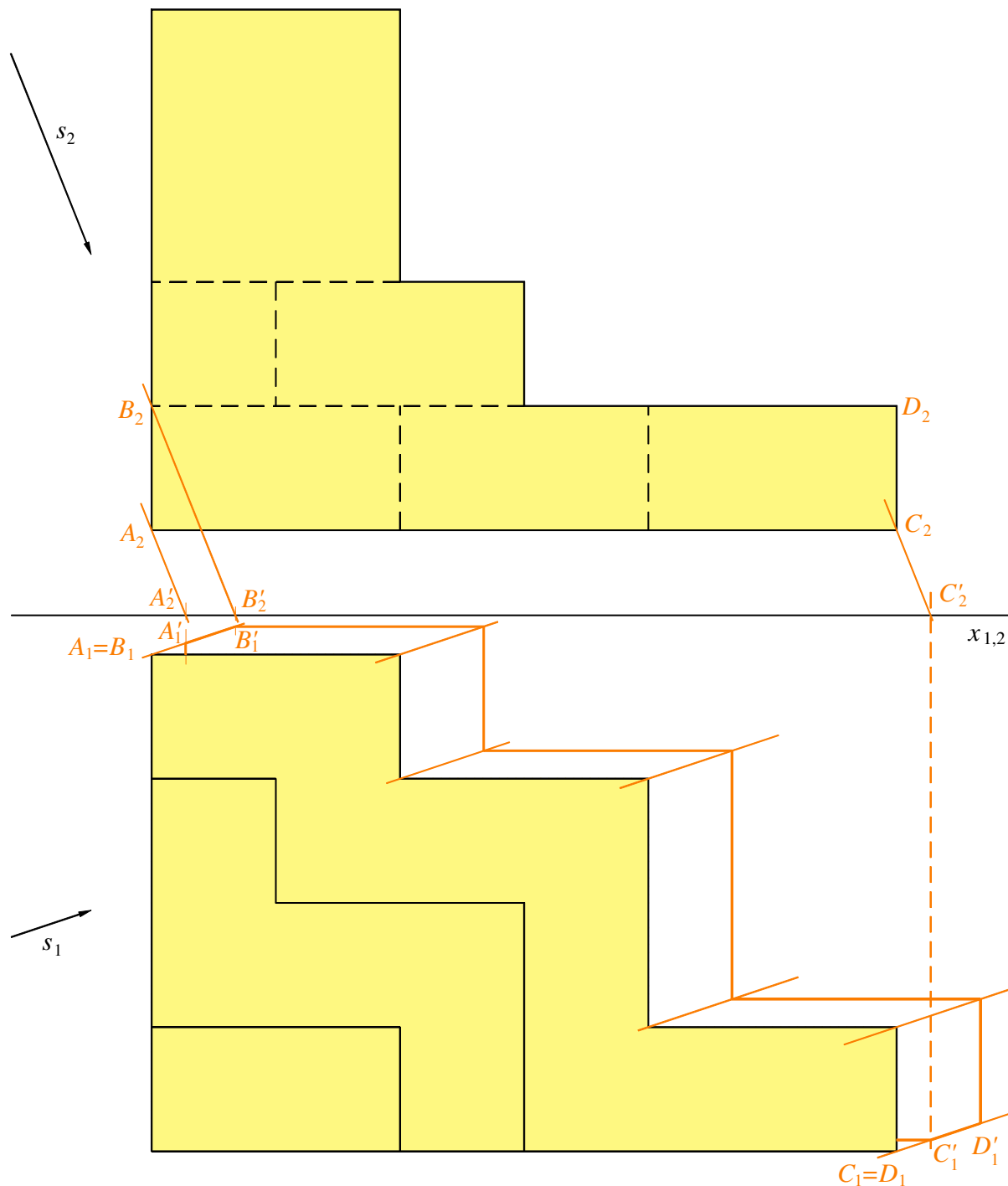


Pro válec je nalezení meze vlastního stínu mnohem jednodušší (v našem případě navíc sestrojujeme pouze části meze náležející jeho plášti). Při rovnoběžném osvětlení ve směru s , který není rovnoběžný s osou válce, je osvětlena právě polovina pláště válce. Vzhledem ke skutečnosti, že v příkladu 1 je směr s osvětlení rovnoběžný s nárysnou, tvoří hledanou mez vlastního stínu pláště válce dvě úsečky, jejichž nárysy splývají s nárysem osy válce. Jejich půdorysy jsou body ležící na půdorysu pláště válce a příslušné ordinály. Tím jsou dourčeny sdružené průměty meze stínu vlastního náležející věži.

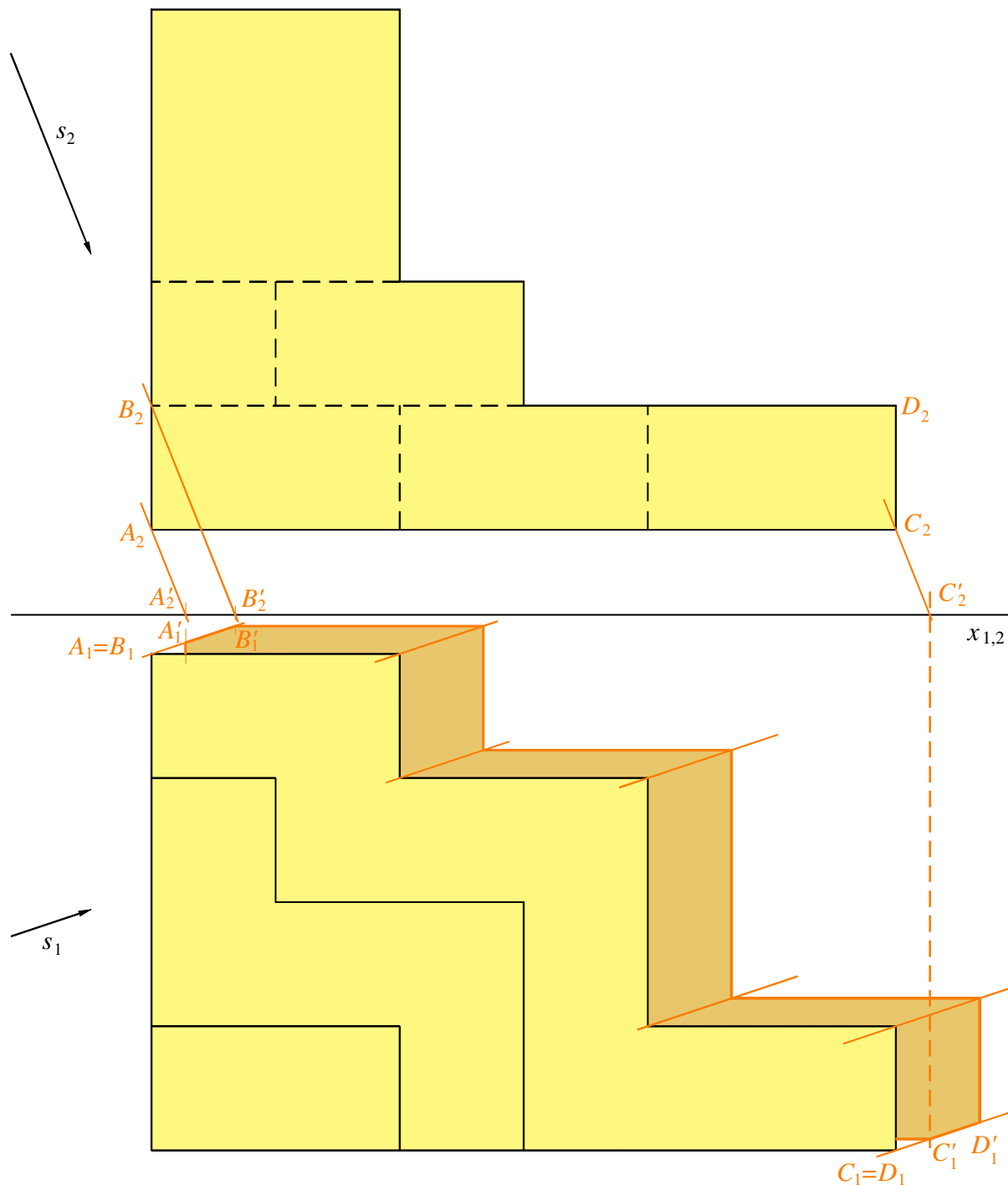
Nakonec vybarvením (případně šrafováním) zvýrazníme sdružené průměty stínu vrženého objektem na půdorysnu a vlastního stínu věže.

Příklad 2. V Mongeově promítání rovnoběžně osvětlete (ve směru s) dané těleso.



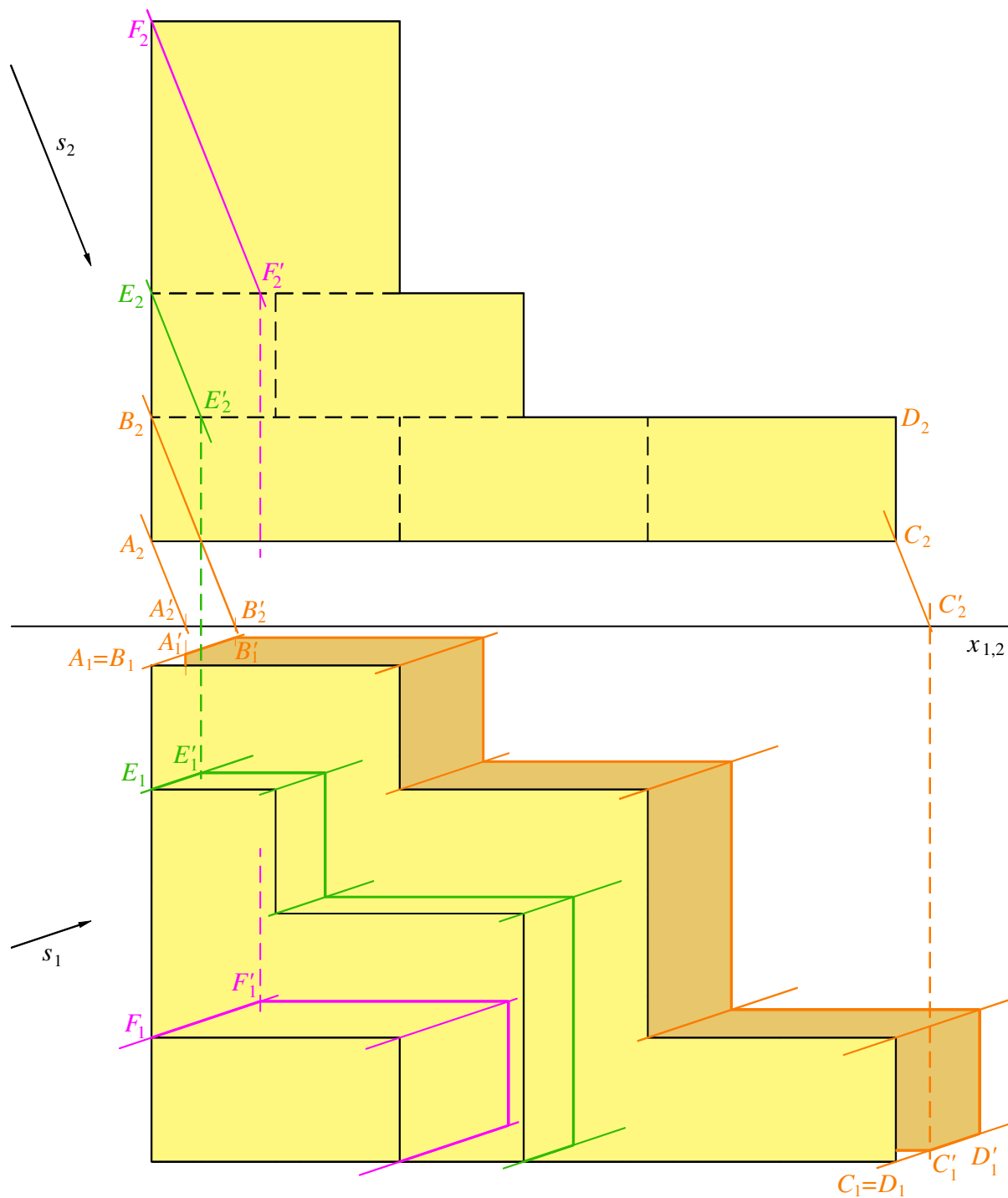


Těleso se skládá ze tří vrstev. Sestrojme nejprve stín vržený spodní vrstvou na půdorysnu. Jelikož podstava tělesa i horní vodorovná plocha spodní vrstvy tělesa leží v rovinách rovnoběžných s půdorysnou, jsou stíny vržené oběma útvary a také podstava tělesa navzájem shodné útvary. Přesněji řečeno bude stín vržený každým z útvarů jeho obrazem v translaci. Zobrazme vržené stíny A' a B' dvou bodů A a B , z nichž každý je vrcholem jednoho z uvažovaných útvarů: vrženým stínem A' , resp. B' bodu A , resp. B je půdorysný stopník příslušného světelného paprsku. Sestrojme půdorysy A'_1 , B'_1 bodů A' , B' . Nyní stačí sestavit výše zmíněné shodné útvary, mezi jejichž vrcholy patří body A'_1 , B'_1 (lze si pomoci i půdorysy světelných paprsků, které procházejí některými dalšími vrcholy útvarů, a také půdorysy C'_1 , D'_1 stínů C' , D' vržených body C , D).

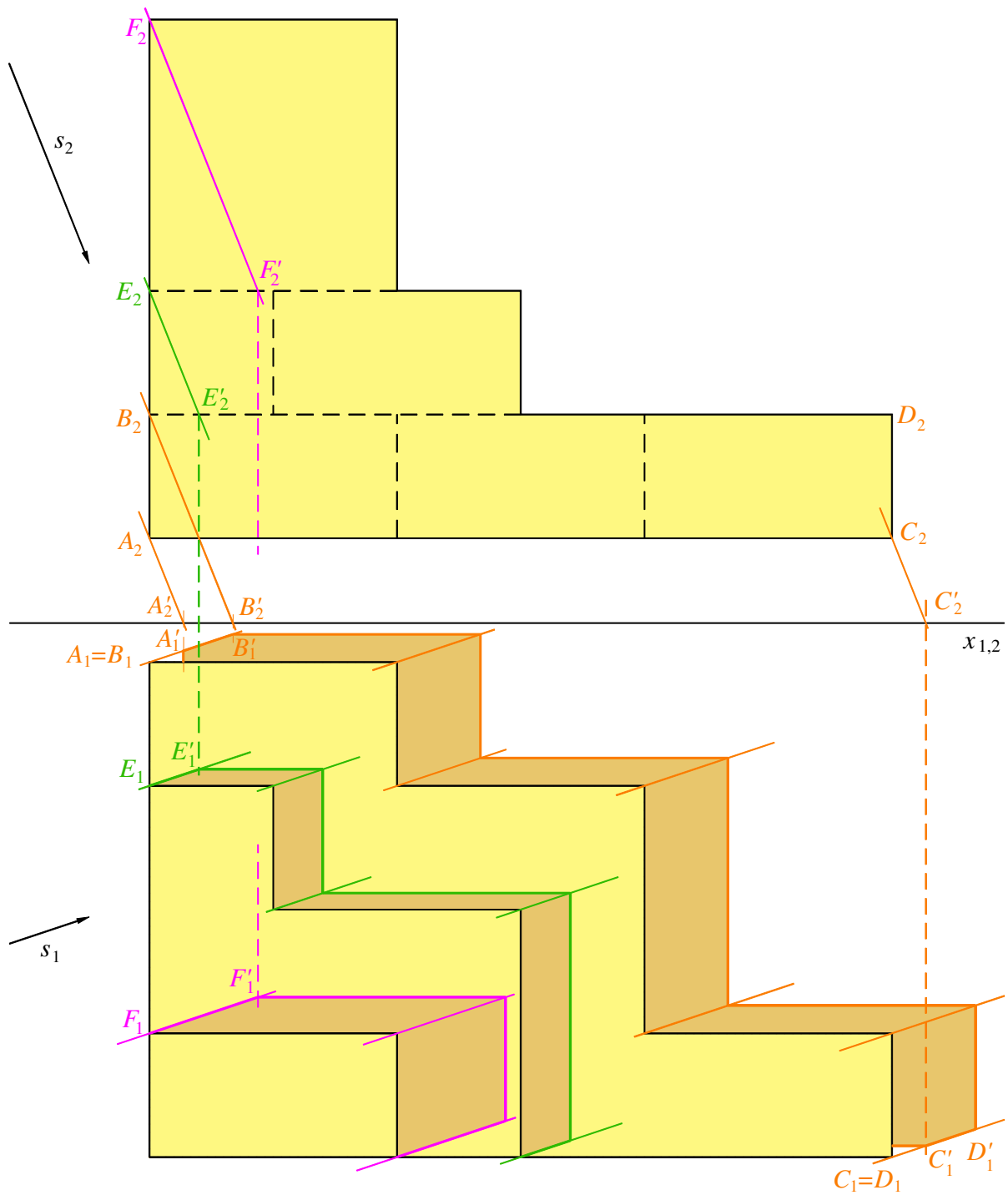


Při sestrojování půdorysu meze stínu vrženého spodní vrstvou je přitom nutné dávat pozor především na okolí půdorysů A'_1 , C'_1 stínů A' , C' vržených body A a C . Na obrázku je proto již nyní barevně zvýrazněn stín vržený spodní vrstvou na půdorysu. Zároveň se jedná o stín vržený na tuto průmětnu celým tělesem, neboť další vrstvy tělesa tento vržený stín neovlivní, jak zjistíme hned v dalším kroku postupu.

Jelikož stín vržený tělesem na půdorysu neprotíná základnici, nevrhá útvar stín na nárysnu.

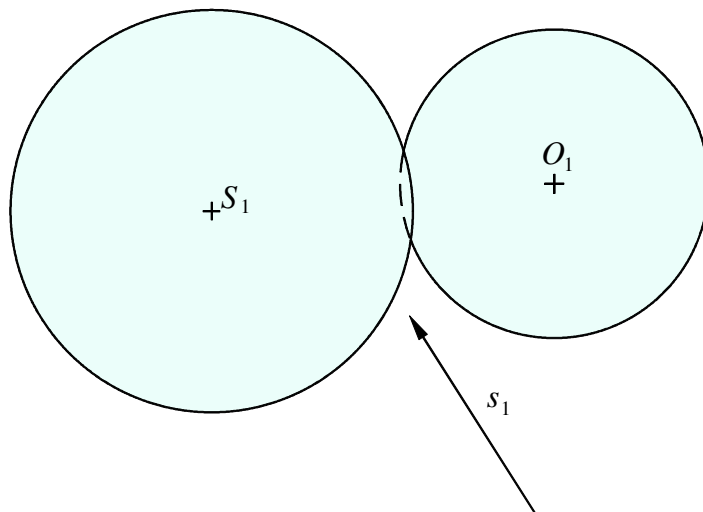
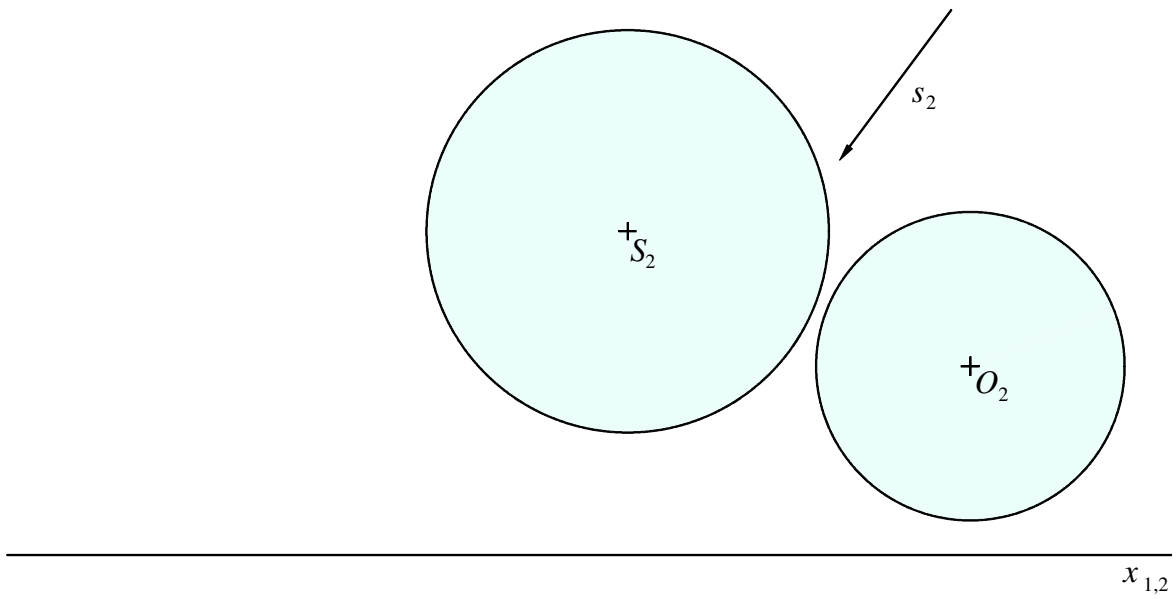


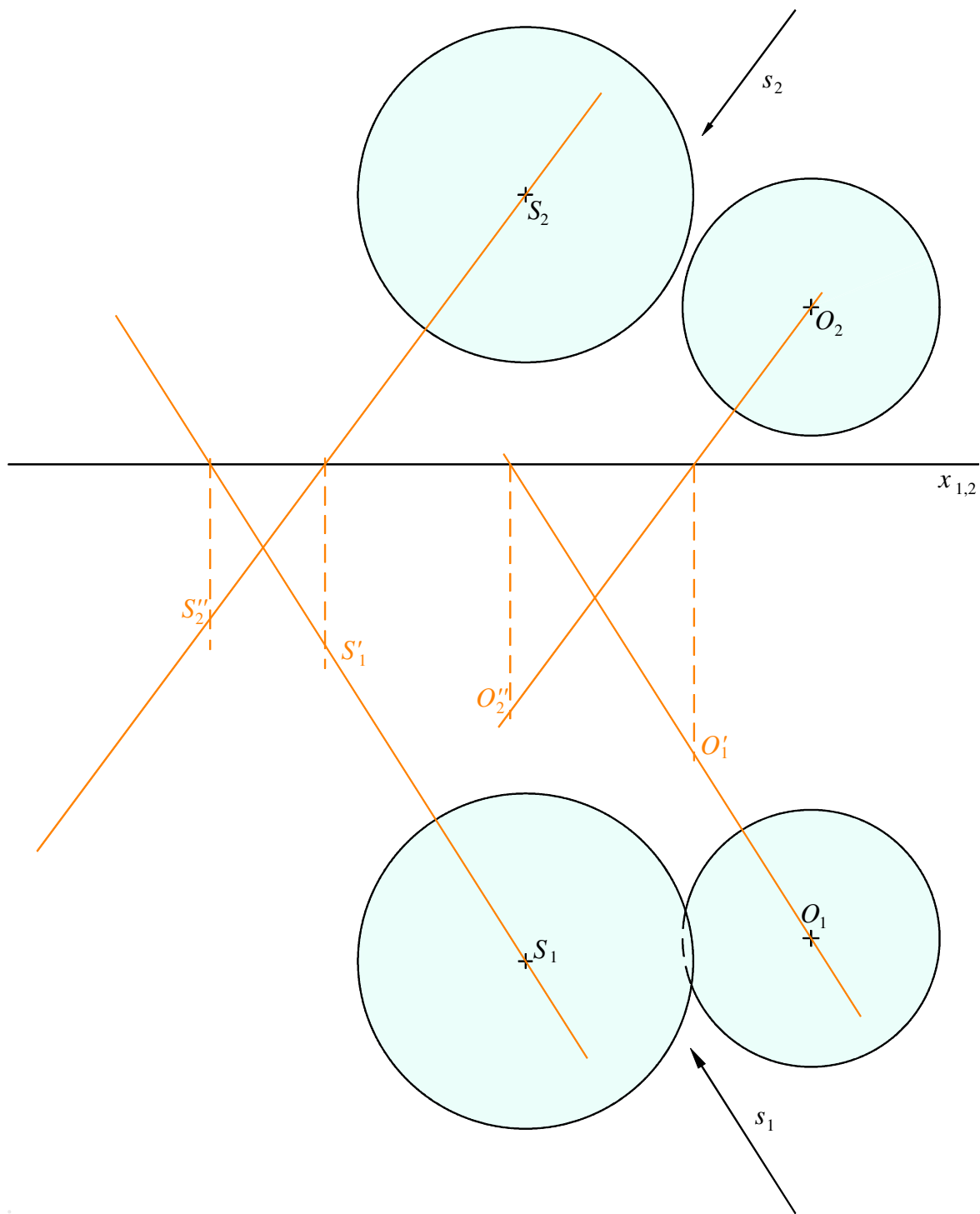
Obdobným způsobem pracujeme s dalšími dvěma vrstvami tělesa. Využijeme např. stíny E' , F' vržené body E , F . Zjistíme, že prostřední vrstva vrhá stín pouze na vrstvu spodní a nejvýše položená vrstva vrhá stín jen na vrstvu prostřední.



Všechny části tělesa, které jsou viditelné v půdorysu, resp. v narysu, jsou osvětlené. Není proto nutné vybarvovat vlastní stíny. Zbývá tedy barevně zvýraznit půdorysy stínů vržených dvěma nejvýše položenými vrstvami na vrstvy položené níže.

Příklad 3. V Mongeově promítání rovnoběžně osvětlete (ve směru s) dvě koule o středech S a O .

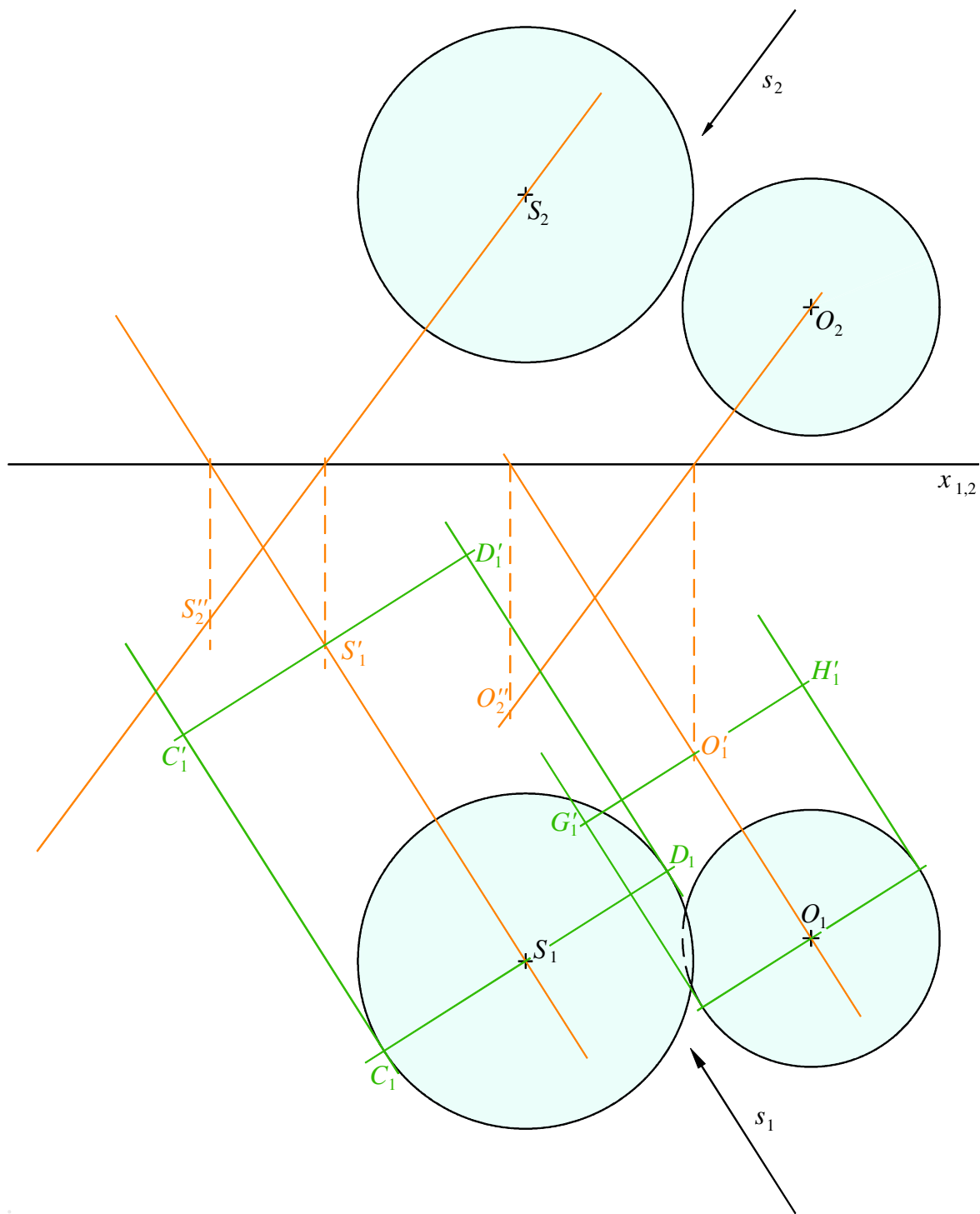




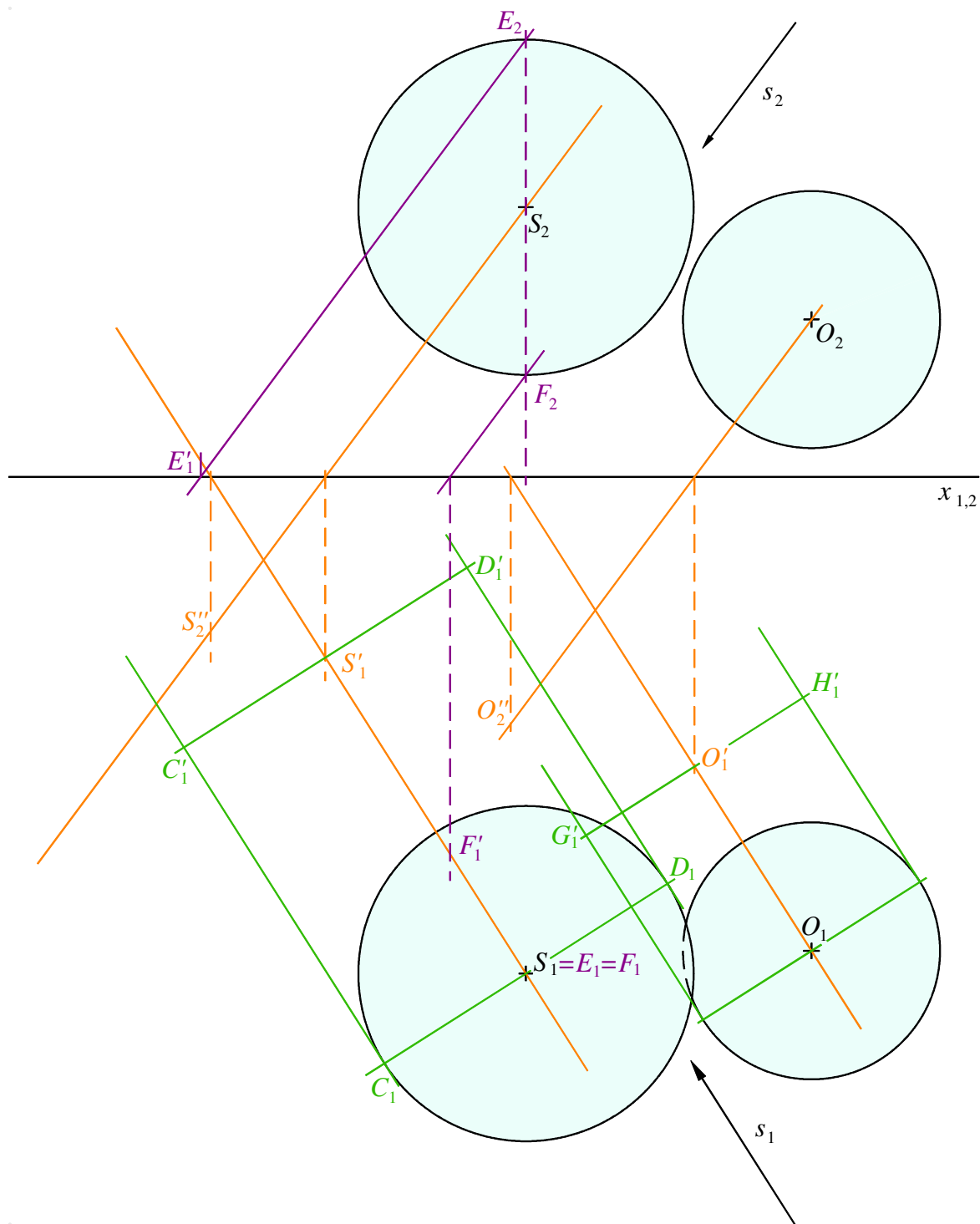
Nejprve sestrojíme stíny vržené koulemi na půdorysnu, resp. nárysnu. Mezemi těchto stínů, pokud existují, jsou elipsy, případně jejich části.

Sestrojme půdorysy S'_1 , O'_1 , resp. nárysy S''_2 , O''_2 stínů S' , O' , resp. S'' , O'' vržených středy S a O koulí na půdorysnu, resp. nárysnu.

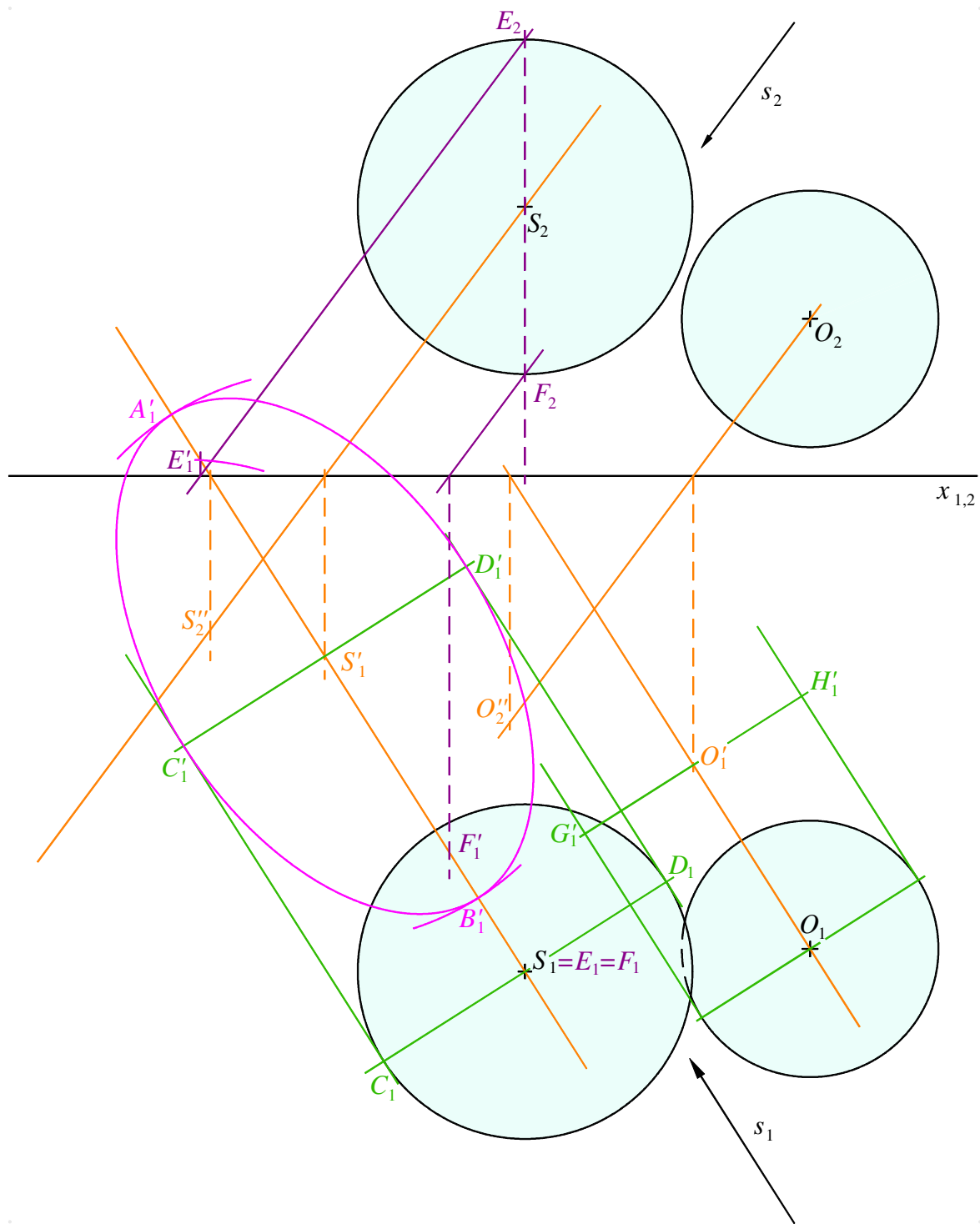
Body S'_1 , O'_1 jsou středy a spojnice $S_1S'_1$, $O_1O'_1$ jsou hlavní osy elips, které jsou mezemi stínů vržených koulemi na půdorysnu.



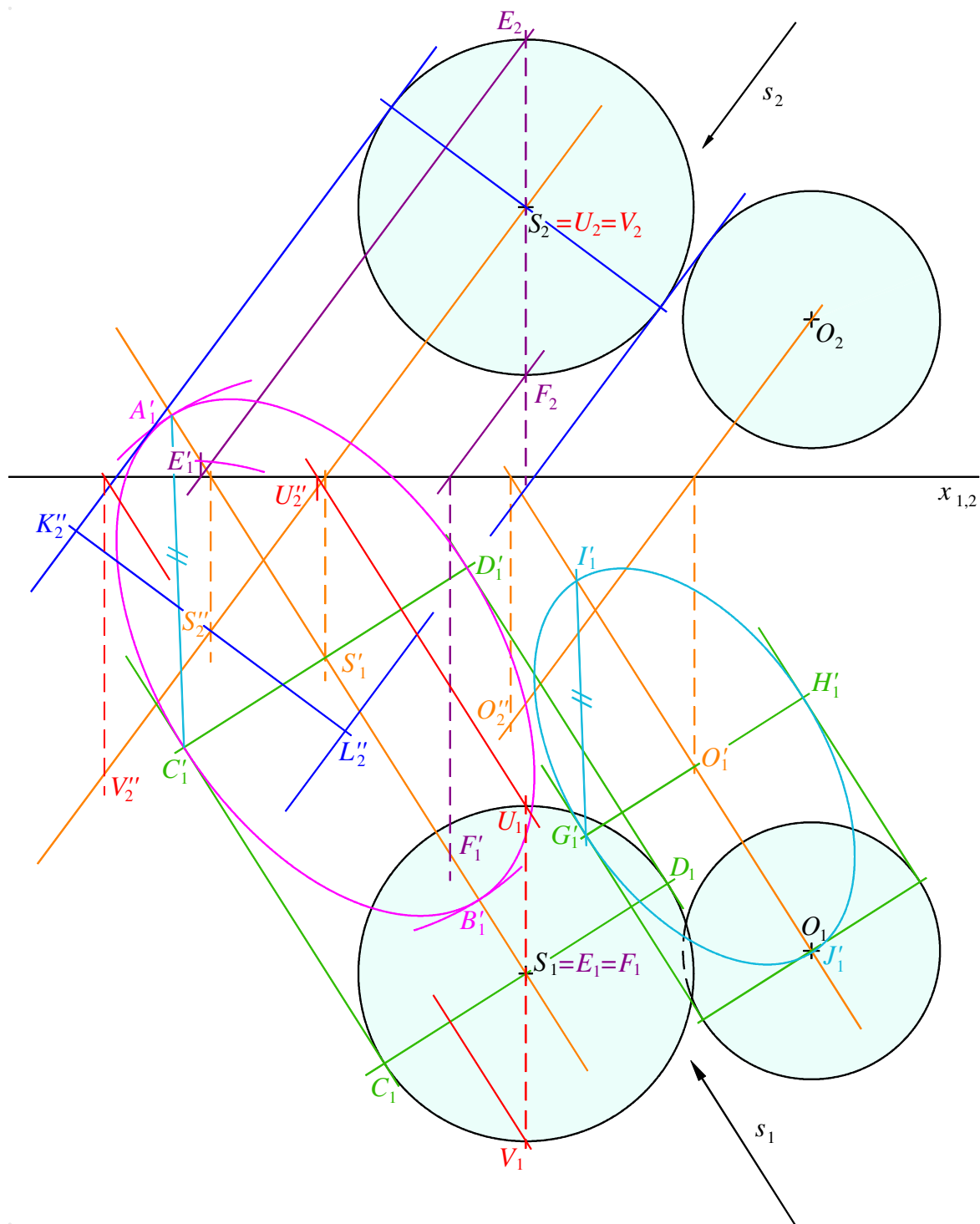
Vedlejší vrcholy C'_1 , D'_1 a G'_1 , H'_1 elips leží na vedlejších osách a délky vedlejších poloos jsou rovny poloměrům jednotlivých koulí.



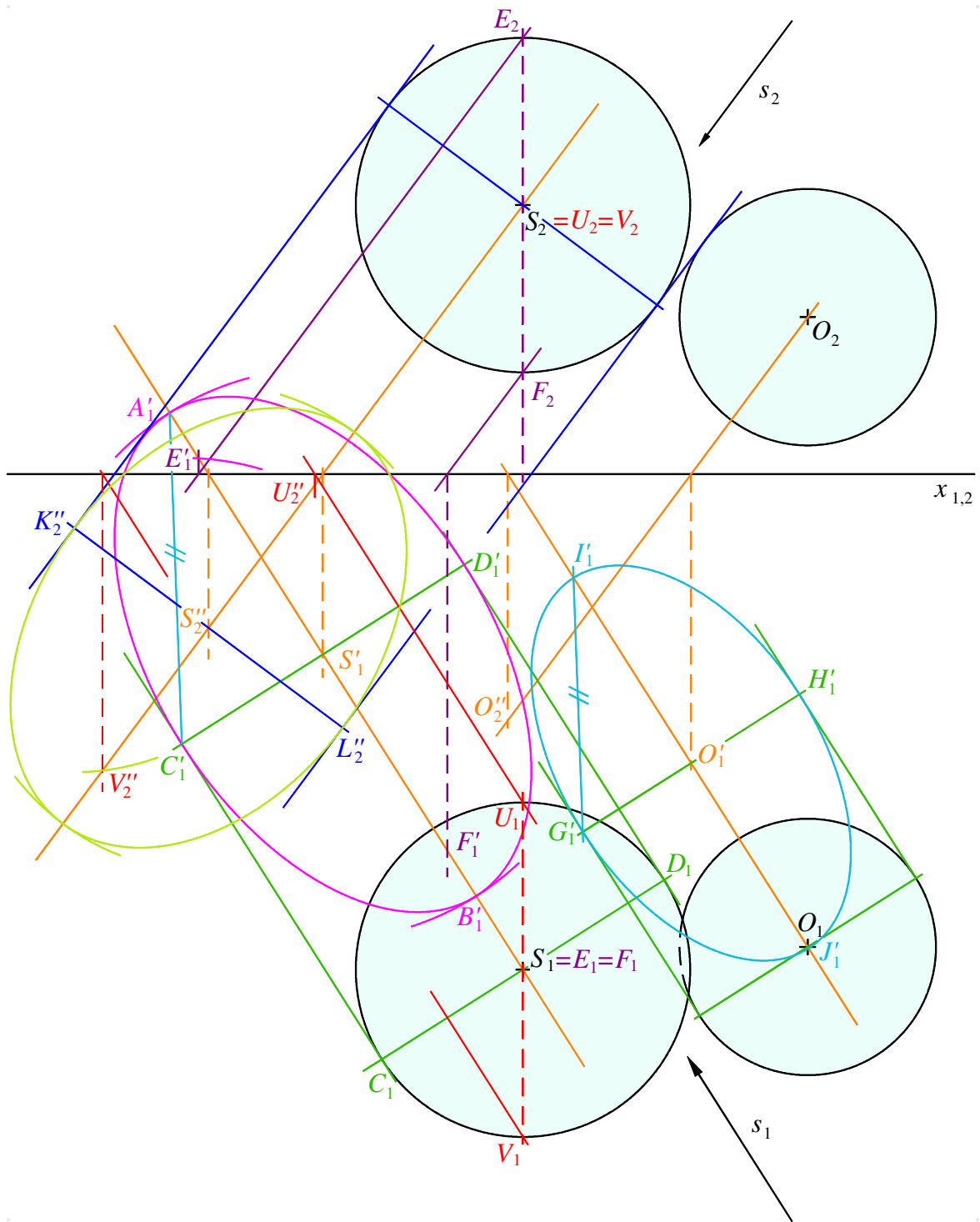
Ohniska E'_1, F'_1 elipsy, která je mezi stínů vržených koulí o středu S na půdorysnu, sestrojíme s využitím Quételetovy-Dandelinovy věty pro kosoúhlý průmět kulové plochy: ohniska elipsy jsou stíny vržené krajními body E, F průměru koule kolmého na půdorysnu. Označíme tedy sdružené průměty E_1, F_1, E_2, F_2 bodů E, F a sestrojíme půdorysy E'_1, F'_1 stínů E', F' vržených zmíněnými body na půdorysnu.



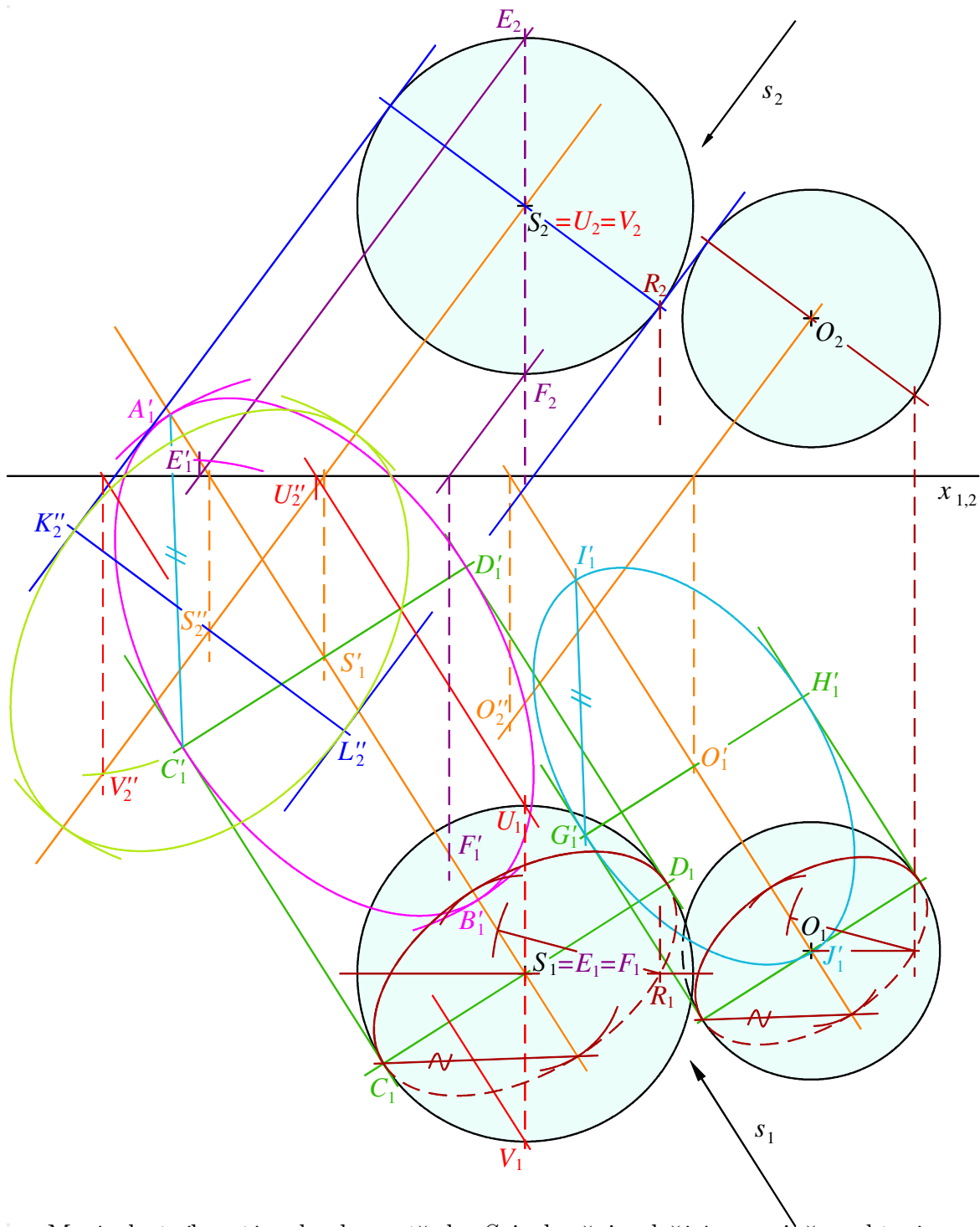
Vedlejšími vrcholy C'_1 , D'_1 a ohnisky E'_1 , F'_1 je elipsa jednoznačně určena.



Ke konstrukci ohnisek elipsy opět využijeme Quételetovu-Dandelinovu větu pro kosoúhlý průmět kulové plochy: ohniska U''_2, V''_2 elipsy jsou nárysy stínů vržených na nárysnu krajními body U, V průměru koule, který je kolmý na nárysnu. Zřejmě $U_2 = V_2 = S_2$ a body U_1, V_1 jsou průsečíky společné ordinály bodů U, V s hraniční kružnicí kruhu, který je půdorysem koule o středu S . Body U''_2, V''_2 jsou nárysy nárysných stopníků světlených paprsků vedených body U a V .

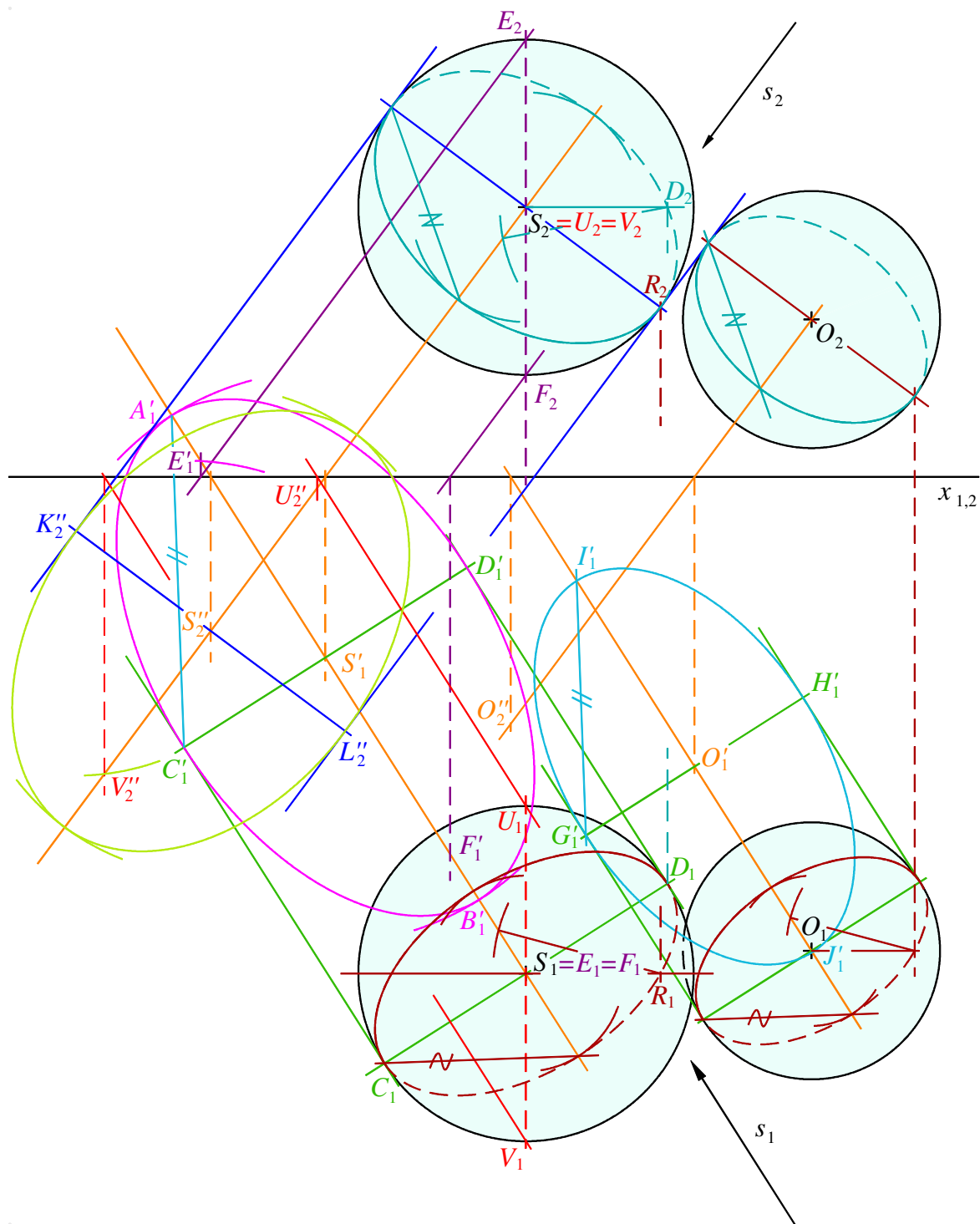


Vedlejšími vrcholy K_2'' , L_2'' a ohnisky U_2'' , V_2'' je elipsa jednoznačně určena.



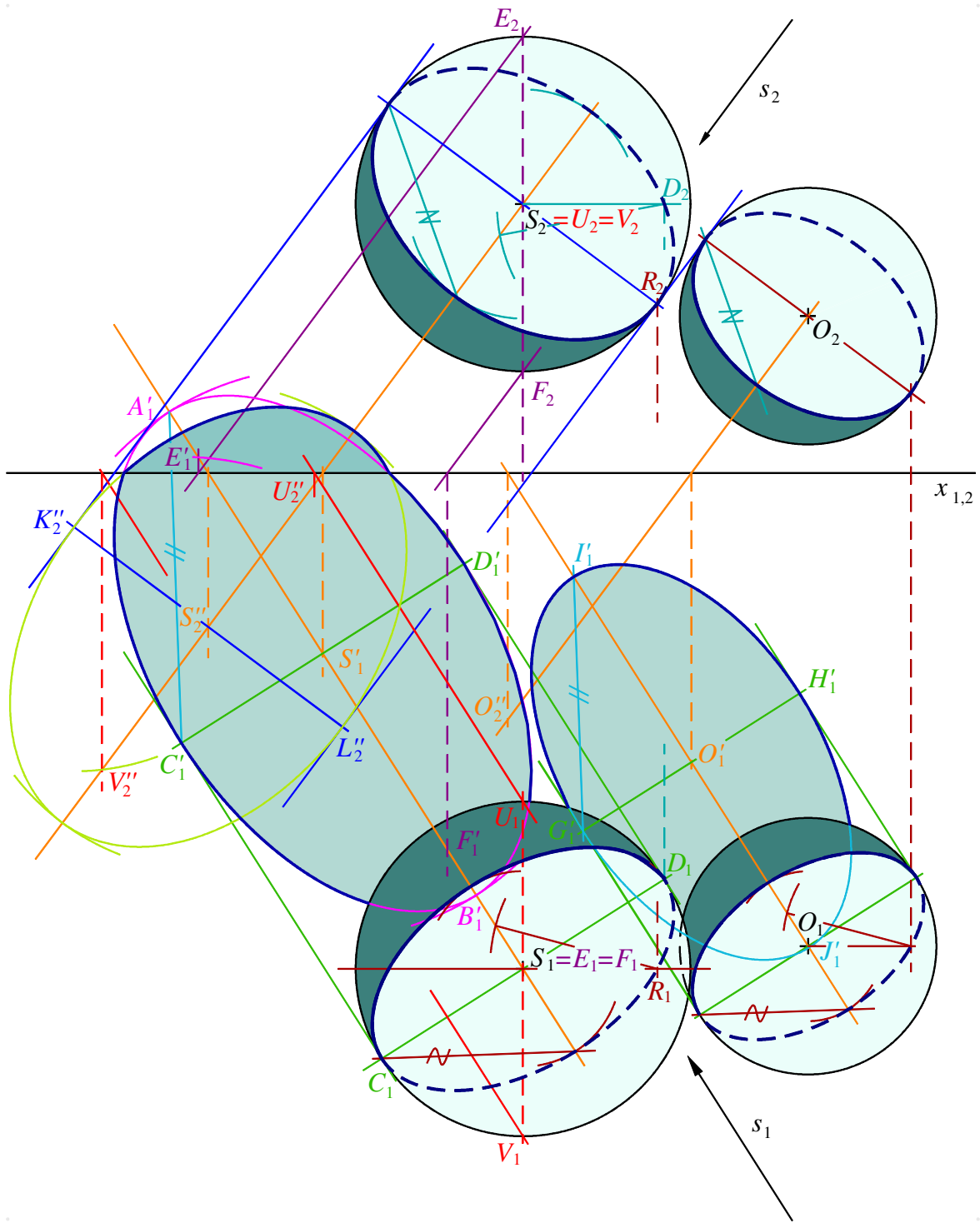
Mezi vlastního stínu koule o středu S je kružnice ležící v rovině α , která prochází bodem S a je kolmá na směr s . Půdorysem této kružnice je elipsa s hlavními vrcholy C_1, D_1 , kterou dourčíme obecným bodem R_1 . Nárys R_2 bodu R je průsečíkem narysu frontály roviny α procházející bodem S (tj. přímky kolmé na s_2 procházející bodem S_2) a dále hraniční kružnice kruhu, který je narysem koule o středu S . Bod R_1 nalezneme pomocí ordinály bodu R na půdorysu zmíněné frontály (tj. na přímce rovnoběžné se základnicí jdoucí bodem S_1). Pomocí rozdílové proužkové konstrukce sestrojíme vedlejší vrcholy elipsy a určíme její viditelnost.

Elipsu, která je půdorysem meze vlastního stínu druhé koule, sestrojíme buď zcela obdobně jako předcházející křivku nebo využijeme podobnosti obou elips (opět se jedná o řezy výše uvedených rotačních válcových ploch stejnou rovinou). Spojnice odpovídajících si hlavních a vedlejších vrcholů elips jsou rovnoběžné.



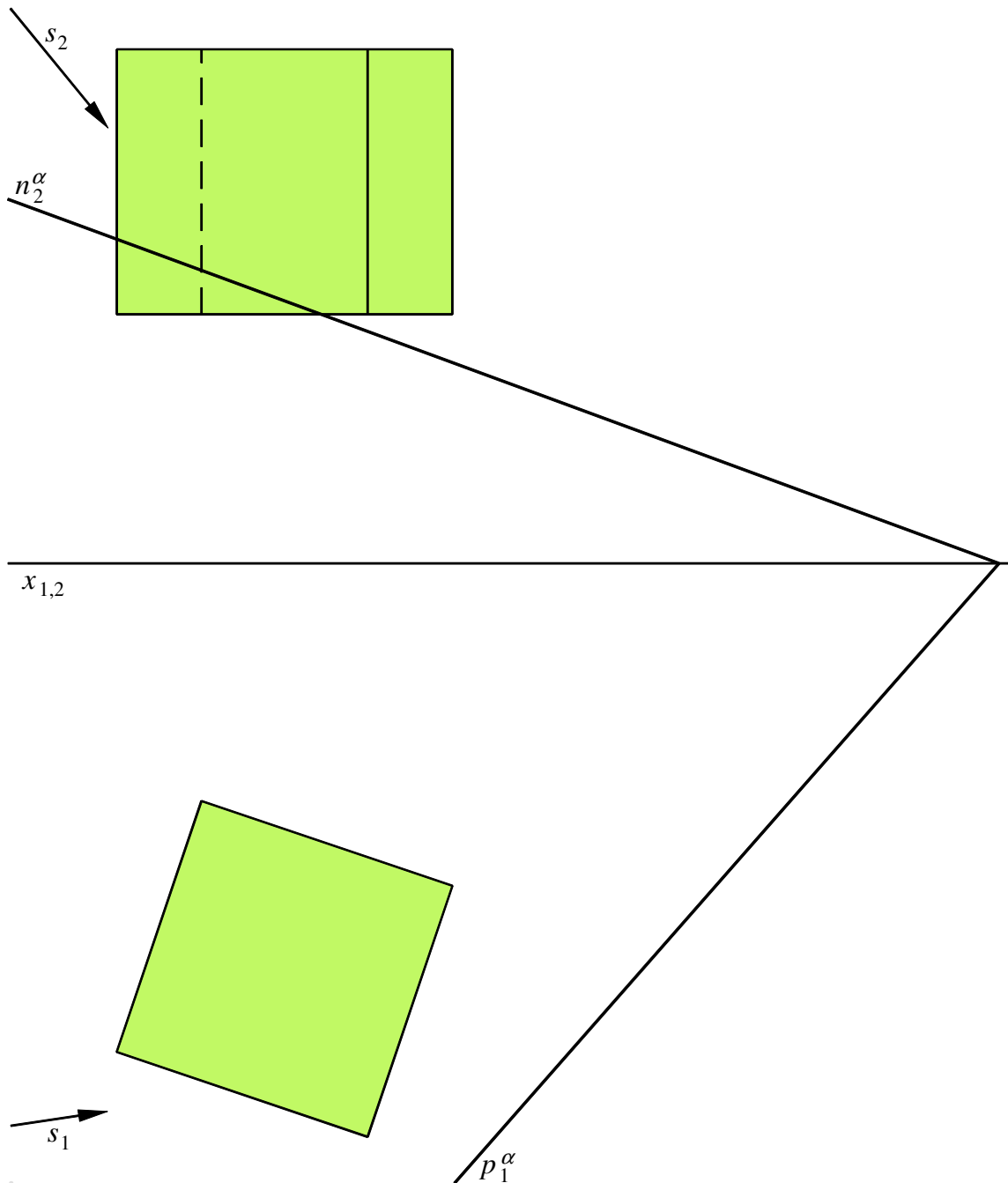
Rovněž nárysy kružnic, které jsou mezemi vlastních stínů obou koulí, jsou navzájem podobné elipsy. Sestrojme nejprve elipsu, která je nárysem meze vlastního stínu koule o středu S . Její hlavní osa je nárysem frontály, který byl sestaven v předchozím kroku (jedním z hlavních vrcholů elipsy je bod R_2). Elipsu dourčíme jejím obecným bodem D_2 . Půdorys D_1 bodu D je průsečíkem půdorysu horizontální přímky roviny α procházející bodem S (tj. přímky kolmé na směr s_1 procházející bodem S_1) a dále hraniční kružnice kruhu, který je půdorysem koule o středu S . Nárys D_2 bodu D nalezneme s využitím ordinály na nárysu uvažované horizontály (tj. na přímce rovnoběžné se základnicí procházející bodem S_2).

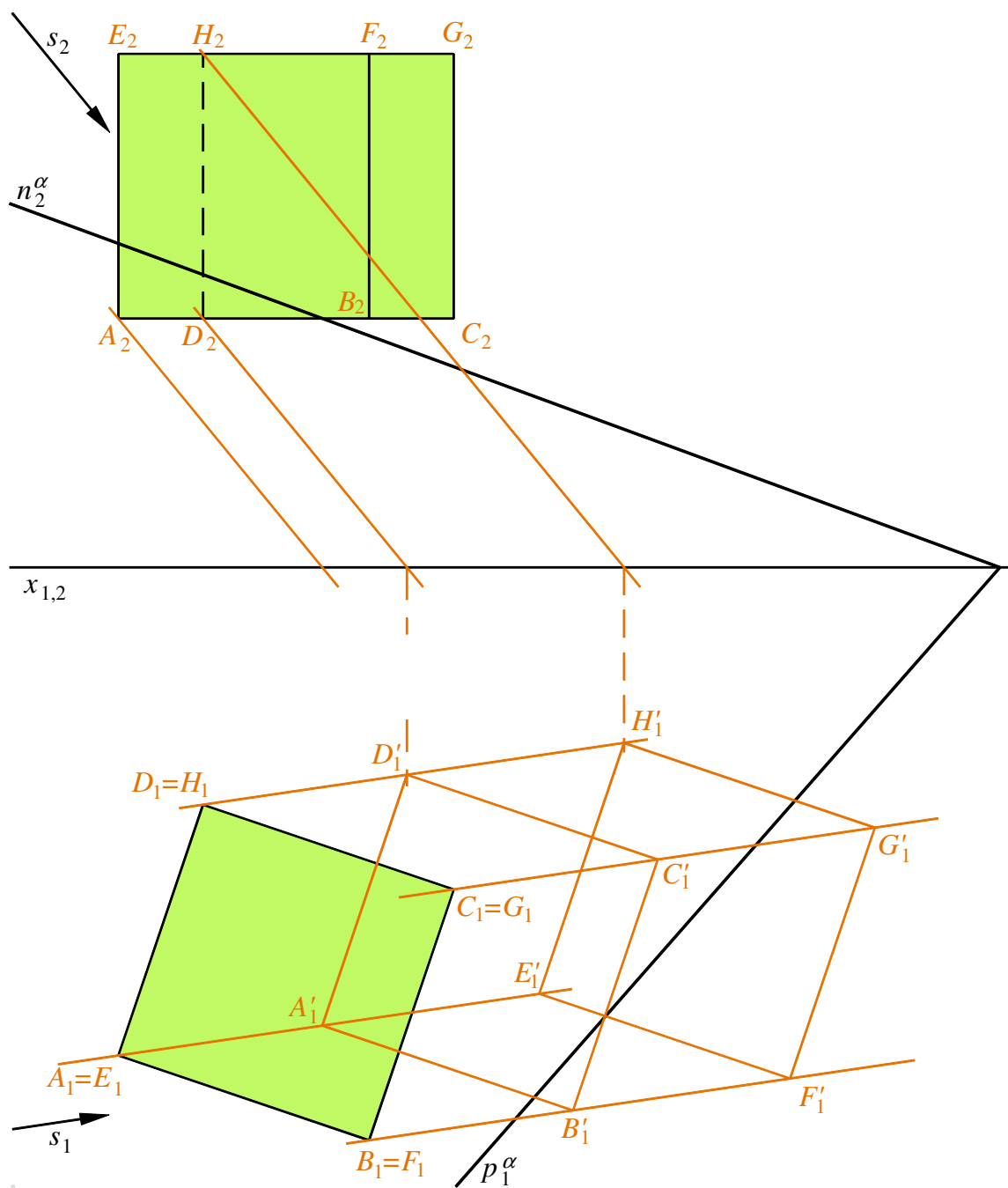
Ke konstrukci elipsy příslušející kouli o středu O využijeme podobnosti elips: spojnice odpovídajících si hlavních a vedlejších vrcholů jsou rovnoběžné.



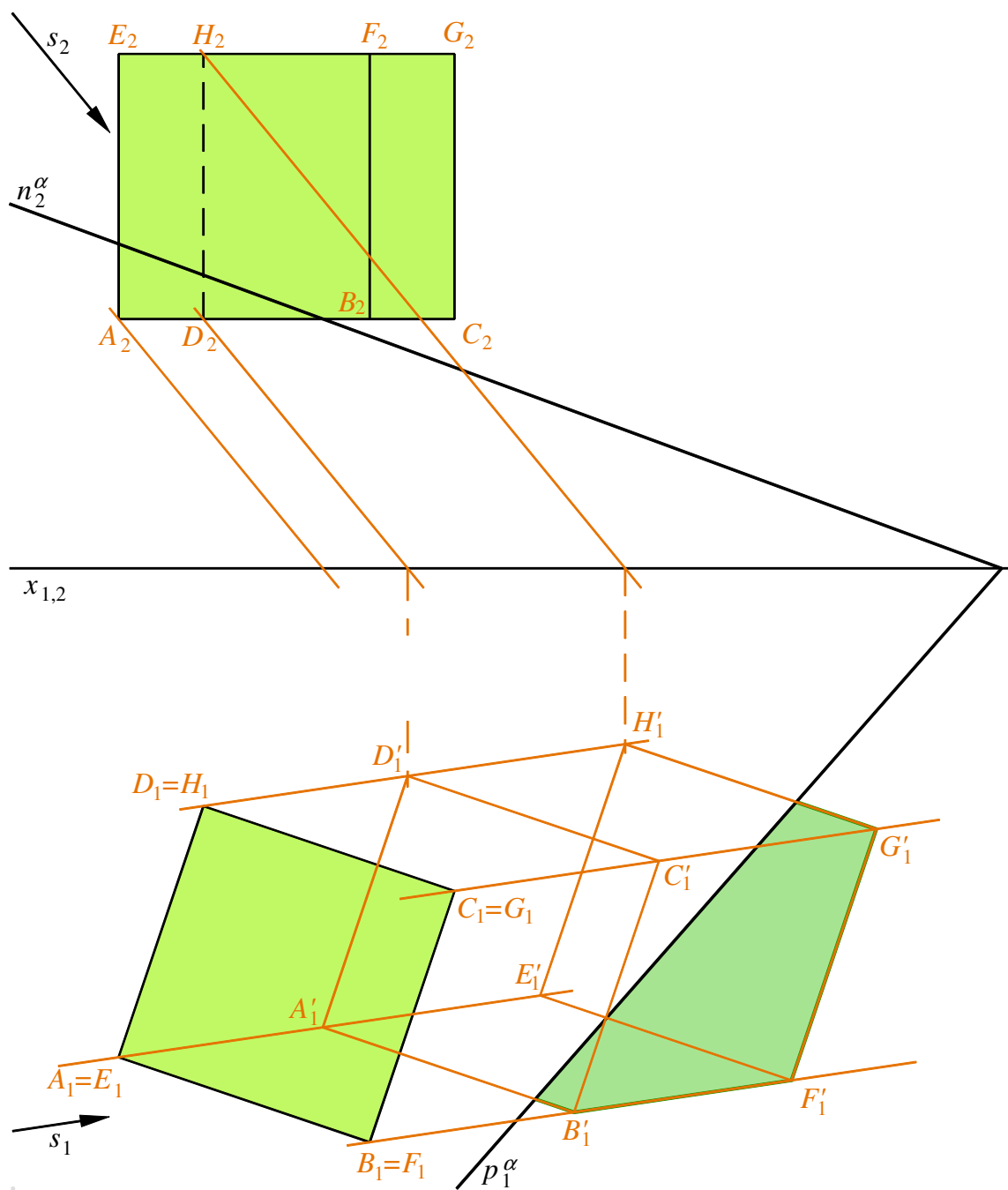
Na závěr zvýrazníme průměty stínů.

Příklad 4. V Mongeově promítání rovnoběžně osvětlete (ve směru s) krychli. Konkrétně určete vlastní stín krychle a dále stíny vržené krychlí na danou rovinu α , na půdorysnu a na nárysnu.

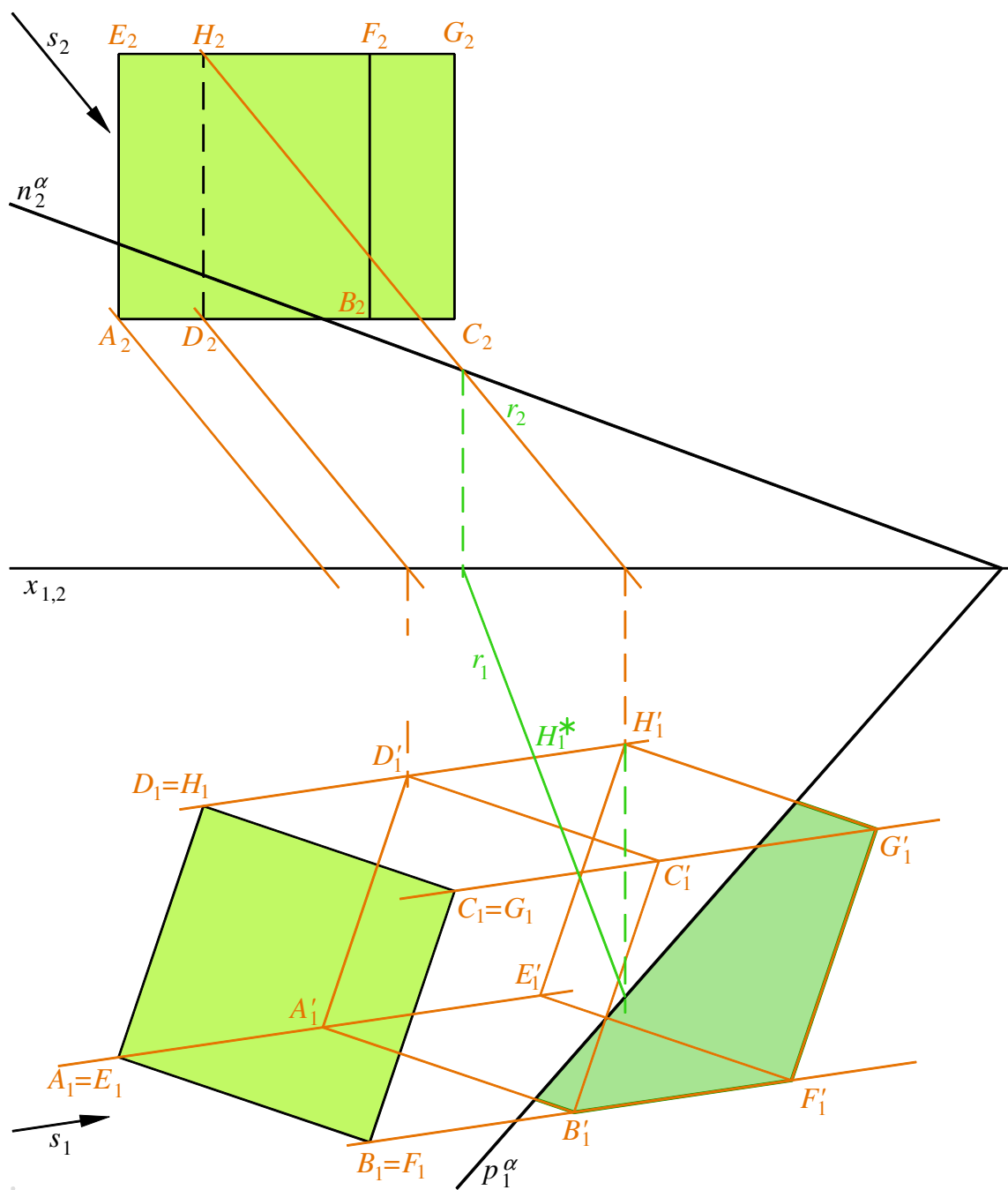




Nejprve pojmenujme vrcholy krychle: A, B, C, D, E, F, G, H . Sestrojme stíny vržené vrcholy krychle na půdorysnu. Protože však stíny vržené podstavami $ABCD$ a $EFGH$ jsou čtverce shodné s těmito podstavami a také se čtvercem $A_1B_1C_1D_1 = E_1F_1G_1H_1$, který je půdorysem obou podstav, není nutné sestrojovat půdorysy stínů vržených na půdorysnu všemi vrcholy tělesa. Postačí sestrojit např. půdorys D'_1 , resp. H'_1 stínu vrženého bodem D , resp. H , což je půdorys půdorysného stopníku světelného paprsku bodu D , resp. H , a poté sestrojit obraz čtverce $A_1B_1C_1D_1 = E_1F_1G_1H_1$ v translaci s vektorem posunutí $D_1D'_1$, resp. $H_1H'_1$. (Na obrázku jsou zobrazeny rovněž sdružené průměty světelného paprsku bodu A , které využijeme později.)

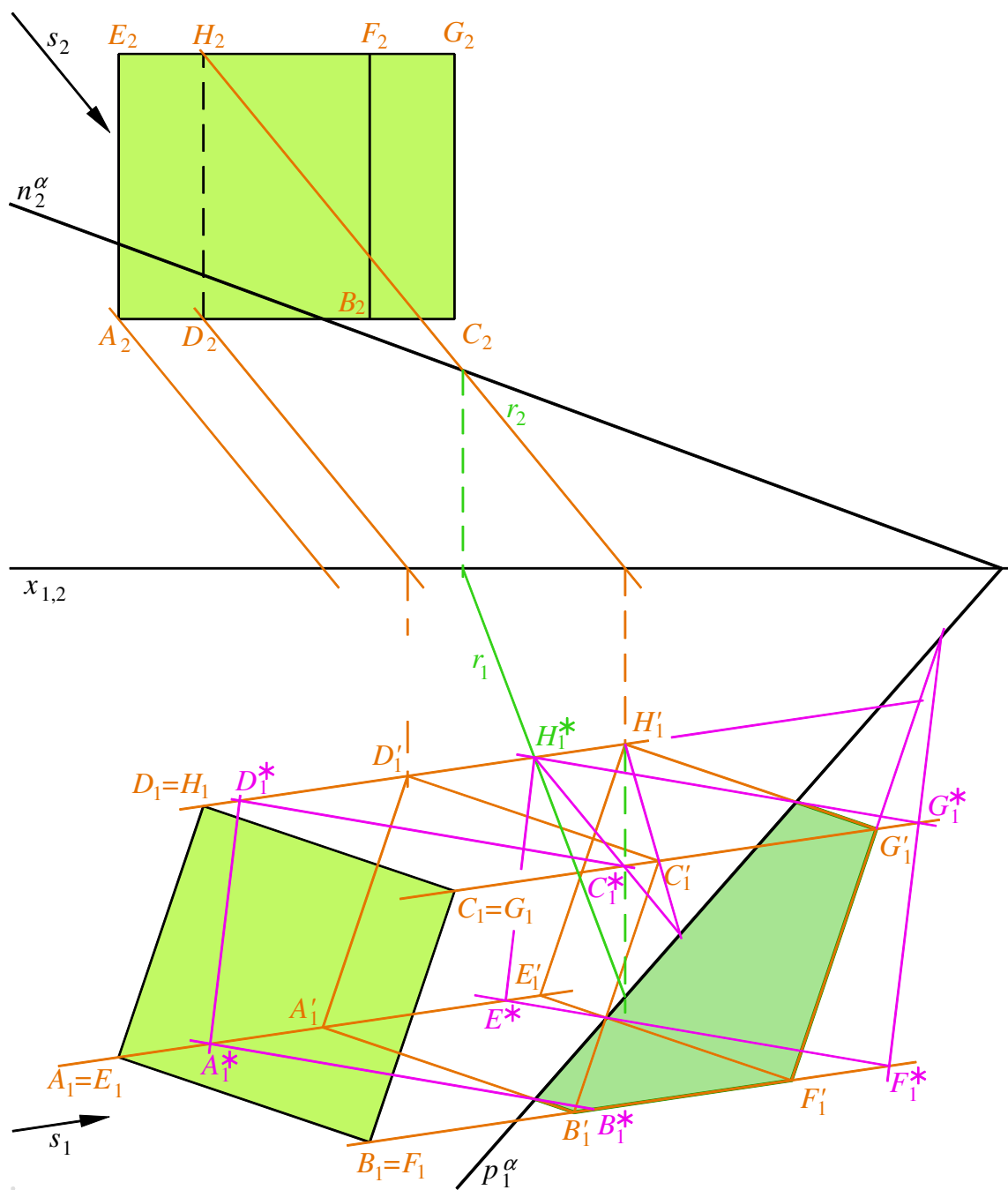


Jelikož při geometrickém osvětlení považujeme roviny za neprůhledné, nebudou všechny sestrojené stíny vržené vrcholy krychle viditelné, neboť příslušné půdorysné stopníky světelných paprsků leží pod rovinou α . Zvýrazněme proto již nyní jen tu část půdorysu stínu vrženého krychle na půdorysnu, která je součástí výsledku. Jedná se o množinu stínů vržených body, jejichž světelné paprsky protínají půdorysnu „dříve“ než rovinu α (průsečíky světelných paprsků s půdorysnou jsou blíže zdroji světla než průsečíky s rovinou α).



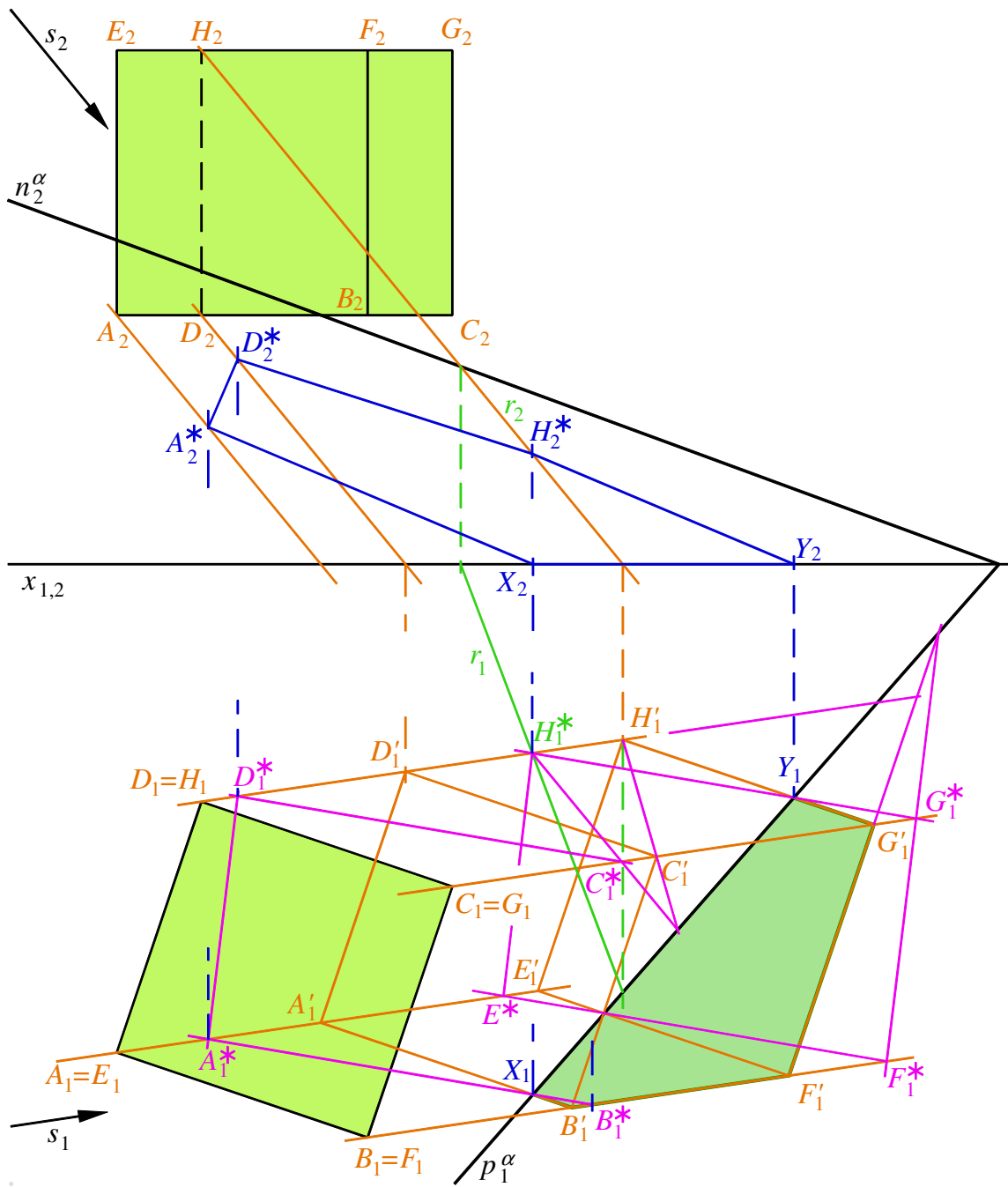
Nyní zobrazíme stín vržený krychlí na rovinu α , který je určen průsečíky světelných paprsků jednotlivých vrcholů krychle s rovinou α (z předchozího je zřejmé, že není nutné sestrojovat stíny vržené vrcholy B , F a G).

Sestrojíme tento průsečík pro vrchol H , a to např. metodou krycích přímek. Nechť nárys světelného paprsku vedeného bodem H splývá s nárysem r_2 přímky r roviny α . Pomocí stopníků přímky r získáme její půdorys r_1 . Průsečíkem přímky r_1 a půdorysu $H_1H'_1$ světelného paprsku vedeného bodem H je půdorys H_1^* hledaného průsečíku neboli půdorys stínu vrženého bodem H na rovinu α .



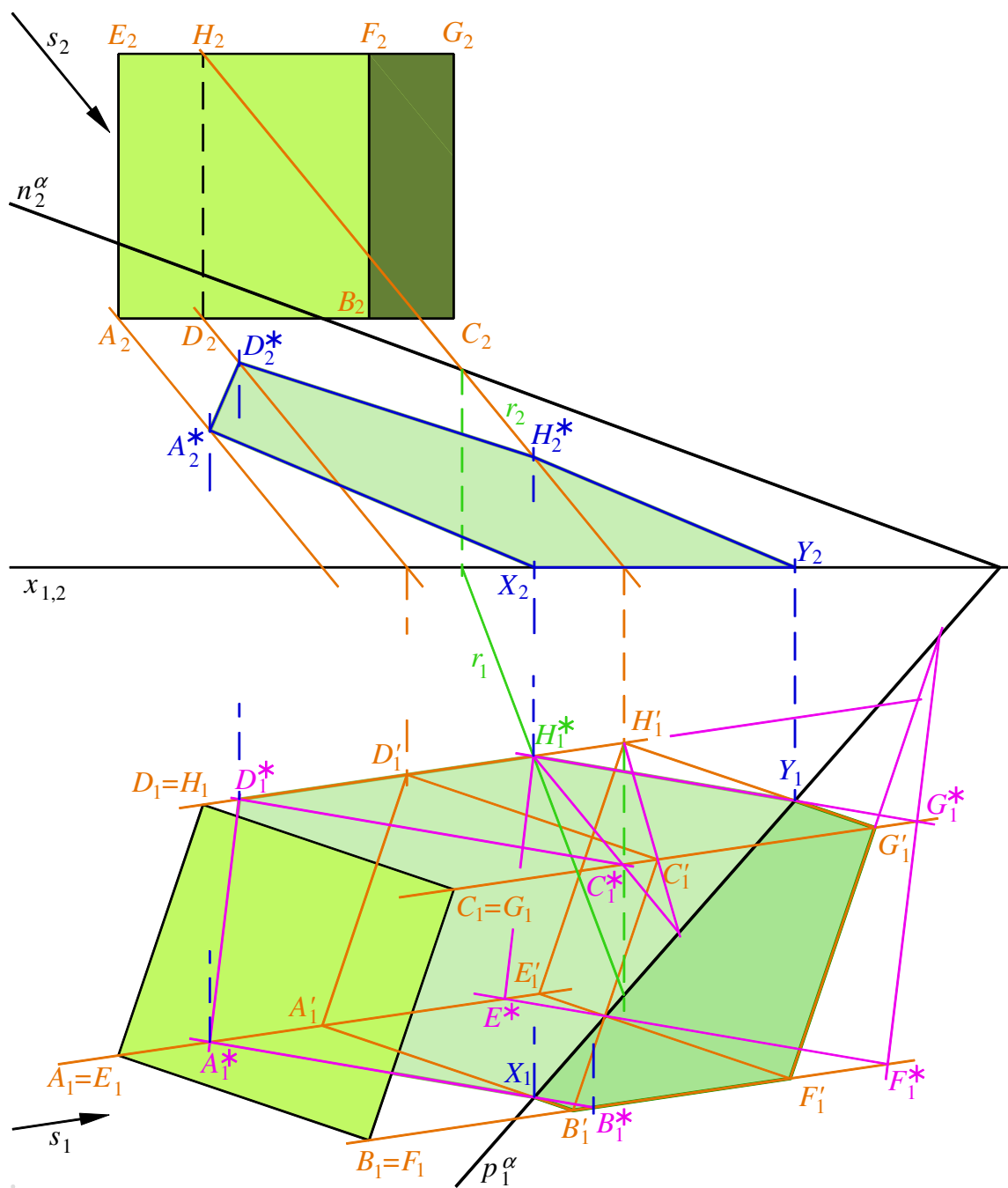
Stíny vržené tělesem na půdorysnu a na rovinu α si odpovídají v prostorové osové afinitě, jejíž osou je půdorysná stopa p^α roviny α a jejímž směrem je směr s osvětlení.

K sestrojení půdorysů A_1^* , C_1^* , D_1^* , E_1^* (případně i B_1^* , F_1^* , G_1^*) stínů vržených dalšími vrcholy krychle na rovinu α proto využijeme osovou afinitu v rovině, jejíž osou je půdorys p_1^α půdorysné stopy p^α roviny α , jejímž směrem je půdorys s_1 směru s osvětlení a v níž si odpovídají body H_1' a H_1^* .



Stínem vrženým krychlí na rovinu α je mnohoúhelník $XYH^*D^*A^*$, kde X, Y jsou průsečíky meze stínu vrženého tělesa na půdorysnu a půdorysné stopy p^α roviny α (půdorys X_1 bodu X je průsečík přímek $A_1'B_1'$ a p_1^α , půdorys Y_1 bodu Y je průsečík přímek $G_1'H_1'$ a p_1^α).

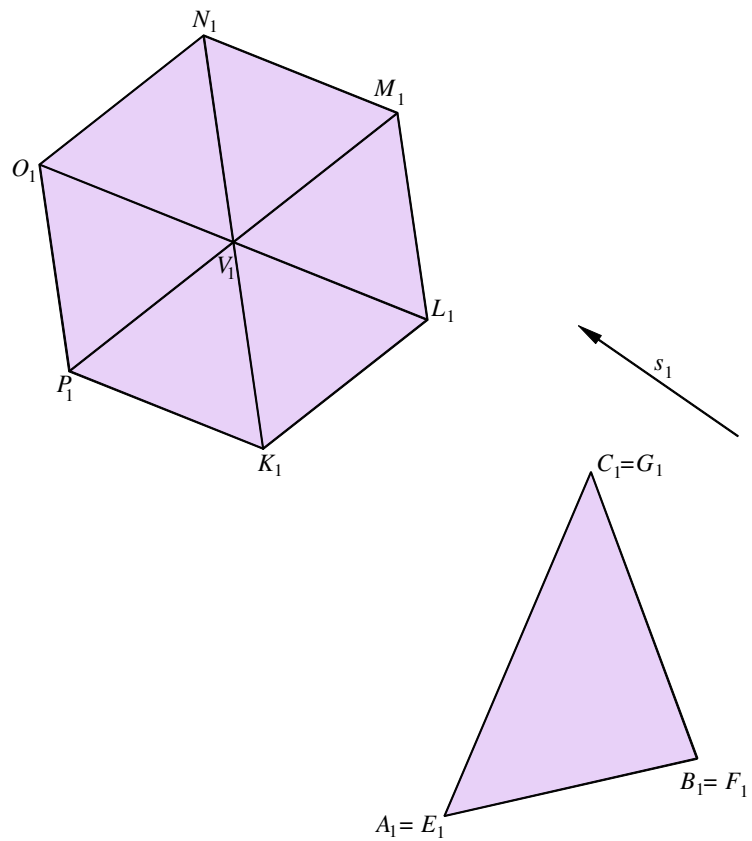
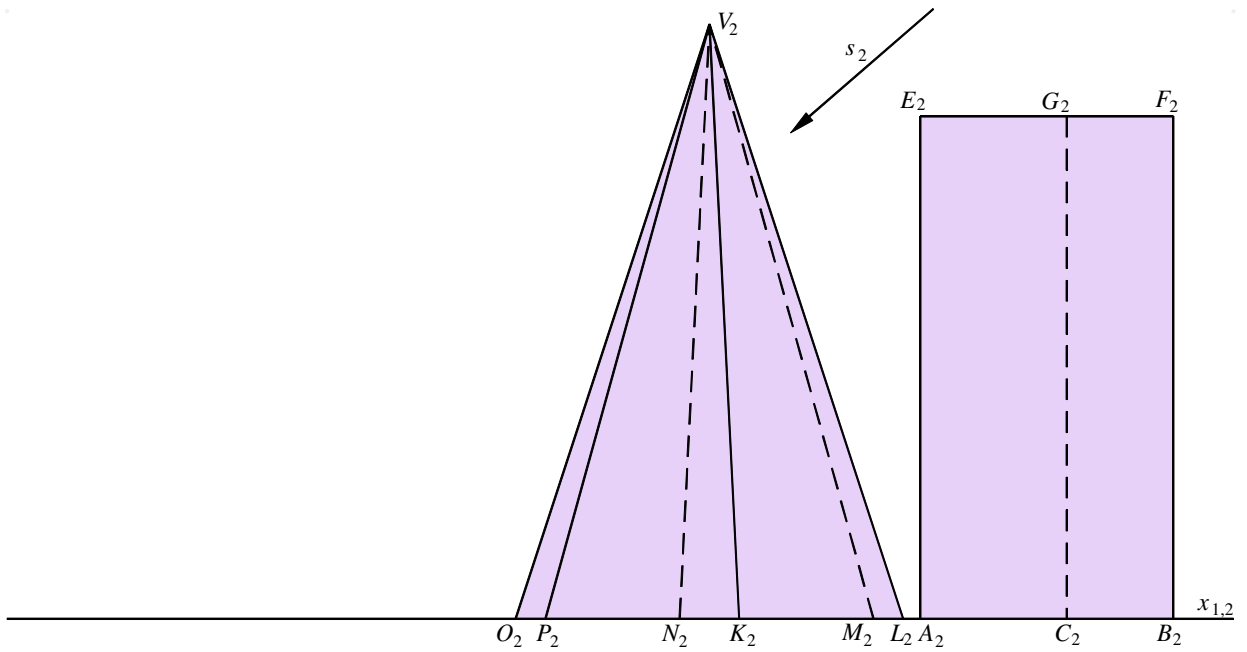
Nárysy X_2, Y_2 bodů X, Y nalezneme s využitím ordinál na základnici, nárysy A_2^*, D_2^*, H_2^* bodů A^*, D^*, H^* nalezneme pomocí ordinál na nárysech příslušných světelných paprsků.

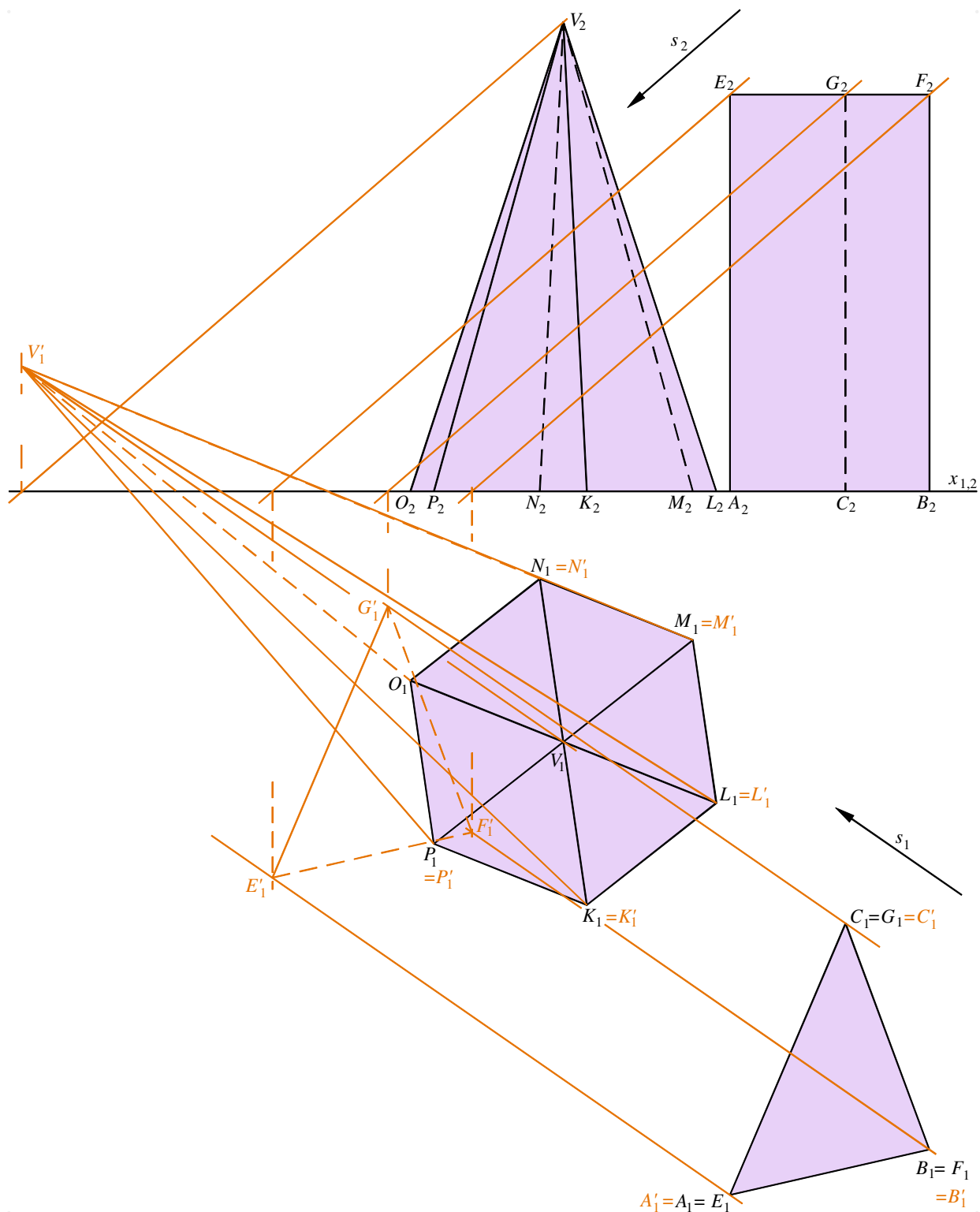


Jelikož mezi stínu vrženého na půdorysnu (pokud neuvažujeme rovinu α) je uzavřená lomená čára s vrcholy A' , B' , F' , G' , H' , D' , je mezi stínu vlastního uzavřená prostorová lomená čára s vrcholy A , B , F , G , H a D .

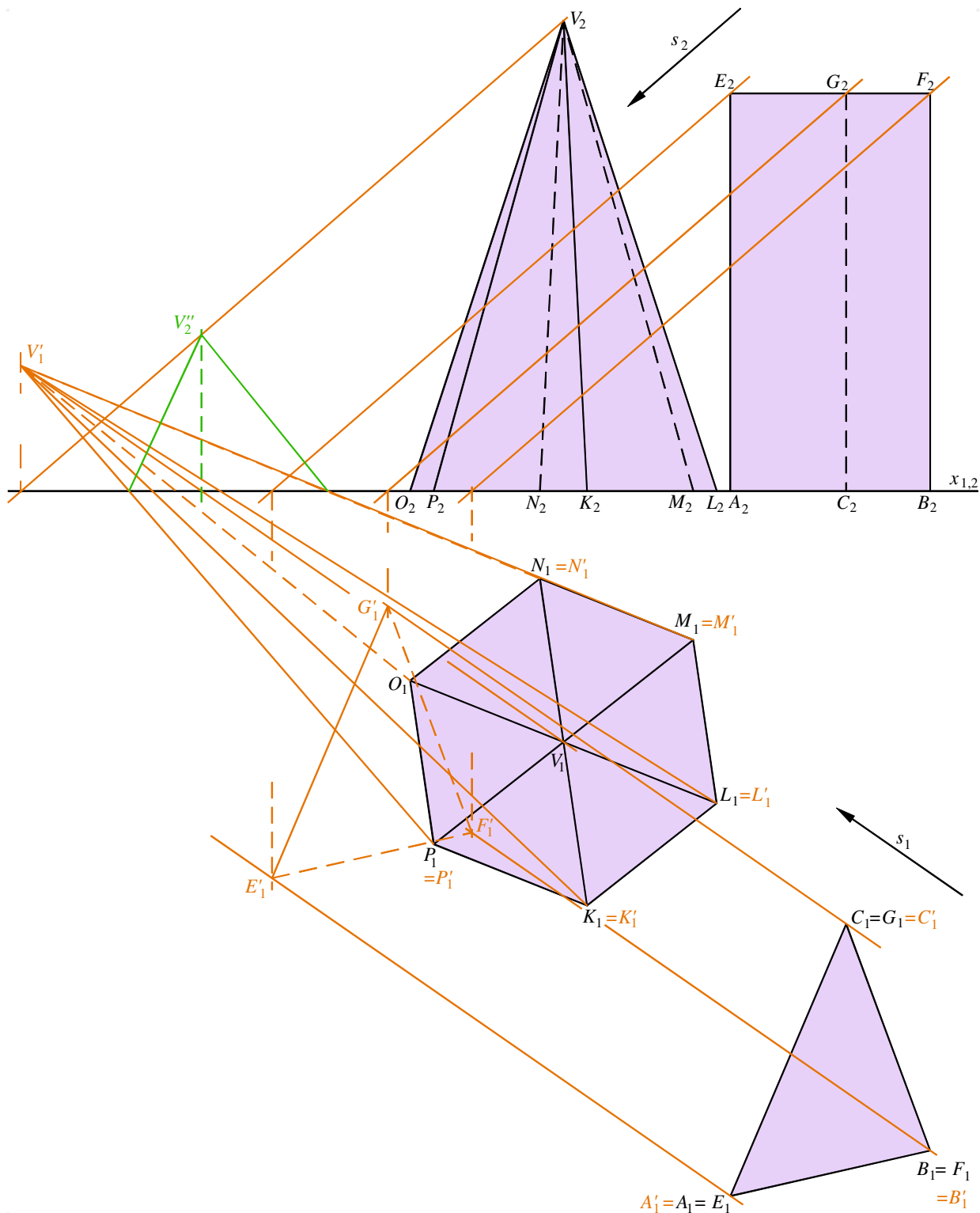
Posledním krokem řešení je barevné zvýraznění sdružených průmětů vlastního stínu krychle a stínu vrženého krychlí na rovinu α .

Příklad 5. V Mongeově promítání rovnoběžně osvětlete (ve směru s) sestavu dvou těles: hranolu $ABCEFG$ a jehlanu $KLMNOPV$.



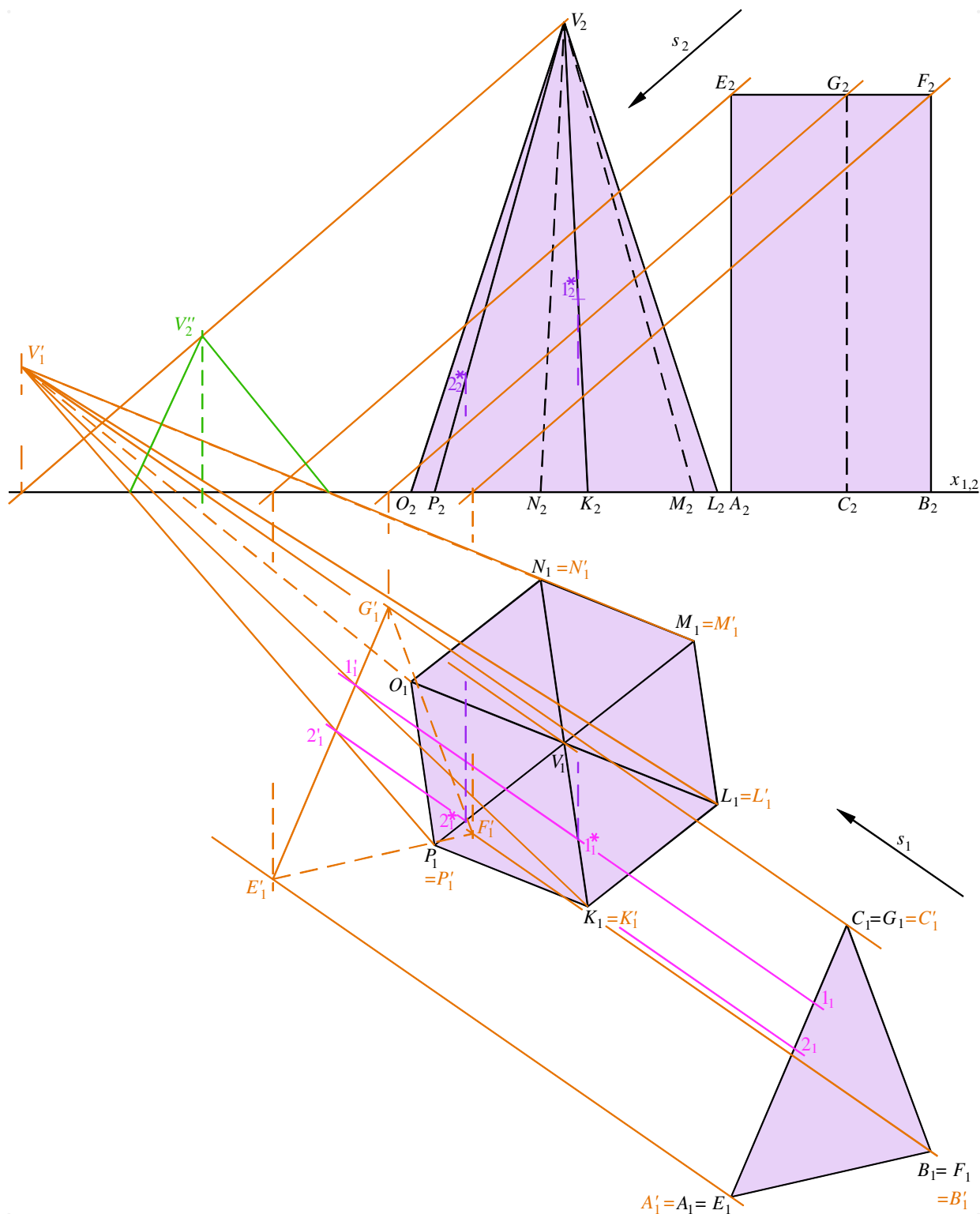


Nejprve sestrojíme stíny vržené tělesy na půdorysnu. Podstava jehlanu a dolní podstava hranolu leží v půdorysně. Stačí tedy sestrojít stíny vržené na půdorysnu vrcholem V jehlanu a vrcholy E , F , G hranolu. Půdorysy V'_1 , E'_1 , F'_1 , G'_1 stínů V' , E' , F' , G' jsou půdorysy půdorysných stopníků světelných paprsků procházejících body V , E , F a G .

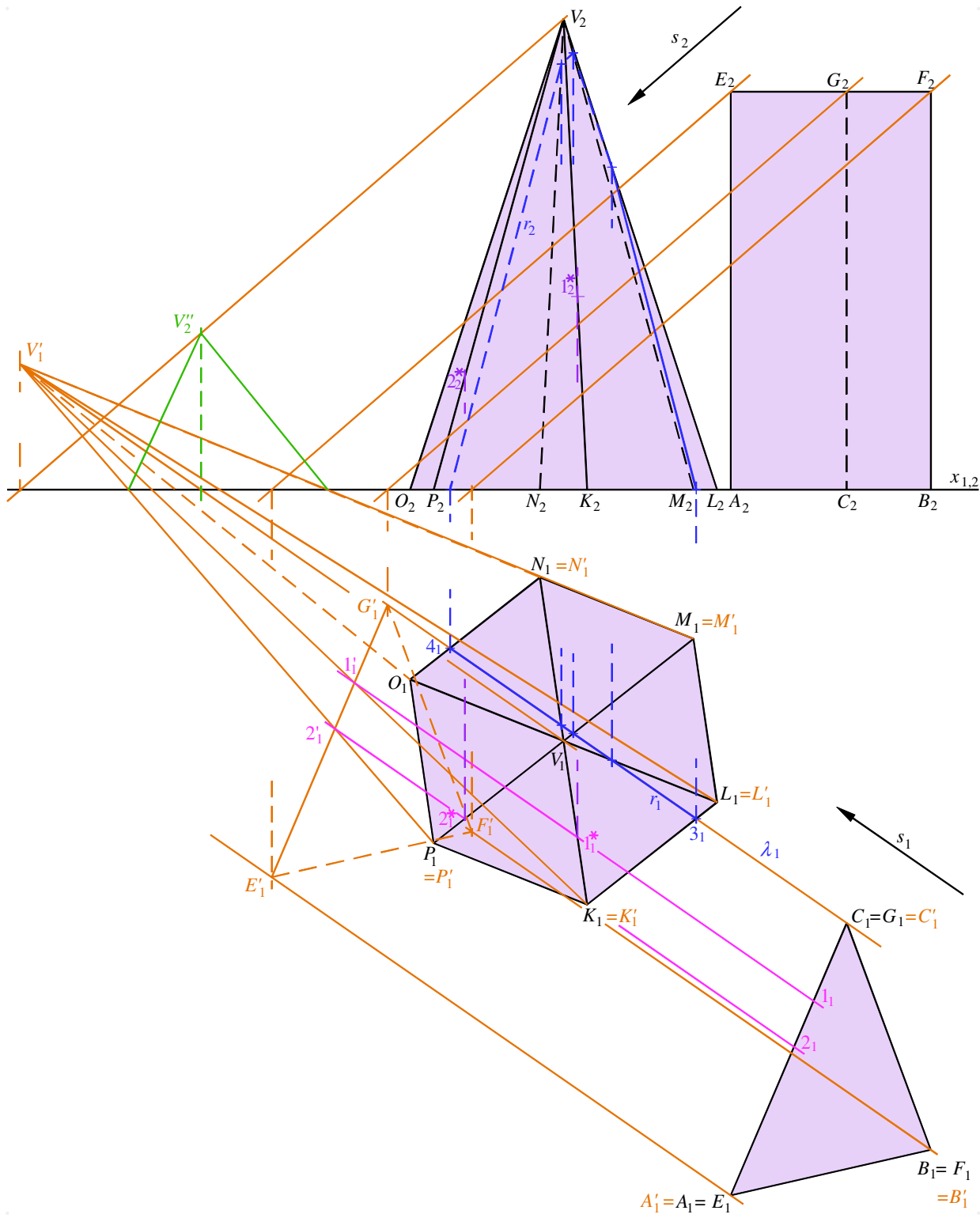


Protože stín vržený hranolem na půdorysnu neprotíná základnici, nevrhá hranol stín na nárysnu.

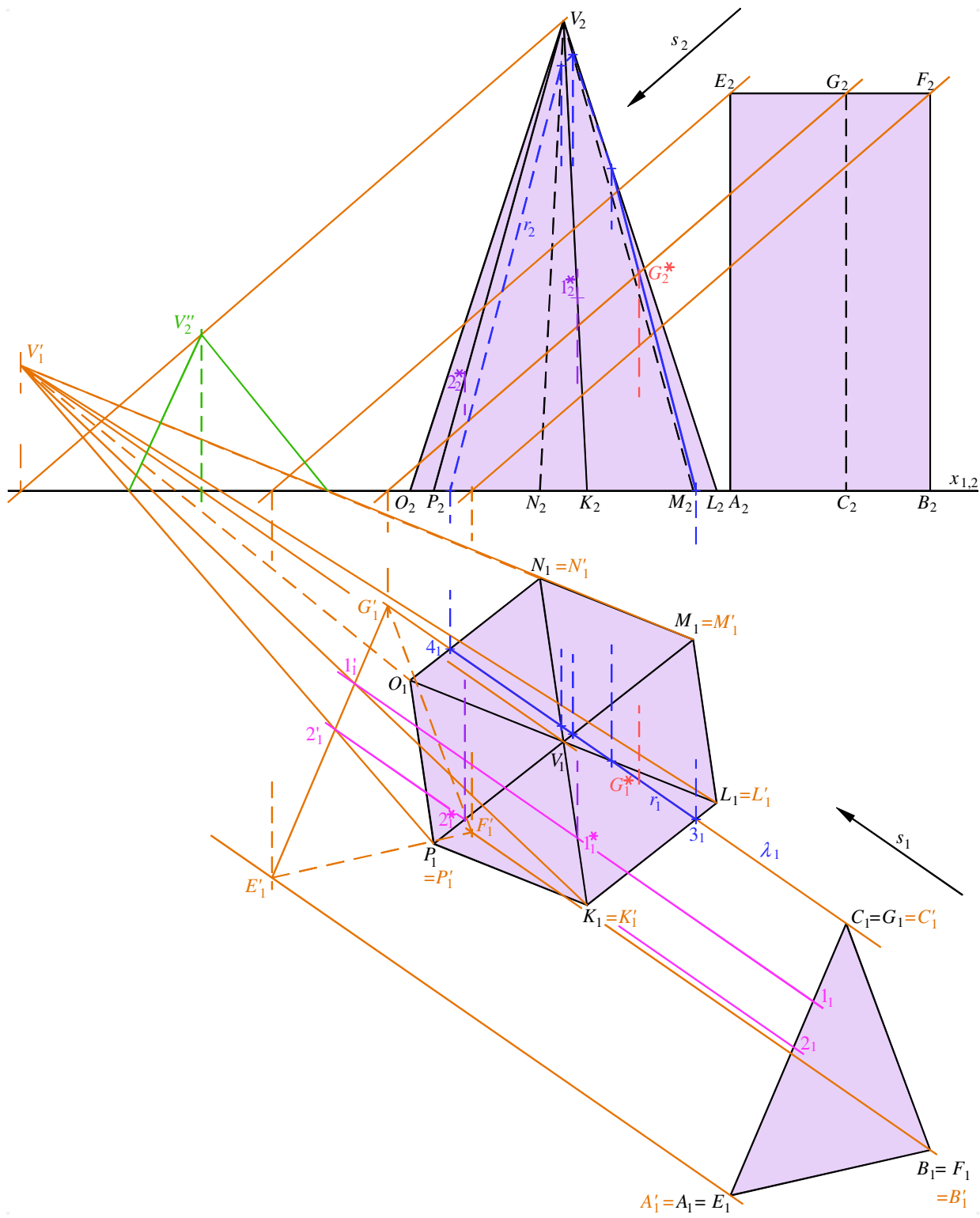
Pro jehlan je situace opačná a je nutné sestrojít stín vržený jehlanem na nárysnu. Jelikož stín V' vržený vrcholem V leží za nárysnou (půdorys V'_1 stínu V' leží nad základnicí), sestrojíme nárys V''_2 stínu V'' vrženého vrcholem V jehlanu na nárysnu. Bod V''_2 poté spojíme s průsečíky (půdorys) meze stínu vrženého jehlanem na půdorysnu (konkrétně s průsečíky úseček $P'_1V'_1$, $M'_1V'_1$) a základnice.



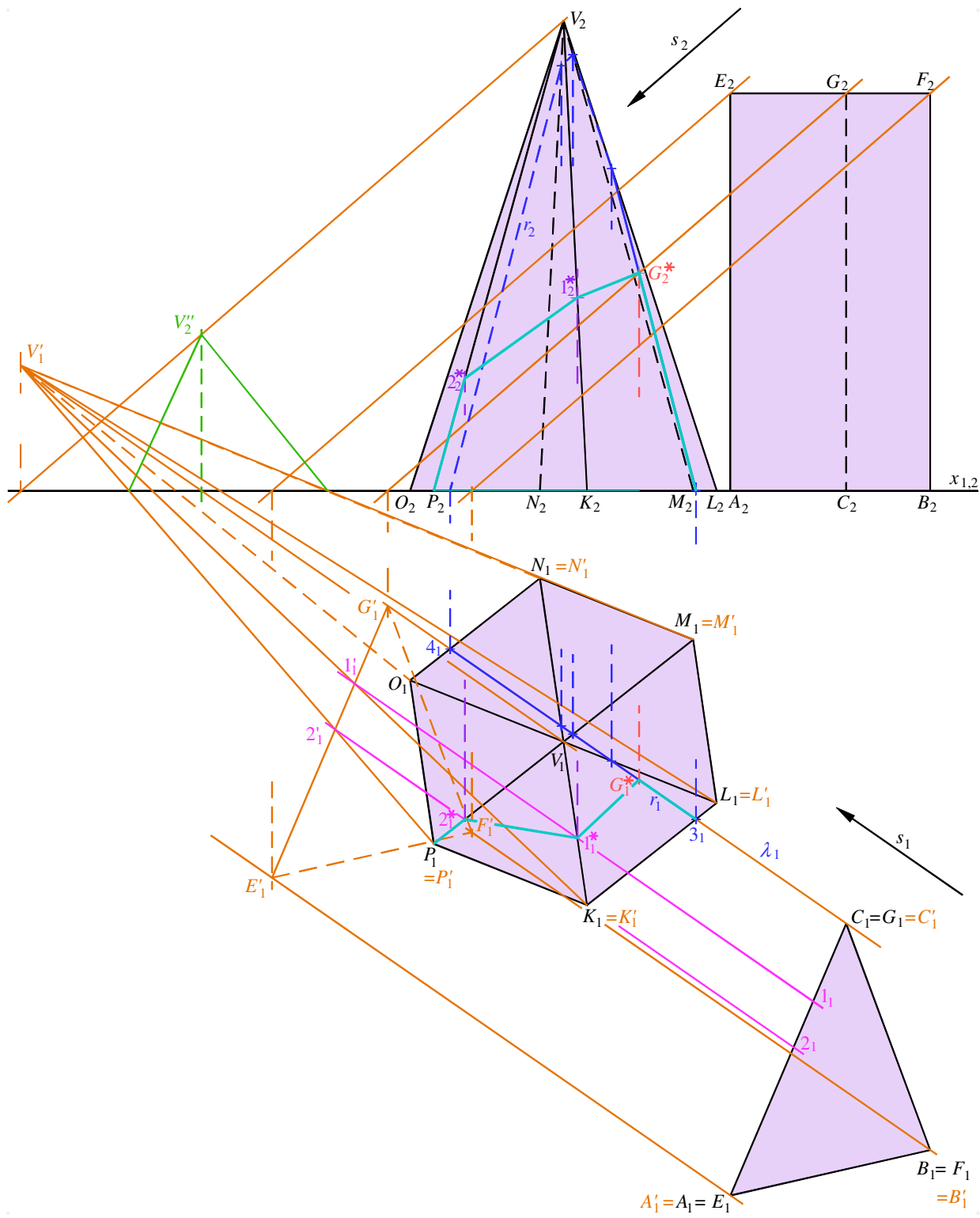
Dále zobrazíme stín vržený hranolem na jehlan. Začneme nalezením bodů, v nichž se na hranách jehlanu lomí stíny vržené hranami hranolu. Nalezneme existující průsečíky půdorysů stínů vržených hranami hranolu s půdorysy stínů vržených hranami jehlanu na půdorysnu. Jedná se o body $1_1'$ (průsečík úseček $K_1'V_1'$ a $E_1'G_1'$) a $2_1'$ (průsečík úseček $P_1'V_1'$ a $E_1'G_1'$). Metodou zpětných paprsků nalezneme půdorysy $1_1^*, 2_1^*$ bodů $1^*, 2^*$, v nichž body 1, 2 náležející hraně EG hranolu vrhají stín na hrany KV, PV jehlanu. (Metodou zpětných paprsků můžeme nalézt i půdorysy $1_1, 2_1$ bodů 1, 2, ale tyto půdorysy nehrají v řešení žádnou roli.) Pomocí ordinál sestrojíme rovněž nárysy $1_2^*, 2_2^*$ bodů $1^*, 2^*$.



Hledejme průsečík G^* světelného paprsku procházejícího bodem G s povrchem jehlanu (žádný jiný vrchol hranolu stín na jehlan nevrhá). Zmíněným paprskem proložíme půdorysně promítací rovinu λ . Označme r řez pláště jehlanu rovinou λ . Řezem r je prostorová lomená čara, jejímž půdorysem je úsečka $r_1 = 3_1 4_1$. Pomocí ordinál sestrojíme nárys r_2 řezu r .

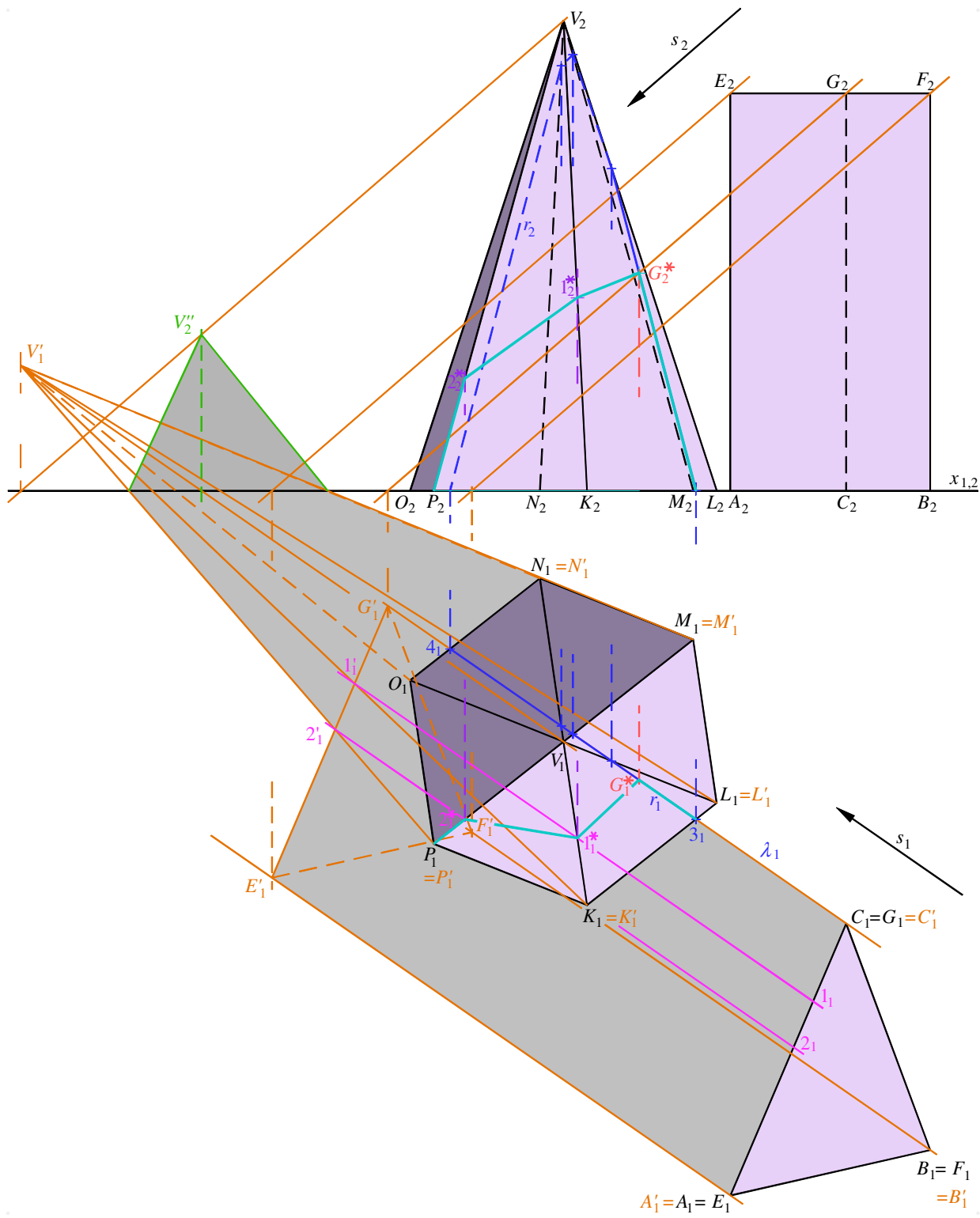


Průsečík nárýsu světelného paprsku vedeného bodem G s nárýsem r_2 řezu r je nárýs G_2^* průsečíku G^* tohoto paprsku s pláštěm jehlanu. Pomocí ordinály nalezneme na půdorysu r_1 řezu r půdorys G_1^* tohoto bodu.

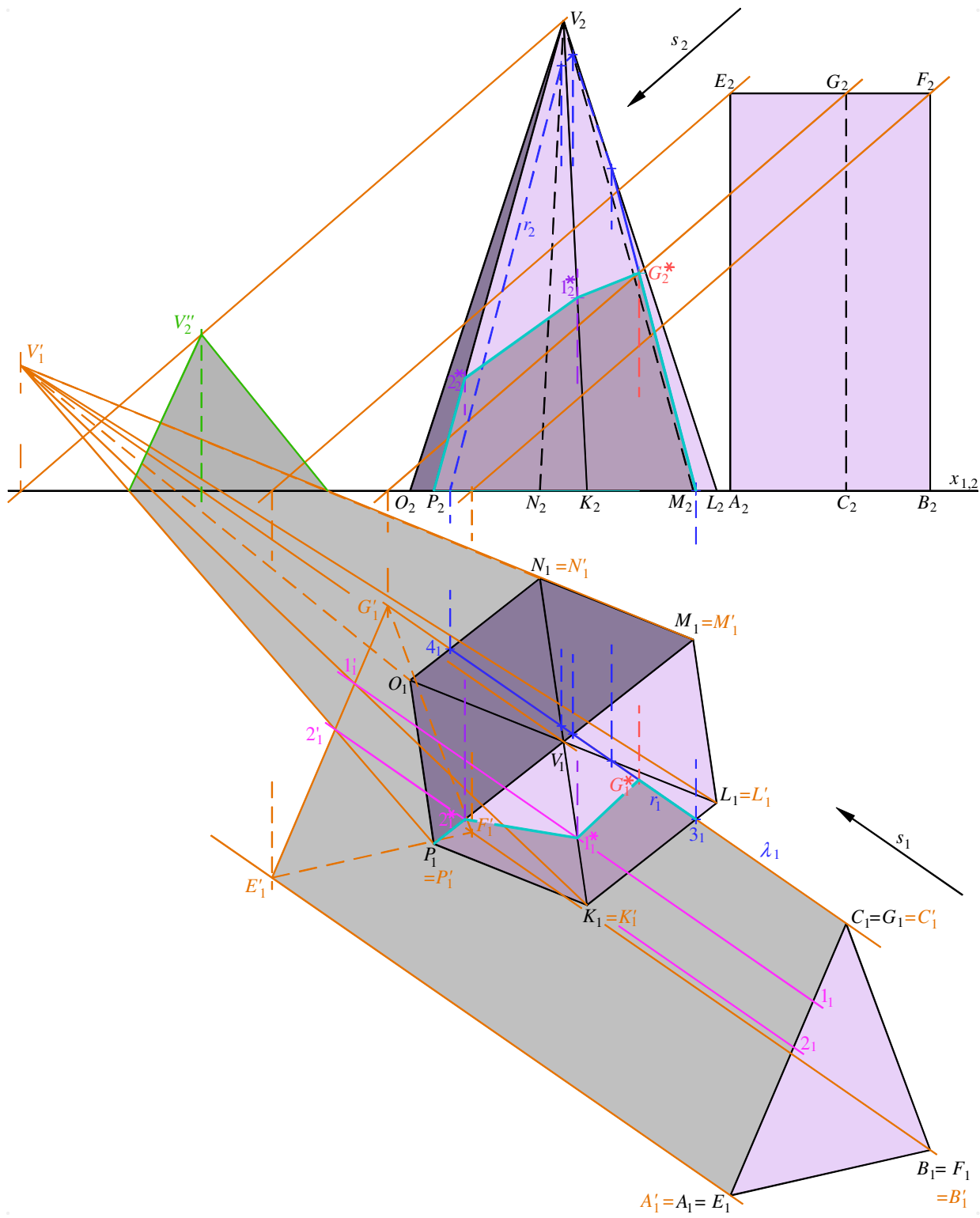


Mezi stínu vrženého hranolem, resp. jehlanem na půdorysnu je uzavřená lomená čára s vrcholy A' , B' , C' , G' , E' , resp. (pomineme-li dočasně nárysnu) P' , K' , L' , M' , V' , mezi vlastního stínu hranolu, resp. jehlanu je tedy prostorová lomená čára s vrcholy A , B , C , G , E , resp. P , K , L , M , V .

Mez stínu vrženého hranolem na jehlan tvoří uzavřená prostorová lomená čára, jejíž vrcholy jsou P , K , 3 , G^* , 1^* , 2^* . Sestrojíme její půdorys a nárys.



Zvýrazníme sdružené průměty stínů vržených tělesy na půdorysnu a nárysnu a také vlastních stínů hranolu a jehlanu. (V případě hranolu však není ani v půdorysu, ani v nárysu vidět žádná neosvětlená stěna.)



Zbývá zvýraznit rovněž sdružené průměty stínu vrženého hranolem na jehlan.