CHARAKTERISTICKÝ A MINIMÁLNÍ POLYNOM MATICE, SPEKTRUM A STOPA MATICE, VLASTNÍ ČÍSLA A VLASTNÍ VEKTORY MATICE

Příklad 1. Určete hodnotu polynomu $h(\lambda) = 2\lambda^3 - 5\lambda^2 - 3\lambda + 7$ nad polem komplexních čísel $\mathbb{C}$ v matici

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix},$$

která je maticí nad polem komplexních čísel $\mathbb{C}$.

Příklad 2. Určete hodnotu polynomu $h(\lambda) = \lambda^3 + 4\lambda + 4$ nad polem $\mathbb{Z}_5$ v matici

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix},$$

která je maticí nad polem $\mathbb{Z}_5$.

Příklad 3. Vypočítejte charakteristický polynom matice a stopu matice A nad polem komplexních čísel $\mathbb{C}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Příklad 4. Vypočítejte charakteristický polynom matice a stopu matice A nad polem komplexních čísel $\mathbb{C}$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \mathrm{i} & 3 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & \mathrm{i} \end{pmatrix}$$

Příklad 5. Charakteristický polynom jisté matice je $p(\lambda) = (\lambda + 2)^5$. Minimální polynom téže matice může být:

a) $(\lambda + 2)^9$

b) 1

c) $(\lambda - 7)$

d) $(\lambda + 2)^5(\lambda + 1)$

e) $(\lambda + 2)\lambda$

f) $(\lambda + 2)^5$

g) $(\lambda + 2)$

Příklad 6. Charakteristický polynom jisté matice je $p(\lambda) = (\lambda - 7)^3(\lambda + 1)$. Minimální polynom téže matice může být:

a) $(\lambda - 7)^2(\lambda + 1)$

b) $(\lambda - 7)$

c) $(\lambda - 7)(\lambda + 1)$

d) 1

e) $(\lambda - 7)(\lambda + 1)(\lambda + 5)$

f) $(\lambda - 7)^3(\lambda + 1)$

g) $(\lambda - 7)(\lambda + 1)^3$

Příklad 7. Vypočítejte charakteristický a minimální polynom matice B nad polem reálných čísel $\mathbb{R}$, dále určete její determinant, spektrum a stopu, vlastní čísla a vlastní vektory.

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Příklad 8. Vypočítejte charakteristický a minimální polynom matice C nad polem komplexních čísel $\mathbb{C}$, dále určete její determinant, spektrum a stopu, vlastní čísla a vlastní vektory.

$$C = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Příklad 9. Vypočítejte charakteristický a minimální polynom matice D nad polem komplexních čísel $\mathbb{C}$, dále určete její determinant, spektrum a stopu, vlastní čísla a vlastní vektory.

$$D = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{i} \end{pmatrix}$$

Příklad 10. Vypočítejte charakteristický a minimální polynom matice A nad polem reálných čísel $\mathbb{R}$, dále určete její determinant, spektrum a stopu, vlastní čísla a vlastní vektory.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -15 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -6 \end{pmatrix}$$

Příklad 11. Vypočítejte charakteristický a minimální polynom matice C nad polem komplexních čísel $\mathbb{C}$, dále určete její determinant, spektrum a stopu, vlastní čísla a vlastní vektory.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -3 & -5 & 3 \\ -3 & -8 & 6 \end{pmatrix}$$

Příklad 12. Vypočítejte charakteristický a minimální polynom matice C nad polem komplexních čísel $\mathbb{C}$, dále určete její determinant, spektrum a stopu, vlastní čísla a vlastní vektory.

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 8 & -5 \\ -4 & -7 & 4 \\ -3 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

Příklad 13. Určete charakteristický polynom (ve tvaru $c_0\lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \ldots + c_{n-1}\lambda + c_n$) matice A nad polem reálných čísel $\mathbb{R}$ řádu 3, víte-li, že stopa matice je 3, determinant matice je 2 a $c_2 = 4$.

Příklad 14. O matici B nad polem komplexních čísel $\mathbb{C}$ řádu n víme, že její charakteristický polynom nemá absolutní člen. Která z následujících tvrzení jsou jistě pravdivá:

a) matice B je diagonální
b) matice B má vlastní číslo 0
c) matice B je singulární
d) matice B má jediné (a tedy n-násobné) vlastní číslo

Příklad 15. Určete charakteristický polynom (ve tvaru $c_0\lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \ldots + c_{n-1}\lambda + c_n$) matice C nad polem $\mathbb{Z}_5$ řádu 3, víte-li, že na hlavní diagonále má prvky 1, 1, 3, matice C je singulární a hledaný charakteristický polynom neobsahuje člen s první mocninou λ.

Příklad 16. Víme, že minimální polynom matice A nad polem reálných čísel $\mathbb{R}$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -15 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -6 \end{pmatrix}$$

je $(\lambda + 1)^2$ (viz Příklad 10.). S využitím tohoto poznatku určete inverzní matici A^{-1} k matici A.

Příklad 17. S využitím minimálního polynomu matice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

určete inverzní matici A^{-1} k matici A, která je maticí nad polem reálných čísel $\mathbb{R}$.

VÝSLEDKY:

Příklad 1.

$$\begin{pmatrix} 0 & -11 & -1 \\ 8 & 24 & -9 \\ -35 & 15 & 23 \end{pmatrix}$$

Příklad 2.

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Příklad 3. $p(\lambda) = \lambda^3 - 4\lambda^2 - 8\lambda + 14$, $\operatorname{tr} A = 4$
Příklad 4. $p(\lambda) = \lambda^3 - (\mathrm{i}+4)\lambda^2 + (5\mathrm{i}-2)\lambda - 2\mathrm{i} + 13$, $\operatorname{tr} A = 4 + \mathrm{i}$
Příklad 5. f), g)
Příklad 6. a), c), f)
Příklad 7. $p(\lambda) = m(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda - 4)$, $\sigma(B) = \{2,\ 4\}$, $\det\ B = 8$, $\operatorname{tr} B = 6$, $\lambda_1 = 2$, $[(0,\ 1)]$, $\lambda_2 = 4$, $[(2,\ 1)]$
Příklad 8. $p(\lambda) = m(\lambda) = (\lambda - 3)^2$, $\sigma(C) = \{3,\ 3\}$, $\det\ C = 9$, $\operatorname{tr} C = 6$, $\lambda_{1,\,2} = 3$, $[(1,\ 1)]$
Příklad 9. $p(\lambda) = \lambda(\lambda - \mathrm{i})^2$, $m(\lambda) = \lambda(\lambda - \mathrm{i})$, $\sigma(D) = \{\mathrm{i},\ \mathrm{i},\ 0\}$, $\det D = 0$, $\operatorname{tr} D = 2\mathrm{i}$, $\lambda_{1,2} = \mathrm{i}$, $[(1,\ 0,\ 0), (0,\ 0,\ 1)]$, $\lambda_3 = 0$, $[(0,\ 1,\ 0)]$
Příklad 10. $p(\lambda) = (\lambda + 1)^3$, $m(\lambda) = (\lambda + 1)^2$, $\lambda_{1,2,3} = -1$, $[(-2,\ 1,\ 0),\ (5,\ 0,\ 1)]$, $\sigma(A) = \{-1,\ -1,\ -1\}$, $\det\ A = -1$, $\operatorname{tr} A = -3$
Příklad 11. $p(\lambda) = m(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda + 2)(\lambda - 3)$, $\det C = -6$, $\sigma(C) = \{1;\ -2;\ 3\}$, $\operatorname{tr} C = 2$, $\lambda_1 = 1$, $[(-1,\ 1,\ 1)]$, $\lambda_2 = -2$, $[(0,\ 1,\ 1)]$, $\lambda_3 = 3$, $[(1,\ 0,\ 1)]$
Příklad 12. $p(\lambda) = m(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda + 1)^2$, $\det C = 1$, $\sigma(C) = \{1;\ -1;\ -1\}$, $\operatorname{tr} C = -1$, $\lambda_1 = 1$, $[(-1,\ 1,\ 1)]$, $\lambda_{2,\,3} = -1$, $[(1,\ 0,\ 1)]$
Příklad 13. $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4\lambda - 2$
Příklad 14. b) a c)
Příklad 15. λ^3
Příklad 16.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & -6 & 15 \\ -1 & -3 & 5 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Příklad 17.

$$A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$