DETERMINANTY (3. část)

Příklad 1. Odůvodněte následující rovnosti determinantů nad polem reálných čísel $\mathbb{R}$:

a) $$\begin{vmatrix} a & e & 2a+5e-7j+o & j \\ b & f & 2b+5f-7k+p & k \\ c & g & 2c+5g-7l+q & l \\ d & h & 2d+5h-7m+r & m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & e & o & j \\ b & f & p & k \\ c & g & q & l \\ d & h & r & m \end{vmatrix},$$

b) $$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a+d & b+e & c+f \\ a+d+g & b+e+h & c+f+j \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & j \end{vmatrix},$$

c) $$\begin{vmatrix} a+9 & -a-9+7d-5g & 3d \\ b+9 & -b-9+7e-5h & 3e \\ c+9 & -c-9+7f-5j & 3f \end{vmatrix} = -15 \begin{vmatrix} a+9 & g & d \\ b+9 & h & e \\ c+9 & j & f \end{vmatrix}.$$

Příklad 2. Vypočítejte následující determinanty řádu 7 nad polem reálných čísel $\mathbb{R}$:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 0 & a & a & a & a & a & a \\ a & 0 & a & a & a & a & a \\ a & a & 0 & a & a & a & a \\ a & a & a & a & a & a & a \\ a & a & a & a & 0 & a & a \\ a & a & a & a & a & 0 & a \\ a & a & a & a & a & a & 0 \end{vmatrix}, \qquad \text{b)} \begin{vmatrix} 0 & a & a & a & a & a & a \\ a & 0 & a & a & a & a & a \\ a & a & 0 & a & a & a & a \\ a & a & a & 0 & a & a & a \\ a & a & a & a & 0 & a & a \\ a & a & a & a & a & 0 & a \\ a & a & a & a & a & a & 0 \end{vmatrix}.$$

Příklad 3∗.[1] Vypočítejte následující determinanty řádu n nad okruhem celých čísel $\mathbb{Z}$:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & n \end{vmatrix}, \quad \text{b)} \begin{vmatrix} b & a & a & \dots & a \\ a & b & a & \dots & a \\ a & a & b & \dots & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & a & a & \dots & b \end{vmatrix}, \quad \text{c)} \begin{vmatrix} x & y & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & y \\ y & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix},$$

[1] Příklady označené hvězdičkou ∗, tj. příklady 3 a 4, jsou převzaty ze sbírky úloh Bečvář, J.: *Vektorové prostory III.*, SPN, Praha, 1982.

$$\text{d)} \quad \begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & x_1y_2 & \dots & x_1y_n \\ x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \dots & x_2y_n \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ x_ny_1 & x_ny_2 & \dots & 1+x_ny_n \end{vmatrix}.$$

Příklad 4∗. Vypočítejte následující determinant řádu $2n$ nad polem reálných čísel $\mathbb{R}$:

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \dots & 0 & b \\ 0 & a & 0 & \dots & b & 0 \\ 0 & 0 & a & \dots & 0 & 0 \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ 0 & b & 0 & \dots & a & 0 \\ b & 0 & 0 & \dots & 0 & a \end{vmatrix}.$$

Příklad 5. Podle definice vypočítejte následující determinanty nad oborem integrity celých čísel $\mathbb{Z}$ (v případě b) je $n \geq 5$):

$$\text{a)} \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 7 & 1 \\ 8 & 0 & 2 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 8 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 9 & 8 \end{vmatrix}, \qquad \text{b)} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & n-1 \\ 3 & 0 & 0 & \dots & 0 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ n-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ n & n-1 & n-2 & \dots & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Příklad 6. Vypočítejte $\det AB$ a $\det BA$, jsou-li matice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{a} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 5 \\ 2 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

maticemi nad okruhem $\mathbb{Z}_{10}$.

Příklad 7. Podle definice determinantu (zde se jedná o determinant nad polem reálných čísel $\mathbb{R}$) zjistěte koeficienty u x^4 a u x^3 v polynomu

$$\begin{vmatrix} x & 2 & x & 1 \\ 3 & x & x & -1 \\ 4 & -2 & x & 1 \\ 1 & 2 & 3 & x \end{vmatrix}.$$

VÝSLEDKY:

Příklad 2. a) a^7, b) $6a^7$
Příklad 3. a) $-2(n-2)!$, b) $[(n-1)a+b](b-a)^{n-1}$, c) $x^n+(-1)^{n+1}y^n$,
d) $1+x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n$
Příklad 4. $(a^2-b^2)^n$
Příklad 5. a) 48, b) 0
Příklad 6. $\det AB = \det BA = 5$
Příklad 7. $x^4-2x^3+\cdots$