DETERMINANTY (2. část)

Příklad 1. Vypočítejte následující determinant nad komutativním okruhem $\mathbb{Z}_4$:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Příklad 2. Vypočítejte následující determinanty. Determinant $\det A$ je determinantem nad polem reálných čísel $\mathbb{R}$, determinant $\det B$ je determinantem nad komutativním okruhem $\mathbb{Z}_6$:

$$\det A = \begin{vmatrix} 8 & 3 & 1 & 0 & 3 & 5 & 0 \\ -2 & 1 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 7 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}, \quad \det B = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Příklad 3. Jsou dány matice A, B, C a D:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Rozhodněte (bez výpočtu inverzní matice), zda je invertibilní

a) matice A nad polem komplexních čísel $\mathbb{C}$
b) matice A nad polem reálných čísel $\mathbb{R}$
c) matice A nad polem $\mathbb{Z}_{31}$
d) matice A nad oborem integrity celých čísel $\mathbb{Z}$
e) matice A nad komutativním okruhem $\mathbb{Z}_{18}$

f) matice B nad polem komplexních čísel $\mathbb{C}$
g) matice B nad oborem integrity celých čísel $\mathbb{Z}$

h) matice B nad komutativním okruhem $\mathbb{Z}_4$
i) matice B nad oborem integrity Gaussových celých čísel

j) matice C nad polem reálných čísel $\mathbb{R}$
k) matice C nad polem $\mathbb{Z}_5$
l) matice C nad komutativním okruhem $\mathbb{Z}_6$
m) matice C nad oborem integrity celých čísel $\mathbb{Z}$

n) matice D nad polem reálných čísel $\mathbb{R}$
o) matice D nad polem $\mathbb{Z}_5$
p) matice D nad komutativním okruhem $\mathbb{Z}_{1024}$

Příklad 4. Pomocí determinantů vypočítejte inverzní matici k následujícím maticím – matice $A,\ B$ jsou maticemi nad polem reálných čísel, matice C je maticí nad oborem integrity celých čísel $\mathbb{Z}$ a matice D je maticí nad polem $\mathbb{Z}_5$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 8 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Příklad 5. Pomocí determinantů vypočítejte inverzní matici A^{-1} k matici A nad polem reálných čísel $\mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Příklad 6. Pomocí Cramerova pravidla vypočítejte následující soustavu lineárních rovnic nad polem $\mathbb{Z}_5$:

$$\begin{array}{rcrcrcl} 4x & & & + & z & = & 2, \\ 4x & + & y & & & = & 1, \\ x & & & + & 2z & = & 0. \end{array}$$

Příklad 7. Pomocí Cramerova pravidla vypočítejte následující soustavu lineárních rovnic nad polem reálných čísel $\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x & + & 2y & + & z & = & 3, \\ 2x & + & 5y & + & 3z & = & 1, \\ 3x & + & 4y & + & 2z & = & -6. \end{array}$$

Příklad 8. Pomocí Cramerova pravidla vypočítejte následující soustavu lineárních rovnic nad polem $\mathbb{Z}_{11}$:

$$\begin{array}{rcrcrcrl} 3a & + & b & + & 6c & + & 4d = & 4, \\ 9a & + & 3b & + & 7c & + & d = & 7, \\ 5a & + & 3b & + & 2c & + & 2d = & 0, \\ 2a & + & 9b & + & 8c & + & 6d = & 1. \end{array}$$

Příklad 9. Vypočítejte následující determinanty nad polem reálných čísel $\mathbb{R}$:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} \log_6 3 & \log_5 25 \\ \log_6 12^{-1} & \log_4 16 \end{vmatrix}, \qquad \text{b)} \begin{vmatrix} 3^3 & 3^3 & 9 \\ 3^{-2} & 3^{-2} & 3^{-5} \\ 27 & 3^0 & 3^{-1} \end{vmatrix}.$$

Příklad 10. Vypočítejte následující determinanty nad polem komplexních čísel $\mathbb{C}$:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} -\mathrm{i} & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & \mathrm{i} \end{vmatrix}, \qquad \text{b)} \begin{vmatrix} \mathrm{i} & -\mathrm{i} & 1-\mathrm{i} & -2-\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 & 2\mathrm{i} & \mathrm{i} \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & \mathrm{i} & \mathrm{i} & 3+\mathrm{i} \end{vmatrix}.$$

VÝSLEDKY:

Příklad 1. 1

Příklad 2. a) -154, b) 0

Příklad 3. a) ano, b) ano, c) ano, d) ne, e) ne, f) ano, g) ne, h) ano, i) ne, j) ano, k) ano, l) ano, m) ano, n) ne, o) ne, p) ne

Příklad 4.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}, \qquad B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{50} & \frac{8}{50} \\ \frac{7}{50} & \frac{1}{25} \end{pmatrix},$$

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}, \qquad D^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Příklad 5.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{8} & \frac{1}{8} & \frac{7}{8} \\ \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Příklad 6. $(2,\ 3,\ 4)$

Příklad 7. $(4,\ -20,\ 31)$

Příklad 8. Příklad nelze řešit pomocí Cramerova pravidla, neboť matice soustavy je singulární.

Příklad 9. a) 4, b) $-\frac{208}{9}$

Příklad 10. a) 2, b) $9 + 7\mathrm{i}$