

LINEÁRNÍ FORMY

Pozn.: v dalším textu symbolem x značíme n -tici (x_1, x_2, \dots, x_n) z příslušného vektorového prostoru (např. $\mathbb{R}^n, \mathbb{Z}_5^n, \dots$)

Příklad 1. Určete, zda jsou následující zobrazení lineární formy na vektorovém prostoru \mathbb{R}^n :

a) $f(x) = x_1 + 2x_2 + 8x_3, n = 3$

b) $f(x) = x_1 + 2x_2 + 8x_3, n = 7$

c) $f(x) = 5, n = 3$

d) $f(x) = 0, n = 33$

e) $f(x) = x_4 - x_5 + 4, n = 5$

f) $f(x) = (x_1, x_3), n = 3$

g) $f(x) = x_1x_3 + x_2, n = 10$

Příklad 2. Nechť V je prostor dimenze 4. Určete matici lineární formy f vzhledem k bázi N , víte-li, že analytické vyjádření této lineární formy f vzhledem k bázi N je $f(x) = x_1 + 4x_2 + 5x_4$.

Příklad 3. Nechť V je prostor dimenze 5. Určete analytické vyjádření formy f vzhledem k bázi N , víte-li, že matice této lineární formy f vzhledem k bázi N je $(0, 5, 0, 0, 1)$.

Příklad 4. Lineární forma f na vektorovém prostoru \mathbb{R}^3 má vzhledem ke kanonické bázi analytické vyjádření $f(x) = 2x_1 + x_2 - 5x_3$. Najděte její analytické vyjádření vzhledem k bázi

$$M = \{(2, -1, 1), (1, 1, 0), (2, 3, -2)\}.$$

Příklad 5.*¹ Lineární forma f na vektorovém prostoru \mathbb{R}^3 má vzhledem k bázi $M = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$ analytické vyjádření $f(x) = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3$. Najděte její analytické vyjádření vzhledem ke kanonické bázi.

Příklad 6.* Lineární forma f na vektorovém prostoru \mathbb{R}^2 má vzhledem k bázi $M = \{(1, 1), (1, -1)\}$ analytické vyjádření $f(x) = x_1 + 2x_2$. Najděte její analytické vyjádření vzhledem k bázi $N = \{(1, -2), (3, 2)\}$.

¹ Příklady označené hvězdičkou *, tj. příklady 5, 6 a 7, jsou převzaty ze sbírky úloh Bečvář, J.: *Vektorové prostory III.*, SPN, Praha, 1982.

Příklad 7.* Lineární forma f na vektorovém prostoru \mathbb{Z}_5^3 má vzhledem k bázi $M = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ analytické vyjádření $f(x) = x_1 + 3x_2 + 4x_3$. Najděte její analytické vyjádření vzhledem k bázi $N = \{(1, 1, 4), (1, 4, 1), (4, 1, 1)\}$.

Příklad 8. K bázi $M = \{(2, 1, 0, 0), (0, 2, 1, 1), (2, 0, 0, 1), (0, 0, 0, 2)\}$ prostoru \mathbb{Z}_3^4 najděte duální bázi M^* prostoru $(\mathbb{Z}_3^4)^*$. (Formy duální báze M^* určete analytickými vyjádřeními vzhledem ke kanonické bázi prostoru \mathbb{Z}_3^4 .)

Příklad 9. K bázi $M = \{(2, 1, 0, 0), (2, 1, 2, 0), (2, 0, 0, 1), (0, 0, 2, 0)\}$ prostoru \mathbb{Z}_3^4 najděte duální bázi M^* prostoru $(\mathbb{Z}_3^4)^*$ nad \mathbb{Z}_3 . (Formy duální báze M^* určete analytickými vyjádřeními vzhledem ke kanonické bázi prostoru \mathbb{Z}_3^4 .)

Příklad 10. K bázi $M = \{(0, 1, 0), (1, 0, 0), (1, 1, 1)\}$ prostoru \mathbb{R}^3 najděte duální bázi M^* prostoru $(\mathbb{R}^3)^*$. (Formy duální báze M^* určete analytickými vyjádřeními vzhledem ke kanonické bázi prostoru \mathbb{R}^3 .)

Příklad 11. Najděte duální bázi M prostoru \mathbb{Z}_5^3 k bázi $M^* = \{f_1, f_2, f_3\}$ prostoru $(\mathbb{Z}_5^3)^*$, jestliže formy f_i jsou dány svými analytickými vyjádřeními. $f_1(x) = x_1 + 2x_2 + 3x_3$, $f_2(x) = 2x_1 + 2x_2 + 2x_3$, $f_3(x) = 3x_1 + x_2 + 3x_3$ vzhledem ke kanonické bázi.

Příklad 12. Necht' je dána báze $M^* = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ duální k bázi M prostoru \mathbb{R}^4 . Analytická vyjádření forem f_i , $i = 1, 2, 3, 4$, vzhledem ke kanonické bázi jsou

$$f_1(x) = x_2 + x_4, \quad f_2(x) = x_1 + x_3, \quad f_3(x) = x_1 + x_2 + x_3, \quad f_4(x) = x_3 - x_4.$$

Určete souřadnice vektoru $v = (0, 0, 5, 2)$ vzhledem k bázi M .

Příklad 13. Necht' je dána báze $M^* = \{f_1, f_2, f_3\}$ duální k bázi M prostoru \mathbb{Z}_3^3 . Analytická vyjádření forem f_i , $i = 1, 2, 3$, vzhledem ke kanonické bázi jsou

$$f_1(x) = x_1 + x_2 + 2x_3, \quad f_2(x) = x_3, \quad f_3(x) = 2x_1 + x_2.$$

Určete souřadnice vektoru $w = (0, 0, 1)$ vzhledem k bázi M .

Příklad 14. Necht' je dána báze $M^* = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8, f_9, f_{10}\}$ duální k bázi M prostoru \mathbb{R}^{10} . Analytická vyjádření forem f_i , $i = 1, 2, \dots, 10$, vzhledem ke kanonické bázi jsou

$$f_1(x) = x_{10}, \quad f_2(x) = x_9, \quad f_3(x) = x_8, \quad f_4(x) = x_7, \quad f_5(x) = x_6,$$

$$f_6(x) = x_5, \quad f_7(x) = x_4, \quad f_8(x) = x_3, \quad f_9(x) = x_2, \quad f_{10}(x) = x_1.$$

Určete souřadnice vektoru $v = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)$ vzhledem k bázi M .

Příklad 15. Necht' je dána báze $M^* = \{f_1, f_2, f_3\}$ duální k bázi M prostoru \mathbb{Z}_5^3 . Analytická vyjádření forem f_i , $i = 1, 2, 3$, vzhledem ke kanonické bázi jsou

$$f_1(x) = 3x_1 + 3x_3, \quad f_2(x) = 2x_2, \quad f_3(x) = 2x_1 + x_2 + 3x_3.$$

Určete souřadnice vektoru $w = (3, 3, 4)$ vzhledem k bázi M .

Příklad 16. Necht' je dána báze $M = \{(0, 0, 1), (\frac{1}{2}, 0, 1), (0, \frac{1}{4}, 0)\}$ prostoru \mathbb{R}^3 . Lineární forma f na prostoru \mathbb{R}^3 má vzhledem k duální bázi M^* k bázi M souřadnice $(2, -2, 3)$. Určete analytické vyjádření formy f vzhledem k bázi

$$N = \left\{ \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, 0 \right), \left(0, \frac{1}{4}, 1 \right), \left(-\frac{1}{2}, 0, 2 \right) \right\}.$$

Příklad 17. Necht' je dána báze $M = \{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$ prostoru \mathbb{Z}_5^3 . Lineární forma f na prostoru \mathbb{Z}_5^3 má vzhledem k duální bázi M^* k bázi M souřadnice $(4, 2, 0)$. Určete analytické vyjádření formy f vzhledem k bázi

$$N = \{(3, 2, 1), (4, 4, 4), (1, 4, 3)\}.$$

VÝSLEDKY:

Příklad 1. a) ano, b) ano, c) ne, d) ano, e) ne, f) ne, g) ne

Příklad 2. $(1, 4, 0, 5)$

Příklad 3. $f(x) = 5x_2 + x_5$

Příklad 4. $f(x) = -2x'_1 + 3x'_2 + 17x'_3$

Příklad 5. $f(x) = 3x'_2 + 2x'_3$

Příklad 6. $f(x) = \frac{5}{2}x'_1 + \frac{7}{2}x'_2$

Příklad 7. $f(x) = 3x'_2 + 3x'_3$

Příklad 8. $M^* = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$, kde $f_1(x) = x_2 + x_3$, $f_2(x) = x_3$, $f_3(x) = 2x_1 + 2x_2 + 2x_3$,
 $f_4(x) = 2x_1 + 2x_2 + 2x_4$

Příklad 9. Množina M není báze.

Příklad 10. $M^* = \{f_1, f_2, f_3\}$, kde $f_1(x) = x_2 - x_3$, $f_2(x) = x_1 - x_3$, $f_3(x) = x_3$

Příklad 11. $M = \{(2, 0, 3), (1, 2, 0), (4, 2, 4)\}$

Příklad 12. $\langle v \rangle_M = (2, 5, 5, 3)$

Příklad 13. $\langle w \rangle_M = (2, 1, 0)$

Příklad 14. $\langle w \rangle_M = (10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1)$

Příklad 15. $\langle w \rangle_M = (1, 1, 1)$

Příklad 16. $f(x) = 2x'_1 + 5x'_2 + 8x'_3$

Příklad 17. $f(x) = x'_2$

© Martina Škorpilová