Kapitola 1. Úvod

1.1. Logika

1.2. Množiny

1.3 Číselné obory

Množinou všech reálných čísel (značíme ji R) budeme rozumět množinu, na níž je definováno sčítání (značíme $x+y$), násobení (značíme $x.y$) a uspořádání (značíme $x \leq y$), které splňují tyto axiomy:

I. (Algebraické operace)

I.1 $\forall x, y, z \in R : x + (y + z) = (x + y) + z$ (asociativní zákon pro sčítání),

I.2 $\forall x, y \in R : x + y = y + x$ (komutativní zákon pro sčítání),

I.3 v R existuje nulový prvek (značíme ho 0) tak, že $\forall x \in R : x + 0 = x$,

I.4 pro každý $x \in R$ existuje opačný prvek (značíme ho $-x$) tak, že $x+(-x) = 0$,

I.5 $\forall x, y, z \in R : x.(y.z) = (x.y).z$ (asociativní zákon pro násobení),

I.6 $\forall x, y \in R : x.y = y.x$ (komutativní zákon pro násobení),

I.7 v R existuje jednotkový prvek (značíme ho 1) tak, že $\forall x \in R : x.1 = x$,

I.8 pro každý $x \in R, x \neq 0$ existuje inverzní prvek (značíme ho x^{-1}) tak, že $x.x^{-1} = 1$,

I.9 $\forall x, y, z \in R : (x + y).z = x.z + y.z$ (distributivní zákon).

II.(Uspořádání)

II.1 $\forall x, y, z \in R : ((x \leq y) \wedge (y \leq z)) \Rightarrow (x \leq z)$ (tranzitivita),

II.2 $\forall x, y \in R : (((x \leq y) \wedge (y \leq x)) \Rightarrow (x = y))$ (slabá antisymetrie),

II.3 $\forall x, y \in R : (x \leq y) \vee (y \leq x)$,

II.4 $\forall x, y, z \in R : (x \leq y) \Rightarrow (x + z \leq y + z)$,

II.5 $\forall x, y, z \in R : ((x \leq y) \wedge (0 \leq z) \Rightarrow (x.z \leq y.z)$.

III. (Úplnost)

III.1 Věta o suprému: Pro každou neprázdnou a shora omezenou množinu $M \subset R$ existuje reálné číslo s, které je suprémem množiny M.

Potřebné definice:

Definice 1.1:

Řekneme, že množima $M \in R$ je shora omezená, jestliže existuje $a \in R$ tak, že pro všechna $x \in M$ platí $x \leq a$. Číslo a nazveme horním odhadem (horní závorou, horní mezí) množiny M.

Řekneme, že množima $M \in R$ je zdola omezená, jestliže existuje $b \in R$ tak, že pro všechna $x \in M$ platí $b \leq x$. Číslo b nazveme dolním odhadem (dolní závorou, dolní mezí) množiny M.

Řekneme. že množina M je omezená, je-li současně omezená shora a omezená zdola.

Definice 1.2:

Řekneme, že $s \in R$ je suprémem množiny M (značíme $s = \sup M$), jestliže

(i) $\forall x \in M : x \leq s$,

(ii) $\forall s' \in R, s' < s \quad \exists x \in M : s' < x$.

Řekneme, že $g \in R$ je infimem množiny M (značíme $g = \inf M$), jestliže

(i) $\forall x \in M : g \leq x$,

(ii) $\forall g' \in R, g' > g \quad \exists x \in M : x < g'$.

Věta 1.1: (Archimedova vlastnost) (L)
$\forall x \in R \quad \exists n \in N : x < n$.

Věta 1.2: (Existence infima) (L)
Pro každou neprázdnou zdola omezenou množinu $M \in R$ existuje $g \in R$, které je infimem množiny M.

Věta 1.3: (O celé části) (L)
Pro každé $x \in R$ existuje $z \in Z$ tak, že $z \leq x < z + 1$. Toto z nazveme celou částí čísla x a značíme $[x]$.

Věta 1.4: (Hustota Q v R) (L)
$\forall a, b \in R, a < b \quad \exists q \in Q : a < q < b$.

Věta 1.5: (Existence n-té odmocniny) (T)
$\forall x \in R, 0 \leq x, \ \forall n \in N \quad \exists y \in R, 0 \leq y, : y^n = x$.

Definice 1.3 (Intervaly, okolí bodu) Pro každé $a, b \in R, a \leq b$ jsou intervaly s krajními body a, b definovány takto:
otevřený interval $(a, b) = \{x \in R; a < x < b\}$,
uzavřený interval $[a, b] = \{x \in R; a \leq x \leq b\}$.
Obdobně $[a, b) = \{x \in R; a \leq x < b\}$, $(a, b] = \{x \in R; a < x \leq b\}$.
Okolím bodu $x \in R$ o poloměru $\epsilon \in (0, \infty)$ nazveme množinu

$$U(x, \epsilon) = \{y \in R; |x - y| < \epsilon\} = (x - \epsilon, x + \epsilon),$$

prstencovým okolím bodu $x \in R$ o poloměru $\epsilon \in (0, \infty)$ nazveme množinu

$$P(x, \epsilon) = \{y \in R; 0 < |x - y| < \epsilon\} = (x - \epsilon, x) \cup (x, x + \epsilon).$$