Kapitola 3. Číselné řady

3.1. Úvodní definice

Definice 3.1:
Buď $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ posloupnost reálných resp. komplexních čísel. Pro každé $n \in N$ definujeme n-tý částečný součet s_n řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ takto:

$$s_n = a_1 + ... + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Definice 3.2:
Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje k součtu s, jestliže existuje $s \in R$ tak, že $s_n \to s$. Píšeme $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$.
Je-li $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \infty$, řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje do ∞;
je-li $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = -\infty$, řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje do $-\infty$.
Pokud $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ neexistuje, řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ osciluje.

Věta 3.1: (Nutná podmínka konvergence řady)(L)
Je-li $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní, pak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Věta 3.2: (Aritmetika)(BD)
Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a, \sum_{n=1}^{\infty} b_n = b, a, b, \alpha, \beta \in R$. Pak $\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n)$ konverguje a platí $\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha a + \beta b$.

Věta 3.3: (Bolzano-Cauchyova věta pro řady)(L)
Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní právě tehdy, když

$$\forall \epsilon \in (0, \infty)\ \exists n_0 \in N\ \forall n \geq n_0\ \forall p \in N : |\sum_{k=n}^{n+p} a_k| < \epsilon.$$

3.2. Řady s nezápornými členy

Poznámka
Jsou-li a_n nezáporná, je (s_n) neklesající a limita posloupnosti (s_n) vždy existuje. Tato limita je vlastní (a řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje) právě tehdy, je-li (s_n) omezená.

Věta 3.4: (Srovnávací kritérium)(L)
Nechť $\exists n_0\ \forall n \geq n_0 : 0 \leq a_n \leq b_n$. Pak platí:
(i) jestliže $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, pak i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje;
(ii) jestliže $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje, pak i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverguje.

Věta 3.5: (Limitní srovnávací kritérium)(L)
Předpokládejme, že $a_n \geq 0, b_n > 0$ pro všechna dostatečně velká n.
1. Nechť $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c \in (0, \infty)$. Pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.
2. Nechť $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$, nechť $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje . Pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

3. Nechť $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$, nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje . Pak $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje.

Věta 3.6: (Cauchyovo odmocninové kritérium)(L)
Buď (a_n) posloupnost nezáporných čísel.
(i) Nechť $\exists q \in (0,1)\ \exists n_0 \in N\ \forall n \geq n_0 : \sqrt[n]{a_n} < q$. Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.
(ii) Nechť pro nekonečně mnoho n je $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$. Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Věta 3.7: (Limitní Cauchyovo odmocninové kritérium)(L)
Buď (a_n) posloupnost nezáporných čísel.
(i) Nechť $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$. Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.
(ii) Nechť $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$. Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Věta 3.8: (D'Alembertovo podílové kritérium)(BD)
Buď (a_n) posloupnost kladných čísel.
(i) Nechť $\exists q \in (0,1)\ \exists n_0 \in N \forall n \geq n_0 : \frac{a_{n+1}}{a_n} < q$. Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.
(ii) Nechť $\exists n_0 \in N\ \forall n \geq n_0 : \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$. Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Věta 3.9: (Limitní d'Alembertovo podílové kritérium)(BD)
Buď (a_n) posloupnost kladných čísel.
(i) Nechť $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$. Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.
(ii) Nechť $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$. Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Věta 3.10: (Konvergence řady $\sum \frac{1}{n^p}$)(BD)
Buď $p \in \mathbb{R}$. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ konverguje právě tehdy, je-li $p > 1$.
Věta 3.11: (Kondenzační kritérium) (BD)
Buď (a_n) monotonní posloupnost nezáporných čísel. Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě tehdy, když konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$.

3.3. Řady se členy, které mění znaménka

Definice 3.3.:
Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně, jestliže $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konverguje.

Věta 3.12:(Konvergence a absolutní konvergence)(L)
Jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

Věta 3.13: (Leibnizovo kritérium)(T)
Buď (a_n) monotonní posloupnost nezáporných čísel. Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ konverguje právě tehdy, když $a_n \to 0$.

Věta 3.14: (Abelovo-Dirichletovo kritérium) (BD)
Buď (b_n) monotonní posloupnost nezáporných čísel, (a_n) posloupnost reálných nebo komplexních čísel. Jestliže navíc
(A) řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje a posloupnost (b_n) je omezená
nebo
(D) posloupnost (a_n) má omezené částečné součty (s_n) a $b_n \to 0$,
pak je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konvergentní.

Definice 3.4.: (Přerovnání řady)
Buď ϕ prosté zobrazení množiny N na N (bijekce). Pak ϕ nazveme přerovnáním a řadu $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ nazveme přerovnanou řadou $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, jestliže pro všechna $n \in N$ platí $b_n = a_{\phi(n)}$.

Věta 3.15: (Přerovnání absolutně konvergentní řady)(BD)
Je-li $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně konvergentní a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$, pak každá přerovnaná řada je rovněž absolutně konvergentní a konverguje ke stejnému součtu s.

Věta 3.16: (Riemannova o přerovnání neabsolutně konvergentní řady)(BD)
Předpokládejme, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní a není absolutně konvergentní, buď $s \in R^*$. Pak existuje přerovnání ϕ tak, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\phi(n)}$ konverguje k součtu s.

Definice 3.5.:
Cauchyovým součinem řad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ nazveme řadu $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$,kde

$$c_n = \sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j}.$$

Věta 3.17: (O Cauchyově součinu)(BD)
Předpokládejme, že $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ jsou absolutně konvergentní a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a, \sum_{n=0}^{\infty} b_n = b$. Pak Cauchyův součin $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ je absolutně konvergentní a platí $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = a.b$